

# 전자력을 받는 외팔보의 비선형진동

최연선\* , 서경석\*\* , °우영주\*\*

## Nonlinear Vibration Analysis of Cantilever Beam Subject to Electromagnetic Force

Choi, Y. S, Seo, K. S, Woo, Y. J

**Key Words:** Nonlinear analysis, Magnetic force, Jump phenomenon, Air gap.

### ABSTRACT

The nonlinear vibration of a cantilever beam due to electromagnetic force is studied. The dynamic responses of the beam show various phenomena with the variation of the system parameters, such as jump phenomenon, multiple solutions and the change of the natural frequency. The nonlinear stiffness due to electromagnetic forces which depends on air gap size is measured experimentally. This system was modeled by a single degree of freedom nonlinear dynamic system and solved numerically for the system parameters. The numerical results show good agreements with the experimental observations, which demonstrates the nonlinearity of magnetic force.

### 1. 서론

전자력은 쉽게 발생시킬 수 있고, 제어가 가능하며 자기베어링 등의 능동진동제어 장치에 사용되고 있다. 그러나 실제 전자력을 이용한 기기의 설계단계에서는 이론해석보다 실험해석 결과를 중시하게 된다. 이는 전자력의 크기가 이론과는 다르게 제작 방법에 따라 달라지며, 전자력은 전자석과 물체 사이의 간극의 제곱에 반비례하는 비선형성이 있기 때문이다. 전자석에 의한 비선형성은 전자력에 의해 구동되는 기계계에 비선형 동적응답을 유발하는 바, 선형이론으로는 그 응답을 예측할 수 없다. 이에 본 연구에서는 전자력을 받는 외팔보 실험장치를 제작하여 전자력에 의한 비선형 동적응답을 실험으로 관찰하고 비선형운동방정식을 유도함으로써 전자력에 의한 비선형 효과를 검증하

고자 하였다.

전자력이 작동하면 대상 기계계의 고유진동수가 변화하거나<sup>[1]</sup>, 가진주파수 변화에 따라 모드형상이 변화하여 인력과 척력에 따라 동적응답이 달라짐은 이미 타 연구자들에 의해 관찰되었다<sup>[2]</sup>. 본 연구에서는 일정한 크기의 전자력이 작용하는 전자장내에 강철 외팔보를 가진기(exiter)로 가진한 상태에서 외팔보의 동적거동을 관찰하였다. 외팔보가 전자석에 의해 인력(attraction) 혹은 척력(repulsive)을 받을 때, 전자력에 의한 비선형 강성값을 유도하고, 이러한 비선형성에 의한 외팔보의 비선형응답을 규명하고자하였다. 이를 위해 전자력이 작용시, 전자석과 외팔보 사이의 간극의 변화에 따른 외팔보의 강성변화와 가진주파수의 증가와 감소에 따른 응답을 실험적으로 관찰하고 수치해석을 통하여 실험적으로 나타난 응답과 시스템의 비선형 운동방정식을 유도하여 비교, 검토하였다.

\* 성균관대학교 기계공학부, 교수  
\*\* 성균관대학교 기계공학과 대학원

## 2. 기반가진에 의한 외팔보의 진동

길이가 길고 두께가 얇은 보는 Euler-Bernoulli 보 이론을 적용할 수 있으며 감쇠를 무시한 운동 방정식은 식(1)과 같다.

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}] = f(x, t) \quad (1)$$

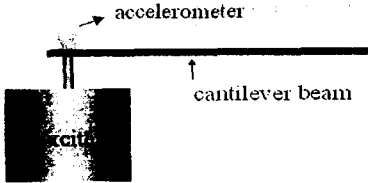


Fig. 1 Experimental setup

가진기로 가진되는 보의 운동은 보 자체의 운동과 가진기에 의한 운동의 합으로 나타나므로 보의 실제 응답은 다음과 같다.

$$w_{total}(x, t) = \sum \phi_i(x) u_i(t) + x_{base}(t) \quad (2)$$

여기서 모드형상함수  $\phi(x)$ 은 보가 fixed-free 의 경계조건을 갖는 경우로서 아래 식으로부터 계산된다.

$$\phi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x \quad (3)$$

또한, 가진기에 의한 운동은 단일 주파수 성분으로 가진된다면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$x_{base}(t) = -\frac{1}{\Omega^2} a_{base} \cos \Omega t \quad (4)$$

여기서  $\Omega$ 는 가진주파수를 나타내며  $a_{base}$ 는 가진기에 의한 기반진동의 가속도를 나타낸다. 가진주파수가 1차 고유주파수 영역에서만 작동하는 경우 식(2)에서 1차 모드만 고려하면 된다, 즉 식(2)을 식(1)에 대입하고 적분하면 기반 가진에 의한 외팔보 운동은 아래와 같은 1자유도계 운동방정식이 된다.

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n \dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = Q \cos \Omega t \quad (5)$$

여기서

$$Q = \frac{a_{base} \int_0^l \phi_1(x) dx}{\int_0^l \phi_1^2(x) dx}$$

## 3. 전자력의 영향을 받는 외팔보의 진동

### 3.1 실험장치

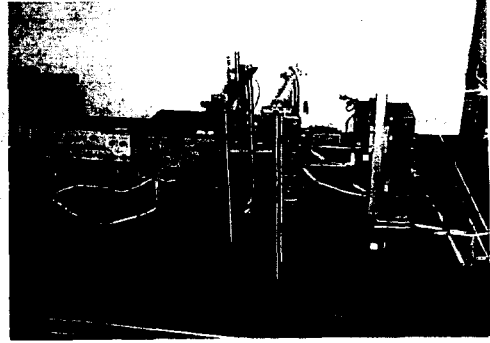


Fig. 2 Photo of the experimental setup

본 연구에 사용된 외팔보는 탄소강을 사용하였으며 재료상수와 규격은 Table 1과 같다.

Table 1 Dimensions of the beam

$l$ (length)	0.15m
$h$ (thickness)	$1 \times 10^{-3}m$
$b$ (width)	0.015m
$\rho$ (density)	$7.8 \times 10^{-5}kg/m^3$
$E$ (Young's modulus)	250 GPa

가진기(exciter)에 보의 한쪽 끝을 나사로 고정하여 외팔보 형태가 되도록 하였으며 자유단에 전자석을 설치하여 간극에 따라 전자석의 위치를 조정함으로써 전자력의 변화를 유도하였다.

보에 가해지는 가진력은 고정정보의 상단에 부착한 가속도계로 측정하고, 이에 대한 보의 응답은 변위센서(gap sensor)를 이용하여 측정하였다. 함수발생기(function generator)에서 나온 sin 함수를 Power amplifier을 통하여 증폭시킨 후, 가진기를 구동하도록 하였다. 가진주파수는 증가와 감소를 반복하면서 외팔보의 응답을 측정하였고, 또한 같은 조건에서 전자력이 인력인 경우와 척력인 경우에 대하여 각각 실험을 수행하였다.

### 3.2 시스템 매개변수

외팔보는 1자유도계로 모델링하고 충격실험을 통해 고유진동수와 감쇠비를 구했으며 정적하중과 변위관계로부터 스프링상수를 구하였다. 질량은 스프링 상수와 고유진동수를 이용하여 계산하였다.

Table 2 System parameters of the beam

고유진동수 ( $\omega_n$ )	35 (Hz)
감쇠비 ( $\xi$ )	0.0175
질량 ( $m$ )	0.0047 (kg)
댐핑상수 ( $c$ )	0.0181 (N·s/m)
스프링상수 ( $k$ )	228.7514 (N/m)

전자력이 있는 경우, 외팔보의 비선형 동적거동은 전자력의 비선형강성에 기인하는 바, 먼저 전자석과 외팔보 사이의 간극에 따른 전자력을 실험적으로 측정하였다.

이를 위해 먼저 외팔보의 끝단에 힘을 가했을 때 외팔보의 변형량을 실험적으로 측정하였다. 다음 전자석에 외팔보를 가까이하고 외팔보와 전자석 사이의 간극과 외팔보의 변형량을 측정하여 간극과 전자력의 관계를 구하였다. 이 실험을 통하여 구해진 간극과 전자력의 관계는 Fig. 3와 같고 곡선의 기울기는 전자력에 의한 강성을 나타낸다. 주어진 Fig. 3은 실험데이터를 바탕으로 Matlab program을 이용하여 polyfit한 결과이다.

간극의 크기 변화에 따른 전자력은 구해진 실험 데이터로부터 간극의 제곱에 반비례함을 알 수 있다. 그래프에서 x축은 일정한 간극내 외팔보의 운동에 따른 간극의 변화량을 나타내는 바, 이는 전자석에 의한 자기장의 영향이 무한대이고 전자력은 간극의 제곱에 반비례함을 알 수 있다.

$$F_m = 2.768 \times 10^{-5} \times \frac{1}{(0.015 - x)^2} \quad [N] \quad (6)$$

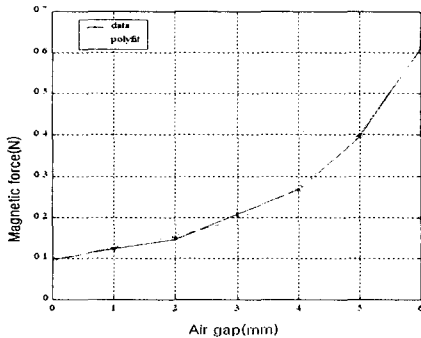


Fig. 3 Magnetic force vs. air gap

### 3.3 실험방법

외팔보의 1차 고유진동수는 35 Hz이고 2차 고유진동수는 180 Hz로 실험 구간인 20 Hz~40 Hz에서는 2차 모드의 영향을 받지 않는다. 따라서 본 실험장치는 1자유도계로 모델링할 수 있다. 실험구간 내에서 외팔보의 비선형 동특성을 분석하고, 전자력이 작용하지 않는 경우와 전자력이 작용하는 경우에 대해 각각의 진동레벨의 변화를 비교하기 위하여 외팔보의 끝단에 일정한 간극을 두고 상하 두 개의 전자석을 설치하였다.

전자석에 전류가 인가되는 방향에 따라 상하 두 개의 전자석간에는 척력(repulsive force)과 인력(attractive force)이 각각 나타날 수 있다. 따라서 두 가지 경우 각각에 대한 실험을 수행하기 위하여 먼저 상하 전자석이 각각 서로를 미는 경우에 대해 실험을 수행한 후, 아래쪽의 전자석에 작용하는 전류의 방향을 바꾸어서, 즉 전자석의 극이 위는 밀고 아래는 당기는 경우에 대해 다시 실험을 수행하였다.

### 3.4. 실험결과

Fig. 4에서 보는 바와 같이 전자력이 작용하면 고유진동수가 작아지며, 특히 척력인 경우보다 인력인 경우에 고유진동수는 더욱 감소한다. 원래의 고유진동수 35 Hz부터 척력이 작용하는 경우 고유진동수는 28.5 Hz로 감소하였으며, 인력이 작용하는 경우에는 28 Hz로 감소하였다. 진동레벨도 척력인 경우에 비해 인력인 경우가 더욱 감소하는 것을 알 수 있다. 상하 전자석은 같은 전류를 인가함으로써 같은 전자력을 갖도록 설계되었으나 척력인 경우와 인력인 경우, 외팔보의 진동레벨값이 각각 다르게 나타났다.

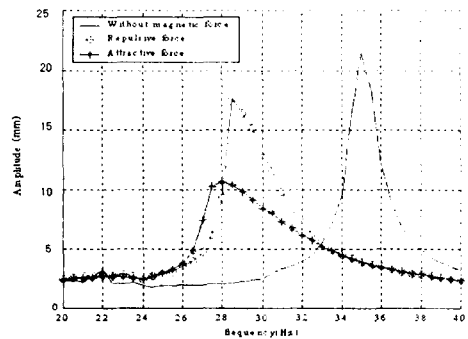


Fig. 4 Vibration levels with/without magnetic force

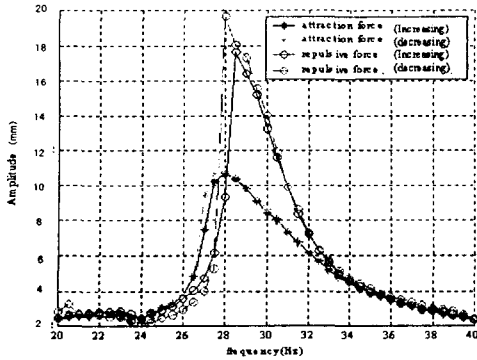


Fig. 5 Jump phenomenon due to electromagnetic force

Fig. 5는 함수발생기를 이용하여 가진주파수를 증가 혹은 감소시키면서 진동레벨을 측정 한 결과이다. Fig. 5에서 보는 바와 같이 공진영역에서 가속한 경우와 감속한 경우의 진동레벨이 달라지는 것을 알 수 있다. 즉 도약현상(jump phenomenon)이 발생한 것을 알 수 있다. 이 경우 도약현상은 연성스프링에 기인하는 경우로서 응답곡선이 저주파 방향으로 휘는 것을 볼 수 있다.

#### 4. 자기장내 외팔보 운동

같은 크기의 전자력을 발생하는 전자석 두 개가 Fig 6과 같이 일정한 간격을 가지고 작용하고 있고, 그 사이에 외팔보가 있는 경우, 두 개의 전자석이 각각 다른 극을 가지는 경우와 같은 극을 갖는 경우가 있다, 같은 극을 갖는 경우는 전자석 사이에 서로 미는 힘이 작용하여 자기장이 상하 대칭을 이루게되며 이를 척력이라 하자, 반대로 다른 극을 갖는 경우, 즉 두 개의 전자석 중 하나는 밀고 하나는 당기는 경우 자기장이 비대칭으로 작용하게되며 이를 인력이라 하자, 두 전자석 사이에 운동하는 보는 이러한 자기장의 영향을 받으며 Fig 6 과 같이 척력인 경우에는 외팔보가 전자석의 중심에서 운동하나, 인력일 때의 외팔보 운동은 중심에서 벗어나게 된다.

실험결과에서 보인 바와 같이 전자력은 진동레벨을 감소시킬 뿐만 아니라, 고유진동수의 변화를 가져오게 된다. 이를 이론적으로 해석하려면 전자력에 의한 강성 변화를 고려한 비선형 운동방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 실험 결과와 비교하여야 한다. 앞에서 유도한 외팔보의 1자유도 운동

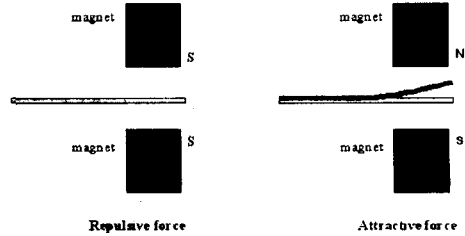


Fig. 6 Direction of magnetic force

방정식에 전자력에 의한 비선형 강성값을 더해 비선형 1자유도 운동방정식을 척력과 인력인 경우, 각각에 대해 구해보면 식(7)과 식(8)과 같이 된다. 이 때 척력은 전자력이 대칭인 경우로서 상하 두 개의 전자석의 힘이 같아 전원공급기의 전원이 전자석에 공급될 때 외팔보의 변위 변화가 없는 상태이며, 인력인 경우는 척력과 같은 조건에서 한쪽의 극을 바꾸어 외팔보의 변위 변화가 일어난 상태로 그때의 변위를 측정하여 상하 간극의 변화를 주어 방정식을 다시 나타내었다. 시스템 전체의 강성값은 인력과 척력의 각각의 경우 Fig. 7과 8과 같이 된다.

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = Q\cos\Omega t + \left\{ 2.768 \times 10^{-5} \times \frac{1}{(0.012 - u(t))^2} - 2.768 \times 10^{-5} \times \frac{1}{(0.012 + u(t))^2} \right\} / 0.00473 \quad (7)$$

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = Q\cos\Omega t + \left\{ 2.768 \times 10^{-5} \times \frac{1}{(0.012 - u(t))^2} - 2.768 \times 10^{-5} \times \frac{1}{(0.012 + u(t))^2} \right\} / 0.00473 + 0.61 / 0.00473 \quad (8)$$

비선형 강성스프링(hardening spring)을 갖는 시스템의 응답은 주파수 응답곡선이 오른쪽으로 굽어지게 되나, 본 연구에서와 같이 연성 강성(softening stiffness)을 갖는 경우에는 주파수의 응답곡선이 왼쪽으로 굽어지게 된다. 또한 다중해(multiple solutions)가 존재하게 되어, 어떤 구간에서는 주어진 하나의 가진 진동수에 대하여 가능한 응답이 하나 이상 존재하게 되며, 주어진 가진주파수에서의 응답은 초기조건에 따라 결정된다.

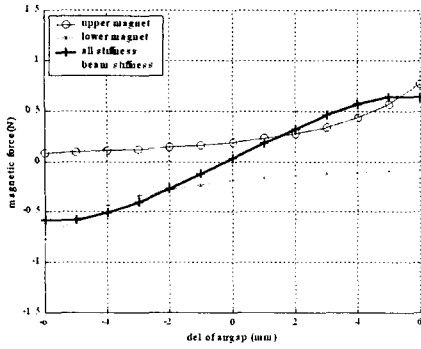


Fig. 7 Stiffness variation for repulsive case

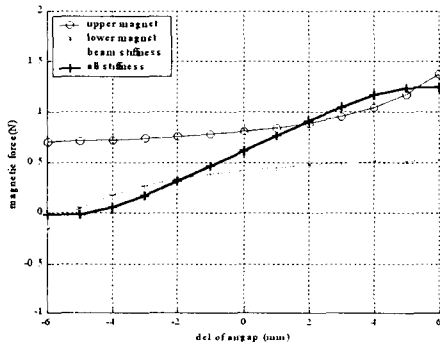


Fig. 8 Stiffness variation for attractive case

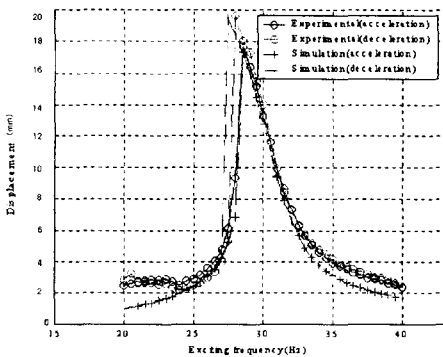


Fig. 9 Vibration levels for repulsive case

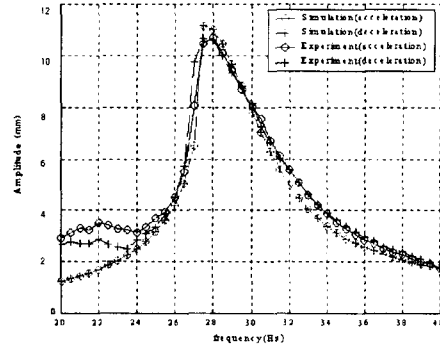


Fig. 10 Vibration levels for attractive case

식(7)과 (8)은 전자력이 외팔보의 변위의 제곱에 반비례하는 값을 갖는 비선형 운동방정식이 되었다. 이러한 비선형 운동방정식은 Runge-kutta법에 의해 수치해석 하였다. 그 결과 Fig. 9와 10에서 보는 바와 같이 수치해석 결과와 실험 결과가 잘 일치하고 있다. 즉 식(7)과 (8)은 전자력을 받는 외팔보 실험장치의 운동을 정확히 기술한 식임을 입증할 수 있었다. 중심선에 대한 외팔보의 운동과 기반진동에 의한 운동을 고려한 식으로 이 변위가 고유진동수 부분에서 가장 큰 변위를 갖게 되며 간극의 제곱에 반비례하는, 즉 전자력은 전자석과의 거리와 외팔보의 거리가 가까울수록 큰 힘을 받게 된다. 따라서 인력인 경우보다 척력인 경우에 시스템의 공진점을 기준으로 위상각이 급격히 변하므로 도약현상이 더욱 잘 나타남을 알 수 있다. 척력인 경우, 외팔보 양쪽의 전자력이 중심부에서 서로 상쇄되지만 인력인 경우 전자석 효과가 서로 더해지므로 척력인 경우가 인력인 경우에 비해 진동 레벨이 커짐을 알 수 있었다. 또한 고유진동수가 변화하는 것은 Fig. 7과 8에서 보인 바와 같이 전자석에 의한 시스템 강성이 외팔보만의 강성보다 작아짐을 알 수 있었다. Fig. 12는 간극의 크기를 조절하여 전자력의 크기를 다르게 할 때의 응답의 변화를 식(7)을 이용하여 계산한 결과이다. 간극이 작아질수록 급격한 강성의 변화로 도약현상이 더 확실히 발생되고 있음을 알 수 있다.

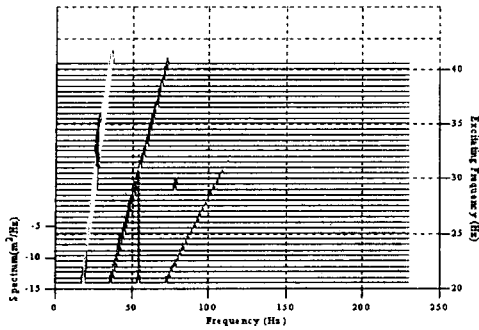


Fig. 11 Repulsive force at air gap of 12 mm

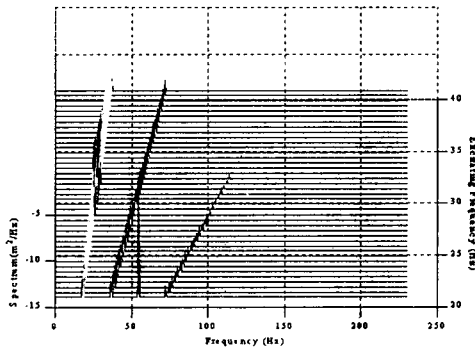


Fig. 12 Attractive force at air gap 12 mm

이러한 응답의 변화를 Fig. 11과 12에서와 같이 waterfall diagram으로 표시하면 1차 성분과 함께 2차와 4차 성분이 있음을 알 수 있다. 즉 제곱에 반비례하고 전자력으로 인하여 2차와 4차 성분이 나타남을 알 수 있었다.

## 5. 결론

본 연구에서는 자기장내에서 운동하는 외팔보의 비선형 동적응답을 살펴 보았다. 이를 위해 전자장에서 외팔보 가진 실험장치를 구성하고, 외팔보와 전자석의 설계변수를 실험으로 측정하고, 가진 실험을 수행하였다. 또한 측정된 설계변수를 이용하여 시스템을 1자유도 비선형시스템으로 모델링하여 수치해석을 수행하고, 실험결과와 비교, 분석하였다. 이를 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 두 개의 전자석에 자극을 같이하거나 혹은 서

로 다르게 하여 실험한 결과 응답이 각각 다르게 나타나는 것을 확인 할 수 있었다. 이는 전자력의 효과가 상쇄되거나 증폭됨으로서 전자력에 의한 시스템 강성이 변화하는데 기인함을 알 수 있었다.

(2) 전자력은 간극변화에 따른 비선형 강성을 갖게 되며 이는 외팔보의 실제 강성을 작게하는 효과가 있어 외팔보의 고유진동수를 감소시키는 결과를 초래하였다.

(3) 전자력이 변위의 제곱에 반비례하고, 비선형 강성을 유발함으로써 외팔보의 응답은 1차 성분과 함께 2차, 4차 성분이 유도됨을 확인할 수 있었다.

(4) 자기장내 외팔보의 동적응답에 도약현상이 존재함을 보여줌으로서, 전자력이 있는 경우, 주어진 하나의 가진진동수에서 2개 이상의 응답이 존재함을 확인할 수 있었다.

## 후기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(2000 - 2 - 30200-004-3) 지원으로 수행되었음.

## 참고문헌

- [1] T. Takagi, J. Tani, P. Ruatto, B. Krevet, L. V. Boccaccini, "Numerical Evaluation of Natural Frequency Change of a Ferromagnetic Plate due to Magnetic Stiffness Effect," IEEE TRANSACTION ON MAGNETICS, VOL. 32, NO. 3, MAY, 1996.
- [2] T. Takagi, J. Tani, S. Matsuda, and S. Kawamura, "Analysis and Experiment of Dynamic Deflection of a Thin Plate with a Coupling Effect," IEEE TRANSACTION ON MAGNETICS, VOL. 28, NO. 2, MARCH, 1992.
- [3] K. Fujisaki, T. Ueyama, K. Wajima, "Electromagnets Applied to Thin Steel Plate," IEEE TRANSACTION ON MAGNETICS, VOL. 32 NO. 5, SEPTEMBER, 1996.
- [4] S. C. Chang and P. C. Tung, "Identification of A Non-linear Electromagnetic System : An Experimental Study," Journal of Sound and Vibration, 214(5), pp. 853-871, 1998.
- [5] J. Levine, J. Lottin, and J. C. Ponsart, "A Nonlinear Approach to the Control of Magnetic Bearing," IEEE Transactions on Control Systems Technology, VOL. 4, No. 5, September, pp. 524-544, 1996.