

# 선체 상부구조물의 실험적 해석

박 석 주\* , 박 성 현\*\* , 오 창 근\*\*\* , °제 해 광\*\*\*\*

## Experimental Method of a Super Structure

S. C. Park\*, S. H. Park\*\*, C. G. Oh\*\*\*, °H. K. Je\*\*\*\*

Key Word : experimental modal Analysis(실험모달해석), curve-fitting(곡선맞춤)  
experimental modal identification(실험적 모드 동정), selected mode(채용모드)

### ABSTRACT

Up to now, vibration analysis and vibration engineering have been developed, encompassing the aspects of both experimental and analytical techniques. Using experimental modal analysis or modal testing, the mode shapes and frequencies of practical structure can be measured accurately.

Curve-Fitting Method is realized through experimental modal identification. In the experimental modal parameter estimation, the estimation of modal damping factor is difficult for complicated and large structure. Also numbers of Selected mode are determined before the procedure.

This paper describes the vibration shape of the super-structure model of ship through experimental modal analysis.

### 1. 서 론

구조물의 동적 해석 문제에 있어, 유한 요소 해석같은 해석기법은 지난 수십 년 간 많은 연구자들에 의해 개발·적용되어 왔으며 현재는 단순한 진동해석뿐만 아니라 최적화문제 등에도 활용되는 범용적인 해석도구로 발전하였으며 응용사례도 많

이 있다. 그러나 유한요소법등의 해석적 방법에 비해 실험적 해석은 큰 발전이 없었다. 기존의 발표된 논문 또한 작고 간단한 구조물에 대하여 적용된 사례가 다수이다. 실험적 방법이 해석적 방법에 비해 발전 못한 이유는 여러 가지 있겠지만, 실험 중 측정오차 및 계측에 필요한 장비의 고유오차들과 구조물의 고유진동수, 감쇠비등 특성치 추정을 위한 비선형 수치해석 알고리즘 미비에 기인하는 고 정도의 결과를 얻지 못하는 것이다.

최근 들어 실험 측정 장비의 발전과 컴퓨터의 고속, 고용량 및 소프트웨어의 그래픽적 사용자 환경 의한 수치해석적 알고리즘 개발의 접근 방식이

\* 정회원, 한국해양대학교 해양시스템공학부

\*\* 정회원, 목포해양대학교 해사수송과학부

\*\*\* 정회원, 동명중공업(주) 기술연구소

\*\*\*\* 한국해양대학교 해양시스템공학부 대학원

구현되어 지고 있다.

실험모드해석은 전달함수나 응답의 측정데이터에 포함된 외란이나 오차를 제거하여 대상물의 물리현상을 정확하게 표현하는 모드특성을 결정하기 위해 실행되어 진다.

현재까지 많은 주파수 전달함수 곡선맞춤방법이 개발되고, 범용적으로 사용되어 지고 있다. 그러나 모드특성의 초기치 결정에 있어 수치적 접근의 어려움과 채용모드수의 사전 결정의 단점을 가지고 있으며, 적용사례 또한 비교적 작고 간단한 구조물에 한정되어 왔었다.

본 논문에선 모드특성중 전체항(고유진동수, 고유진동모드 감쇠비)의 초기치 결정과 채용모드수의 사전 판정에 의하여 수치 알고리즘의 단점을 보완하는 방법을 제시하고, 비교적 큰 구조물인 2단 상자형 선체 상부 구조 모델의 실험 해석을 통하여 구조물의 동적 특성치를 추출하여 구조물의 진동특성을 파악하고자 한다.

## 2. 모드해석법

동력학에서 모드는 진동형을 나타낸다. 모드해석은 진동형별 해석법으로써, 다자유도계 운동방정식을 비연성화하는 것을 말한다. 즉, 고유모드에서는 광의의 직교성이 있는 것을 이용하여 고유모드를 일반좌표(general coordinate)로서 이용하는 해석방법을 모드해석(modal analysis)이라 한다. 이것을 다자유도계의 진동을 고유진동모드가 중첩에 의해 동적응답을 구하는 방법으로 사용하는 것이다.

### 2.1 다자유도 감쇠계의 전달함수

다자유도계의 운동방정식은 행렬형식으로 표현할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

$[M]$ 은 질량행렬,  $[C]$ 는 감쇠행렬,  $[K]$ 는 강성행렬이며,  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ 를 특성행렬이라 한다.

운동방정식을 고유모드의 직교성에 의하여 모드좌표로 변환하고 비례감쇠를 적용하면,

$$\{X\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Phi_r\}^T \{F\} \{\Phi_r\}}{k_r - \omega^2 m_r + j\omega c_r} \quad (2)$$

$\{\Phi_r\}$ 는  $r$ 차 고유모드 벡터,  $m_r$ 은  $r$ 차의 모드질량(modal mass),  $k_r$ 은  $r$ 차의 모드강성(modal stiffness),  $c_r$ 은  $r$ 차의 모드감쇠(modal damping)이다.

대상주파수를 한정하여, 잉여질량  $S$ 와 잉여강성  $Z$ 를 고려한 점  $i$ 를 기진한 경우의 점  $l$ 의 진폭응답 전달함수는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$G(\omega) = \frac{X_l}{F_i} = \sum_{r=1}^N \frac{1/K_r}{1 - \beta_r^2 + j2\zeta_r \beta_r} - \frac{1}{\omega^2 S} + \frac{1}{Z} \quad (3)$$

여기에서,  $K_r = \frac{k_r}{\Phi_{ri} \Phi_{rl}}$ 은 등가강성이다.

진폭응답 compliance  $G(\omega)$ 는 복소수이고 이것을 실부와 허부로 나타내면 다음과 같다.

$$G_{\text{실}} = \sum_{r=1}^N \frac{(1 - \beta_r^2)/K_r}{(1 - \beta_r^2)^2 + 4\zeta_r^2 \beta_r^2} - \frac{1}{\omega^2 S} + \frac{1}{Z}$$

$$G_{\text{허}} = \sum_{r=1}^N \frac{-2\zeta_r \beta_r / K_r}{(1 - \beta_r^2)^2 + 4\zeta_r^2 \beta_r^2} \quad (4)$$

가속도응답 acceleration  $L(\omega)$ 는

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{-\Omega_r^2 \beta_r^2 / K_r}{1 - \beta_r^2 + j2\zeta_r \beta_r} + \frac{1}{S} - \frac{\omega^2}{Z}$$

$$L_{\text{실}} = \sum_{r=1}^N \frac{-\Omega_r^2 \beta_r^2 (1 - \beta_r^2) / K_r}{(1 - \beta_r^2)^2 + 4\zeta_r^2 \beta_r^2} + \frac{1}{S} - \frac{\omega^2}{Z}$$

$$L_{\text{허}} = \sum_{r=1}^N \frac{2\zeta_r \Omega_r^2 \beta_r^3 / K_r}{(1 - \beta_r^2)^2 + 4\zeta_r^2 \beta_r^2} \quad (5)$$

## 3. 곡선맞춤(Curve-Fitting)

구조물의 고유진동수, 모드감쇠비, 고유모드, 모드강성, 모드질량, 잉여강성, 잉여질량을 총칭하여 모드특성이라 한다. 모드특성은 전달함수의 곡선이나 충격응답의 곡선에 일치하도록 결정하므로 곡선맞춤(Curve-Fitting)이라 한다.

### 3.1 모드 특성값의 결정

모드 특성값은 다음과 같은 절차에 의하여 반복계산으로 찾을 수 있다.

1) 전달함수의  $r$ 차의 공진점을  $\omega_r$  고유진동수  $\Omega_r$ 로 지정한다.

2) 감쇠의 결정

공진점근방의 compliance 또는 accelerance의 크기, 실부의 절대치 및 허부의 절대치를 중복하여 나타내었을 때, 공진점으로부터 멀어지면 허부는 급속히 감소하고 compliance는 실제 실부만으로 지배 되게 된다. 즉 허부가 문제로 되는 것은  $r$ 차 공진점 근방의  $\delta_r$ 의 범위이다.

$r$ 차 공진점 근방의  $\delta_r$ 의 범위의  $m$ 개 각진동수  $\omega_i$  ( $i = 1 \sim m$ )에 대하여 실험에 의해 Accelerance의 실부  $L_{\text{실}i}$ 가 데이터로서 주어지고 있다고 한다. 대상주파수 범위내에  $n$ 개의 고유모드가 존재한다고 하면

$$\begin{pmatrix} L_{\text{실}1} \\ L_{\text{실}2} \\ \vdots \\ L_{\text{실}m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & A_{11} & \dots & A_{1n} & -\omega_1^2 \\ 1 & A_{22} & \dots & A_{2n} & -\omega_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & A_{m1} & \dots & A_{mn} & -\omega_m^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/S \\ 1/K_1 \\ \vdots \\ 1/K_n \\ 1/Z \end{pmatrix}$$

$$\{L_{\text{실}}\} = [A_1]\{P_1\} \quad (6)$$

$$\text{단, } A_{ir} = \frac{-\Omega_r^2 \beta_r^2}{1 - \beta_{ri}^2} \quad (i=1 \sim m, r=1 \sim n)$$

최소자승법을 적용하면

$$\{P_1\} = ([A_1]^T [A_1])^{-1} [A_1] \{L_{\text{실}}\} \quad (7)$$

$\{P_1\}$ 을 구하면  $S, Z$  및  $K_r$  ( $r = 1 \sim n$ )을 알 수 있다.

다음으로  $r$ 차의 봉우리근방  $\delta_r$ 인 범위내의 데이터를 이용하여 각차수  $r$  ( $r = 1 \sim n$ )마다 모드 감쇠비  $\zeta_r$ 을 결정한다.  $r$ 차의 공진봉에 대한 다른 고유모드의 영향은 실수부만으로 된다고 하고 있으므로 그것들을 실험으로부터 얻은 Accelerance의 데이터  $L_i$ 로부터 빼면  $r$ 차의 고유모드 성분  $L_{ri}$ 가 다음과 같이 주어진다.

$$L_{ri} = \frac{-\Omega_r^2 \beta_r^2 / K_r}{1 - \beta_{ri}^2 + j 2\zeta_r \beta_{ri}}$$

$$= L_i - \left\{ \sum_{i=1}^{r-1} \frac{-\Omega_r^2 \beta_r^2 / K_i}{1 - \beta_{ri}^2} + \sum_{i=r+1}^n \frac{-\Omega_r^2 \beta_r^2 / K_i}{1 - \beta_{ri}^2} + \frac{1}{S} - \frac{\omega_i^2}{Z} \right\} \quad (8)$$

$r$ 차의 공진봉우리 근방  $\delta_r$ 의 범위내에서  $m'$  ( $i = 1 \sim m'$ )개의  $L_{ri}$ 가 식(8)에 주어졌을

때,  $\frac{-\Omega_r^2 \beta_r^2}{(K_r G_{ri})}$ 의 실부를  $B_{\text{실}i}$  허부를  $B_{\text{허}i}$ 로 하면

$$B_{\text{실}i} = 1 - \beta_{ri}^2, \quad B_{\text{허}i} = 2\zeta_r \beta_{ri} \quad (9)$$

식(9)로부터

$$B_{\text{허}i}^2 - 4\zeta_r^2 (1 - B_{\text{실}i}) = 0 \quad (i=1 \sim m') \quad (10)$$

식(10)에 최소자승법을 적용한다. 오차함수  $\lambda$ 는

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m'} \{B_{\text{허}i}^2 - 4\zeta_r^2 (1 - B_{\text{실}i})\}^2 \quad (11)$$

$\lambda$ 를  $4\zeta_r^2$ 로 미분하고 0으로 두면

$$\zeta_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m'} (1 - B_{\text{실}i}) B_{\text{허}i}^2}{\sum_{i=1}^{m'} (1 - B_{\text{실}i})^2}} \quad (12)$$

3) 새로운  $\Omega_r$ 과  $\omega_{dr}$ 을 결정한다.

$$\Omega_r = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - 2\zeta_r^2}}, \quad \omega_{dr} = \Omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad (13)$$

### 3.2 선형직접법

일반적으로 잉여질량, 잉여강성은 복소수로 나타난다. 식(5)를 다시 표현하면

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{-\Omega_r^2 \beta_r^2 / K_r}{1 - \beta_r^2 + 2j\zeta_r \beta_r} + C + jD - \omega_i^2 (E + jF) \quad (14)$$

감쇠고유진동수  $\omega_{dr}$ 과 모드비  $\zeta_r$ , 진동하는 계전체를 지배하는 전체량이 되고 진동하는 장소나 응

답을 측정하는 장소를 이동하여도 원리적으로는 변화하지 않는 일정치가 된다. 이것에 대해 잉여항이 되는  $K_r, C, D, E, F$ 는 고유모드에 의해 결정되는 진동장소나 응답장소의 이동에 의해 변화하는 국부치가 된다. 또 전자는 식(14)의 분모에 있는 비선형항이 되는 것에 대해 후자는 분자에 있는 선형항이 된다. 전체항이 결정되면 미지수는 선형항만으로 되고 초기치를 필요로 하지 않고, 또 반복하지 않는 1회 계산에 의해 그것들을 직접 결정할 수 있다.

가속도응답 acceleration  $L(\omega)$ 는

$$L_i = A_{Rei} + jA_{Imi}$$

$$A_{Rei} = \sum_{r=1}^n \frac{-\Omega_r^2 \beta_{ri}^2 (1 - \beta_{ri}^2) / K_r}{(1 - \beta_{ri}^2)^2 + 4 \zeta_r^2 \beta_{ri}^2} + C - \omega_i^2 \cdot E$$

$$A_{Imi} = \sum_{r=1}^n \frac{2\zeta_r \Omega_r^2 \beta_{ri}^3 / K_r}{(1 - \beta_{ri}^2)^2 + 4 \zeta_r^2 \beta_{ri}^2} + D - \omega_i^2 \cdot F \quad (15)$$

오차 함수를 다음과 같이 두면

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \{ (L_{Rei} - A_{Rei})^2 + (L_{Imi} - A_{Imi})^2 \} \quad (16)$$

선형미지수로 미분하면,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial C} = \sum_{i=1}^m -2(L_{Rei} - A_{Rei}) = 0$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial D} = \sum_{i=1}^m -2(L_{Imi} - A_{Imi}) = 0$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial E} = \sum_{i=1}^m -2(L_{Rei} - A_{Rei}) \cdot \omega_i^2 = 0$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial F} = \sum_{i=1}^m -2(L_{Imi} - A_{Imi}) \cdot \omega_i^2 = 0$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial U_r} = \sum_{i=1}^m -2\{ (L_{Rei} - A_{Rei}) \cdot ZR_{ri} + (L_{Imi} - A_{Imi}) \cdot ZI_{ri} \} \quad (17)$$

여기서,

$$U_r = \frac{1}{K_r}$$

$$ZR_{ri} = \frac{\Omega_r^2 \beta_{ri}^2 \cdot (1 - \beta_{ri}^2)}{(1 - \beta_{ri}^2)^2 + 4 \zeta_r^2 \beta_{ri}^2}$$

$$ZI_{ri} = \frac{2\zeta_r \Omega_r^2 \beta_{ri}^3}{(1 - \beta_{ri}^2)^2 + 4 \zeta_r^2 \beta_{ri}^2}$$

식(16)을 전개하여 선형항을 결정한다.

## 4. 실험 및 프로그램의 구현

### 4.1 실험모델

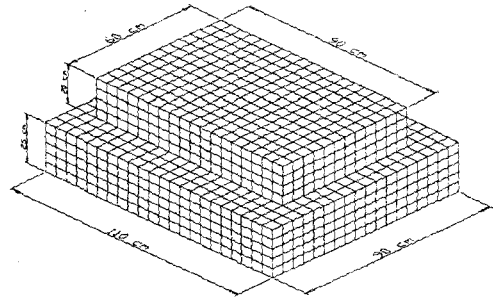


Fig. 1 Experimental Model of ship's Super-Structure

Fig. 1은 두께 3mm 강판 선체상부 구조물의 실험모델이다. 윗 판 중앙부를 충격망치로 가진하고, 5 cm 간격으로 각 면에서 가속도 전달함수를 계측하였다.

### 4.2 채용모드수와 전체항의 결정 및 곡선맞춤 흐름도

곡선맞춤에서는 사전에 채용모드수를 결정하여야 한다. 곡선맞춤의 첫 단계로서 고유진동수, 모드감쇠의 초기값을 결정해야 한다.

실험모델과 같이 비교적 큰 2단 상자형 구조물이며, 대칭형구조물의 경우 여러 곳에서 노드를 이루고 있다. 또한 여러 점이 큰 공진점 사이에서 공진점이 묻혀 피크점이 나타나지 않는다.

이와같은 경우 범용적인 도구로서 수치적 접근, 허부와 실부의 차이, 또는 위상의 변화등 최소자승법을 이용한 오차함수의 모드누락등의 판별로서 채용모드수의 결정 및 전체항의 초기치를 결정할 수 없다. 결국 해석자의 직관을 요하지만, 각각의

실험데이터를 그래픽적으로 표현하여 여러 점을 개관하면서 채용모드수를 결정하는 접근이 필요하게 된다. 실험점의 위치 및 갯수 등을 변화시키면서 여러점의 실험데이터를 겹쳐 도시하여, 공통 비선형항(고유진동수, 모드감쇠)의 개관을 통하여 채용모드수를 결정한다.

본 연구에서는 GUI 환경에 발 맞추어 프로그램을 개발하였고, 따라서 모든 작업이 화면상에서 마우스 조작과 간단한 키 입력으로 손쉽게 작업할 수 있게 하였다. 또한 각 점의 1회 곡선맞춤 결과를 비교하여 직관에 의한 오류를 배제키는 방법론적 접근을 필요하게 된다.

초기치의 결정에서도 외란에 의한 곡선의 일그러짐인지 또는 공진점에 묻힌 것인지 각 측정점을 반복하여, 실수부와 허수부의 데이터를 가시적으로 비교하며 특성항을 결정하여야 한다.

Fig.2는 Curve-Fitting 흐름도를 보여 주고 있다.

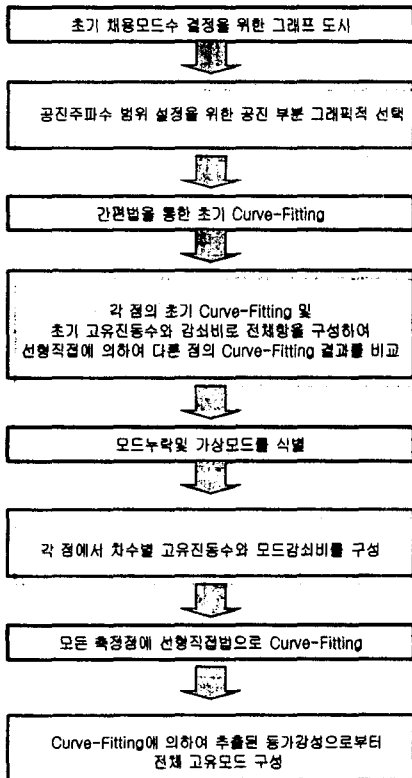


Fig. 2 Curve-Fitting flow-chart

Fig.3은 공진주파수와 공진점 선택 그림이다. Fig.4는 간편법에 의해 곡선맞춤된 자기점 가진 곡선이다. 공진점 선택에 의하여 1차 곡선맞춤으로도 좋은 결과를 얻고 있다.

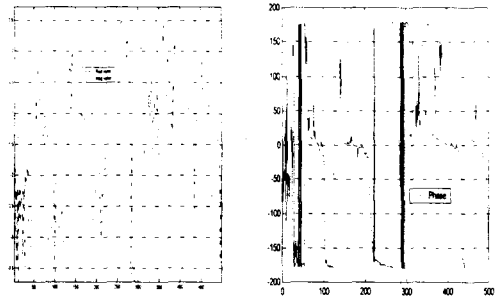


Fig. 3 Natural Frequency and Peak Point Divide

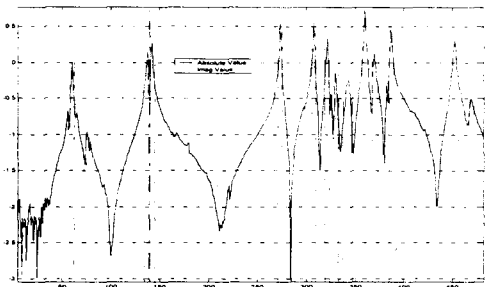


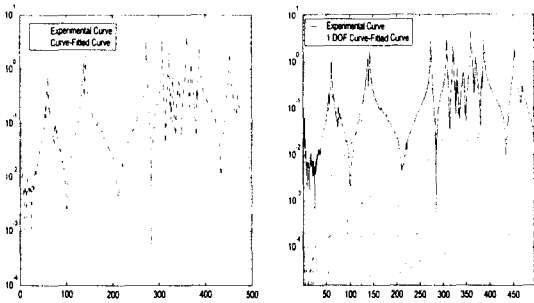
Fig. 4 Curve-Fitted through an easy Method

이상의 과정을 반복하여 여러점을 개관하여 채용모드수는 500Hz 범위내에서 34까지의 모드를 채용하였다. Table 1은 채용된 모드의 고유주파수와 그 주파수에서의 모드 감쇠비를 나타내고 있다.

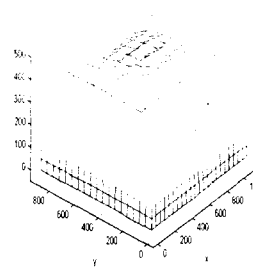
**Table 1** modal order and natural frequency, modal damping

모드 차수	고유 진동수	모드 감쇠비	모드 차수	고유 진동수	모드 감쇠비
1차	55.63	0.0134	18차	273.75	0.0015
2차	60.63	0.0145	19차	297.50	0.0016
3차	65.10	0.0401	20차	307.50	0.0015
4차	75.63	0.0114	21차	321.25	0.0018
5차	78.75	0.004	22차	325.63	0.0029
6차	95.00	0.0011	23차	330.00	0.0032
7차	137.50	0.0053	24차	343.75	0.0039
8차	141.88	0.0044	25차	360.00	0.0017
9차	156.29	0.0162	26차	369.38	0.003
10차	163.13	0.0038	27차	382.50	0.0015
11차	166.88	0.0036	28차	386.88	0.0017
12차	180.00	0.0037	29차	408.14	0.0056
13차	183.13	0.0033	30차	421.26	0.0066
14차	211.88	0.0039	31차	452.50	0.0027
15차	221.25	0.0017	32차	463.13	0.001
16차	225.00	0.0023	33차	469.38	0.0014
17차	245.63	0.0026	34차	473.75	0.0024

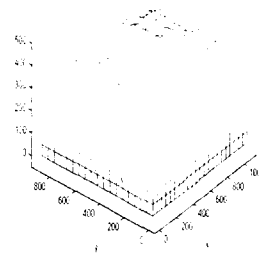
Fig. 5는 간편법에 의해 구해진 고유진동수와 모드 감쇠비를 전체항으로 하여, 34차항까지 채용하여 선형직접법에 의하여 곡선맞춤된 그림이다. 그림에서 나타나듯이 큰공진봉에 묻힌 자유도까지 정확하게 곡선맞춤되는 것을 보여 주고 있다.



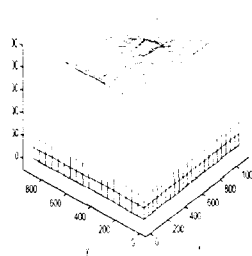
**Fig. 5** Curve-Fitted Curve and 1DOF Curve



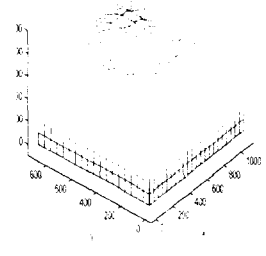
**Fig. 6** Mode Shape (60.63 Hz)



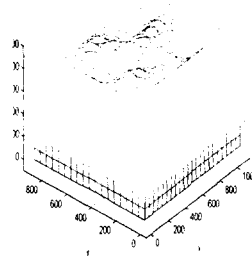
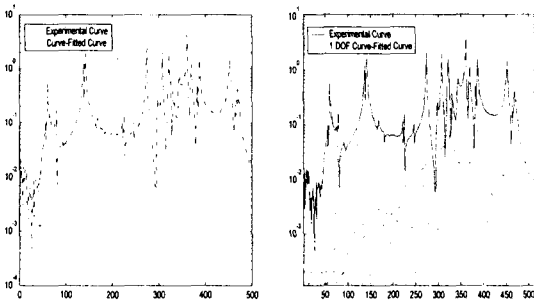
**Fig. 7** Mode Shape (78.75 Hz)



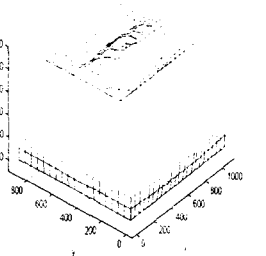
**Fig. 8** Mode Shape (137.50 Hz)



**Fig. 9** Mode Shape (141.88 Hz)



**Fig. 10** Mode Shape (297.50 Hz)



**Fig. 11** Mode Shape (307.50 Hz)

하게 하였다.

곡선맞춤은 초기치와 채용모드수의 결정에 따라 상이한 결과를 초래할 수 있으므로, 보다 간편하고 효과적으로 초기치 및 채용모드수를 결정할 수 있도록 프로그램 하였다. 하지만 해석 대상에 따라 여전히 해석자의 경험이나 직관이 필요로 할 것이다.

### 참 고 문 헌

- (1) 長松昭男, 1985, "모드解析", 培風館
- (2) Maja, Silva, He, Lieven, Lin, Skingle, To, Urgueira, "Theoretical and Experimental Modal Analysis", "MAIA SILVA"
- (3) D. J. Ewins, "Modal Testing Theory and Practice", "Brüel & Kjør Korea Ltd."
- (4) Ward Heylen, Stefan Lammens, Paul Sas "Modal Analysis Theory and Testing"

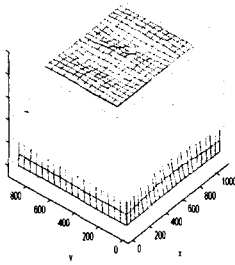


Fig. 12 Mode Shape  
(330.00 Hz)

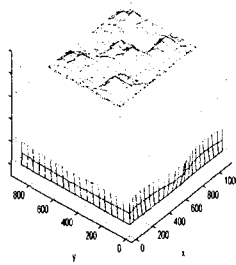


Fig. 13 Mode Shape  
(386.88 Hz)

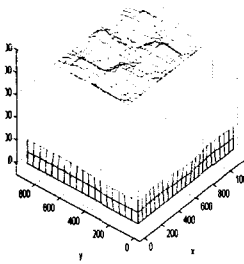


Fig. 14 Mode Shape  
(408.14 Hz)

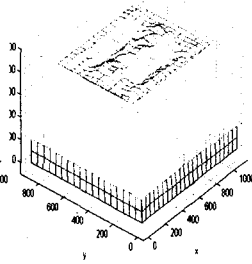


Fig. 15 Mode Shape  
(452.50 Hz)

Fig. 6 ~ 15는 각 고유진동수에서의 고유모드를 나타내고 있다. 그림에서 저차부터 중간, 고차까지 모든 채용모드내에서 정확한 모드형상의 고유진동형을 나타나는 것을 알 수 있다.

### 5. 결 론

GUI환경으로 곡선맞춤 프로그램을 개발하였고, 이를 2단 상자형 구조물에 적용한 결과, 다음과 같다.

- 1) 개발된 프로그램은 해석자가 간편한 조작으로 초기치를 선택·입력할 수 있었다.
- 2) 2단 상자형 구조물에 적용한 결과, 1회 반복계산만으로도 좋은 결과를 얻었다.
- 3) 여러 점에서 얻은 전달함수를 상호 비교할 수 있도록 프로그램하여, 채용모드 수의 결정을 용이