

비대칭 보의 굽힘-비틀림 연성 진동 해석

°강병식*, 홍성욱**, 박중윤**, 조용주*

Dynamic analysis of bending-torsion coupled vibration of non-symmetric beam

Kang, B.S.*, Hong, S.W.** and Park, J.Y.**, Cho, Y.J.

Keywords: Exact dynamic elements(엄밀한 동적 요소), Bending-torsion coupled vibration(굽힘 비틀림 연성 진동), Dynamic analysis(동적 해석), Asymmetric beam(비대칭 보), Shear center(전단중심)

ABSTRACT

Asymmetric beams cause complicated vibration phenomena due to the inherent bending-torsion coupled vibration. In this paper, an exact dynamic element matrix for the bending-torsion coupled vibration of asymmetric beam is derived. An application of the derived exact dynamic element matrix is demonstrated by an illustrative example, wherein the natural frequencies by the proposed modeling method are compared with those available in the literature. Another numerical example is also illustrated which deals with a general beam with joints. The numerical study shows that the exact dynamic element model is useful for the dynamic analysis of asymmetric bending-torsion coupled beams.

1. 서론

근래, 동강성 행렬(Dynamic stiffness matrix)을 이용한 보요소의 굽힘-비틀림 연성 진동에 대한 연구가 많은 연구자에 의해 활발하게 진행되어 왔다.⁽¹⁻⁴⁾ 특히, 보 구조물이 대체로 균일한 부재들의 조합으로 구성된다는 측면을 고려할 때, 동강성 행렬을 이용한 해석 방법이 기존의 유한요소해석법 등에 비해 유리한 측면이 있을 것으로 기대되면서 보의 해석에 필요한 대부분의 항을 포함시킨 동적 모델로 발전되어 왔다. 그러나 기존의 동강성 행렬 방법에서는 식의 유도 과정에서 비감쇠계를 전제로 하였고, 단순한 구조물을 해석 대상으로 설정하여 왔기 때문에 실제 구조물이 가질 수 있는 감쇠나 결합부, 기타 집중요소를 포함하고

있는 일반적인 구조물에 대한 특성에 대해서는 논의되지 않았다.

본 연구에서는 최근 일반적인 보 요소 및 관련 요소들로 이루어진 구조물에 대해 그 타당성이 입증된 엄밀한 동적 요소 행렬(Exact dynamic element matrix)^(5,6)을 이용한 굽힘-비틀림 연성 진동 모델링 및 해석 방법을 제안하였다. 굽힘과 비틀림 연성을 고려할 경우에는 단순 보 요소에 비교할 때 더 많은 변수들이 개입되므로 순수한 해석적 접근에는 한계가 있게 된다. 이 문제점을 해결하기 위해 본 연구에서는 엄밀한 동적 요소 유도 과정과 변수의 일부를 계산 알고리즘에 의존하는 방식을 제안하였다. 이 방법은 부재의 내부 감쇠나 결합부 등에서 발생하는 강성 및 감쇠, 기타 부재의 특정 부위에 집중되는 질량체 등의 집중요소를 포함한 일반적인 모델링을 허용하므로 실제적인 문제에 유용하게 활용할 수 있을 것으로 기대를 모으고 있다. 제안된 방법의 검증을 위해 기존의 문헌에

* 금오공과대학교 대학원

** 금오공과대학교 기계공학부

서 취급하였던 예제를 중심으로 기존 방법과 비교하였다.

2. 굽힘-비틀림 연성 보의 동적 모델링

2.1 운동방정식

Fig. 1에 비대칭 단면을 갖는 보의 한 예를 보이고 있으며 모델링에 사용된 좌표계를 같이 나타내었다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 탄성중심축에 X축을 일치시켰다. 질량중심축(도심축)과 탄성중심축(전단중심축)의 차이에 의해 탄성중심축에서의 수직방향 진동(h)과 비틀림진동(ψ)에 관한 연성이 발생하게 된다. 이상과 같이 주어진 시스템에 대해 공간좌표에 관한 상태공간 형식으로 운동방정식을 쓰면 다음과 같이 6개의 방정식으로 표현할 수 있다.⁽¹⁾

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \theta - \frac{F}{kAG} \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{M}{EI} \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{T}{GJ} \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -m \left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - y_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = F + \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -m y_a \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + I_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1-6)$$

여기서 m 은 보의 단위 길이당 질량, F 는 전단력, y_a 는 도심으로부터 전단중심까지의 거리를 의미한다. 또, M 은 굽힘모멘트, ρ 는 재료의 밀도, EI 는 굽힘강성, kAG 는 전단강성이다. 그리고 T 는 비틀림모멘트, GJ 는 비틀림강성, I_a 는 단위길이당 극관성모멘트를 의미한다. 식(1-1)~(1-6)에서 알 수 있는 바와 같이 일반적으로 비대칭 단면을 갖는 보의 관성항에서 연성이 발생하게 된다.

2.2 엄밀한 동적 요소 행렬의 유도

식(1-1)~(1-6)을 시간에 대해 라플라스 변환하여 정리하면 다음과 같은 행렬 형태의 식을 얻게 된다.

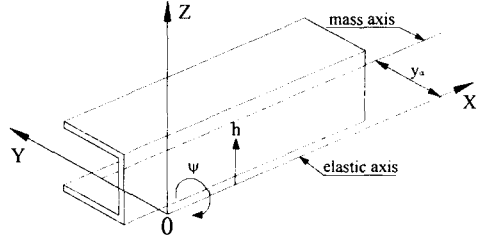


Fig.1 Coordinate system for an asymmetric beam

$$\frac{\partial \Psi^*(x, s)}{\partial x} = B(s) \Psi^*(x, s) \quad (2)$$

여기서,

$$\Psi^*(x, s) = [h^* \quad \theta^* \quad \psi^* \quad F^* \quad M^* \quad T^*]^T$$

$$B(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ -d & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -g & 0 & h & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

또,

$$a = \frac{1}{kAG}, b = \frac{1}{EI}, c = \frac{1}{GJ}, d = ms^2, \\ e = m y_a s^2, f = \rho I s^2, g = m y_a s^2, n = I_a s^2$$

로 정의되며, s 는 시간에 관한 라플라스 변수, 상첨자 *는 해당 변수의 라플라스 변환 결과식이다. 식(2)를 다시 공간 좌표 x 에 대하여 라플라스 변환하면 다음 식과 같다.

$$\widetilde{\Psi}^*(\lambda, s) = [\lambda I - B]^{-1} \Psi^*(0, s) \quad (3)$$

여기서, λ 는 공간 좌표에 관한 라플라스 변수이며, (\sim)는 공간 좌표에 대한 라플라스 변환 결과물의 미한다.

엄밀한 동적 요소를 유도하기 위해서는 식(3)의 $[\lambda I - B]^{-1}$ 에 관한 해석적인 표현이 필요하다. 이를 위해 수반행렬(Adjoint matrix)과 행렬식(Determinant)을 이용하여 계산하는 방식을 채택하였다. $[\lambda I - B]$ 의 행렬식을 다음과 같이 정의하도록 한다.

$$\det[\lambda I - B] = (\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 - \beta^2)(\lambda^2 - \gamma^2) \quad (4)$$

이 때, $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 는 행렬식을 전개하여 얻어지는 다항식의 해를 구하여 얻을 수 있다.

식(3)에서 $[\lambda I - B]$ 에 대한 수반행렬과 행렬식을 이용하여 역행렬에 대한 해석적인 식을 구한 후 공간 좌표에 대해 라플라스 역변환하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\bar{\Psi}^*(x, s) = C(x, s) \bar{\Psi}^*(0, s) \quad (5)$$

식(5)에 Fig.2와 같이 경계값을 부가하고 변수를 재배치하면 결국 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\begin{Bmatrix} F_1^* \\ M_1^* \\ T_1^* \\ F(\xi)^* \\ M(\xi)^* \\ T(\xi)^* \end{Bmatrix} = D^e(s, \xi) \begin{Bmatrix} h_1^* \\ \theta_1^* \\ \phi_1^* \\ h(\xi)^* \\ \theta(\xi)^* \\ \psi(\xi)^* \end{Bmatrix} \quad (6)$$

최종적으로 얻어진 식(6)의 엄밀한 동적 요소 행렬 $D^e(s, \xi)$ 는 대칭이 되며 부록에 첨부하였다.

식(6)을 길이 l 인 균일 보 요소에 대해 적용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1^* \\ M_1^* \\ T_1^* \\ F_2^* \\ M_2^* \\ T_2^* \end{Bmatrix} = D^e(s, l) \begin{Bmatrix} h_1^* \\ \theta_1^* \\ \phi_1^* \\ h_2^* \\ \theta_2^* \\ \psi_2^* \end{Bmatrix} \quad (7)$$

이상에서 설명한 주어진 임의의 균일 보에 대한 엄밀한 동적 요소 행렬의 실제적인 구성과정을 설명하면 다음과 같다.

- ① 해당 요소에 관련된 제반 물리적 변수에 대한 데이터를 입력.
- ② 식(2)에 정의된 변수($a-h$) 계산.
- ③ $\det[\lambda I - B] = (\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 - \beta^2)(\lambda^2 - \gamma^2) = 0$ 을 만족하는 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 결정.
- ④ 부록에 주어진 엄밀한 동적 요소 행렬의 각 요소별로 앞에서 구해진 변수 대입.

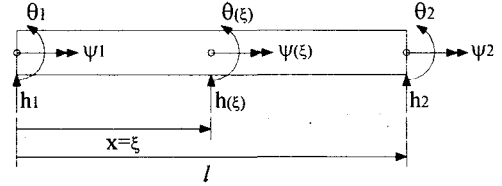


Fig.2 Sign conventions for nodal variables

2.3 시스템 행렬의 구성 및 고유치 문제

일반적인 보 구조물은 보와 보 사이의 결합을 위해 결합부(Joint)가 있게 되며 자체적인 기능적 특성에 의해 여러 가지 집중 질량체를 포함할 수도 있다. 결합부나 집중 질량체 등의 국부 요소들도 구조물의 해당되는 위치에 절점을 설정하고 해당 절점의 위치에 요소행렬을 중첩함으로써 모델링에 손쉽게 포함시킬 수 있다⁽¹¹⁾.

모델링하고자 하는 일반적인 형상의 대칭/비대칭 보 구조물을 요소로 구분한 후 식(7)과 집중 요소에 관한 요소 행렬⁽¹¹⁾을 이용하여 개별 요소에 대한 행렬을 얻어 이를 조합함으로써 다음 식을 얻을 수 있다.

$$F^*(s) = D(s) Q^*(s) \quad (8)$$

여기서, Q^* 는 전역 변위 좌표 벡터의 라플라스 변환이며 F^* 는 이 좌표에 대응되는 힘벡터의 라플라스 변환이다. 식(8)은 주어진 시스템에 대한 라플라스 영역에서의 운동방정식을 나타내게 되며 $D(s)$ 는 시스템 동특성 행렬을 의미하게 된다.

식(8)로 표현된 동특성 행렬은 초월함수로 표현되므로 기존의 고유치 해법을 활용할 수가 없고, 고유치를 결정하기 위해 일반적인 방정식 해법을 사용할 필요가 있으며, 초기치 결정을 위해 주파수 응답 해석이 선행되어야 한다.

전달함수 행렬은 식(8)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H(s) = D^{-1}(s) \quad (9)$$

식(9)를 이용하여 s 영역에서의 전달 함수를 구할 수 있고, 주파수 응답 행렬은 전달 함수 행렬에

$s=j\omega$ 를 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H(j\omega) = D^{-1}(j\omega) \quad (10)$$

식(10)으로부터 주파수 응답 행렬의 계산을 위해 동특성 행렬에 $s=j\omega$ 를 대입하여 얻어지는 동강성 행렬에 대해 주파수를 변경시키면서 역행렬을 반복적으로 계산하는 직접 계산법을 활용하였다.

식(8)로부터 주어진 시스템에 대한 고유치 문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D(s) Q^*(s) = 0 \quad (11)$$

고유치는 $D(s)$ 에 대한 행렬식이 0이 된다는 조건식으로부터 구할 수 있으며, 계산된 고유치를 식(11)에 대입하여 고유벡터를 구할 수 있고, 또한 모드형상을 구할 수 있다. 고유벡터를 이용해서 엄밀한 고유함수도 구할 수 있다.

3. 수치예제

여기서는 두 가지의 예제를 취급하였다. 먼저, 제안된 방법의 검증을 위하여 참고문헌^(5,7)에서 다루어졌던 예제를 중심으로 고유진동수를 계산하여 비교한다. 또한 제안된 방법의 응용성을 보이기 위해 기존의 문헌에서 다루지 않았던 새로운 형태의 보 구조물을 두 번 째 예제에서 다루었다.

3.1 예제 1 : 열린 상자 형 보

제안된 방법의 검증을 위해 참고문헌⁽²⁾에서 취급하였던 예제를 먼저 살펴보도록 한다. 그 구조를 Fig. 3에 보여주고 있다. 한쪽면이 열려 있는 상자 형 보로서 한쪽 단은 고정(Clamped)되었으며 다른 한쪽 단은 자유 상태이다. 자세한 사양은 Table 1과 같다. Table 2에서는 대상 시스템에 대해 제안된 방법으로 계산된 고유진동수와 참고문헌에서 제시한 고유진동수를 비교해 보여주고 있다. 유효자리수의 차이로 인해 더 엄밀한 비교를 할 수 없지만 제안된 방법에 의한 결과와 동일한 결과를 얻고 있음을 알 수 있다. 따라서 제안된 엄밀한 동적 요소 행렬이 적절함을 확인할 수 있다.

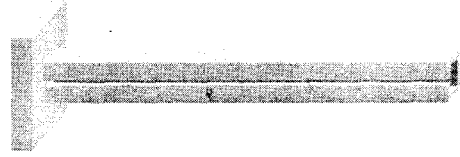


Fig. 3 Numerical model 1 : Open box beam

Table 1 Specifications of numerical model 1

Property	Data
length, m	5
width, m	0.076
height, m	0.076
thickness(t), m	0.003
EI, Nm ²	5.80×10^4
GJ, Nm ²	78.3
m, kg/m	2.45
I _o , kgm	0.02
y _o , m	0.08

Table 2 Comparison of natural frequencies from reference [2] and the proposed method.

Natural Frequencies (Hz)		
Mode	Reference[2]	Proposed method
1	2.41	2.4062
2	7.16	7.1593
3	11.83	11.8279
4	14.95	14.9509
5	21.55	21.5489

3.2 예제 2: 일반적인 보 구조물

본 예제에서는 기존의 문헌에서 취급하지 않았던 일반적인 보 구조물을 통해 제안된 방법의 응용성을 보이고자 하였다. Fig. 4에는 예제에서 다루고 있는 구조물을 보여주고 있다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 보의 중간 부분이 상자 형 단면을 갖고 나머지는 채널 형인 보 구조물이며 좌측과 우측단은 각각 고정, 자유단이며 부재의 불연속점에 스프링과 감쇠를 갖는 집중 요소가 지지하고 있는 형태이다. 본 예제에서도 3개의 요소로 모델링하였으며 각 요소에 관련된 매개변수들은 Table 4에 자세히 기술하였다.

Table 5에는 본 구조물에서 집중 감쇠값이 변경될 때의 고유치를 비교해서 보여주고 있다. 기존

의 동강성 행렬법이 비감쇠에 국한된 문제를 중심으로 논의된 것과는 달리 본 연구에서는 감쇠를 가진 집중요소를 포함한 일반적인 경우에도 시스템의 고유치를 구할 수 있음을 보이고 있다. 결과에서 쉽게 파악할 수 있는 바와 같이 집중 감쇠의 증가가 고유치 실수부를 변화시키고 있으며 5차모드에서 실수부의 값이 특히 큰 것을 알 수 있다. 이는 해당모드의 모드형상과 관련을 갖게 된다. Fig. 5는 집중 감쇠를 고려하지 않은 경우($c=0$)에 대해 첫 번째 고유모드를 보여주고 있다. 그림으로부터 1차모드는 비틀림이 두드러지는 것을 볼 수 있는데, 본 예제에서 고려하고 있는 구조물은 비틀림 강성이 취약하여 저차모드에서 전반적으로 비틀림이 증가되며, 이 때는 수직변위감쇠가 큰 영향을 주지 못함을 확인할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 비대칭 단면을 갖는 보의 굽힘-비틀림 연성 진동 해석을 위해 엄밀한 동적 요소로 모델링하고 해석하는 방법을 제안하였다. 이를 위해 요소당 4자유도를 갖는 기존의 단순 보에 대해 개발하였던 엄밀한 동적 요소 행렬 유도 과정을 6자유도를 갖는 연성 진동 보에 적용할 수 있도록 개편하였다. 해석적인 과정에만 의존하였던 엄밀한 동적 요소 행렬 관련식을 부분적으로 수치 계산에 의존함으로써 유도과정의 복잡성을 회피하였다. 2개의 수치예제를 통해 제안된 방법의 타당성을 검증하였으나 1개의 추가예제를 통해 기존의 문헌에서 취급되지 않았던 일반적인 문제에 제안된 방법을 적용하였다. 수치예제를 통해 제안된 방법이 일반적인 보 구조물의 해석에 유용하게 활용될 수 있음을 확인하였다.

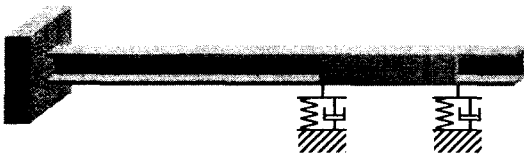
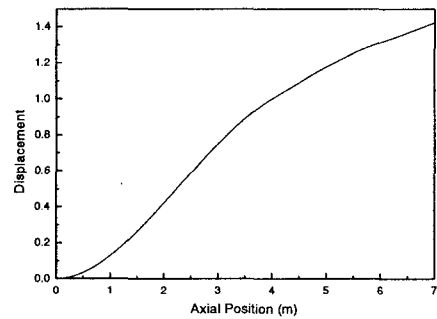


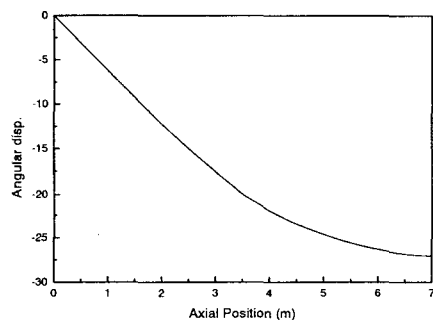
Fig. 4 Numerical model 2: a general beam structure

Table 4 Specifications of numerical model 2

Property	#1	#2	#3
length, m	4	2	1
width(b), m	0.09	0.09	0.09
height(d),m	0.16	0.16	0.16
thickness(t), m	0.007	0.007	0.007
EI, Nm ² (×10 ⁶)	1.8021	2.1579	1.8021
GJ, Nm ² (×10 ³)	3.1726	4.1014	3.1726
m, kg/m	17.96	26.00	17.96
joint damping, Ns/m (2 identical)	0/20/1000		
joint stiffness, MN/m (2 identical)	2		
I _a , kgm	0.0867	0.1211	0.0867
y _a , m	0.05632	0	0.05632



(a) bending mode shape of the first mode



(b) torsional mode shape of the first mode

Fig. 5 Mode shapes of the first mode for numerical model

Table 5 Comparison of eigenvalues with the joint damping varied for numerical model 2

eigenvalue ($\sigma_k + j\omega_k$ rad/s)			
- σ_k/ω_k			
Mode	c=0 Ns/m	c=20 Ns/m	c=1000 Ns/m
1	0.000000/ 5.704251	0.000794/ 5.704251	0.039704/ 5.704303
2	0.000000/ 8.389381	0.003156/ 8.389382	0.157799/ 8.389635
3	0.000000/ 19.218267	0.006774/ 19.218270	0.338372/ 19.224855
4	0.000000/ 32.646829	0.009777/ 32.646831	0.486617/ 32.651903
5	0.000000/ 47.706620	0.067510/ 47.706459	4.591260/ 47.503232

후기

이 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2000-041-E00062)

참고문헌

1. Bishop, R.E.D., Cannon, S.M. and Miao, S., "On coupled bending and torsional vibration of uniform beams," Journal of Sound and Vibration, Vol.131, pp.457-464, 1989.
2. Banerjee, J. R., "Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements," Internation Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp.1283-1298, 1989.
3. Banerjee, J. R. and Williams, F. W., "Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for Timoshenko beam elements," Computers & Structures, Vol. 42, No. 3, pp.573-585, 1992.
4. Banerjee, J.R. and Williams, F.W., "Clamped-clamped natural frequencies of a bending-torsion coupled beam," Journal of Sound and Vibration, Vol.176, No.3, pp.301- 306, 1994.
5. 김종욱, 홍성욱, 엄밀한 동적 요소를 이용한 프레임 구조물의 모델링 및 모드 해석, 한국소음진동공학회지, Vol.9, No.5, pp.966-974, 1999.
6. Hong, S.W. and Kim, J.W., "Modal analysis of multi-span Timoshenko beams connected or supported by resilient joints with damping," Journal of Sound and Vibration, Vol.227, No.4, pp.787-805, 1999.

부 록: 엄밀한 동적 요소 행렬

$$D^e(s, \xi) = \begin{bmatrix} D_{11}^e & D_{12}^e \\ D_{21}^e & D_{22}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{12}^{-1}C_{11} & C_{12}^{-1} \\ C_{21} - C_{22}C_{12}^{-1}C_{11} & C_{22}C_{12}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad C_{12} = \begin{bmatrix} c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{34} & c_{35} & c_{36} \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} \end{bmatrix} \quad C_{22} = \begin{bmatrix} c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= q_5 - (bf + cn)*q_3 + bcfm*q_1 \\ c_{12} &= -q_4 + cn*q_2 \\ c_{13} &= -ae*q_3 + (abef + be)*q_1 \\ c_{14} &= -a*q_4 + (abf + acn + b)*q_2 - (abcfm + bcn)*q_0 \\ c_{15} &= b*q_3 - bcn*q_1 \\ c_{16} &= ace*q_2 - (abcef + bce)*q_0 \\ c_{21} &= bd*q_2 - (bcdn - bceg)*q_0 \\ c_{22} &= q_5 - (ad + cn)*q_3 + (acdn - aceg)*q_1 \\ c_{23} &= -be*q_2 \\ c_{24} &= -b*q_3 + bcn*q_1 \\ c_{25} &= -b*q_4 + (abd + bcn)*q_2 - (abcdn - abceg)*q_0 \\ c_{26} &= bce*q_1 \\ c_{31} &= -cg*q_3 + bcfg*q_1 \\ c_{32} &= cg*q_2 \\ c_{33} &= q_5 - (ad + bf)*q_3 + (abdf + bd)*q_1 \\ c_{34} &= acg*q_2 - (abcfg + bcg)*q_0 \\ c_{35} &= -bcg*q_1 \\ c_{36} &= -c*q_4 + (acd + bcf)*q_2 - (abcdf + bcd)*q_0 \\ c_{41} &= d*q_4 - (bdf + cdn - ceg)*q_2 - (bcefg - bcdfm)*q_0 \\ c_{42} &= -d*q_3 + (cdn - ceg)*q_1 \\ c_{43} &= -e*q_4 + bef*q_2 \\ c_{44} &= -q_5 + (bf + cn)*q_3 - bcfm*q_1 \\ c_{45} &= bd*q_2 - (bcdn - bceg)*q_0 \\ c_{46} &= ce*q_3 - bcef*q_1 \\ c_{51} &= d*q_3 - (cdn - ceg)*q_1 \\ c_{52} &= f*q_4 - (adf + cfn + d)*q_2 + (acdfn - acefg + cdn - ceg)*q_0 \\ c_{53} &= -e*q_3 \\ c_{54} &= -q_4 + cn*q_2 \\ c_{55} &= -q_5 + (ad + cn)*q_3 - (acdn - aceg)*q_1 \\ c_{56} &= ce*q_2 \\ c_{61} &= -g*q_4 + bfg*q_2 \\ c_{62} &= g*q_3 \\ c_{63} &= n*q_4 + (aeg - adn - bfn)*q_2 + (abdfn - abefg + bdn - beg)*q_0 \\ c_{64} &= ag*q_3 - (abfg + bg)*q_1 \\ c_{65} &= -bg*q_2 \\ c_{66} &= -q_5 + (ad + bf)*q_3 - (abdf + bd)*q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= -\{ (\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \alpha^2) \}^{-1} \\ q_0 &= \Delta \{ \alpha^{-1}(\beta^2 - \gamma^2) \sinh \alpha \xi + \beta^{-1}(\gamma^2 - \alpha^2) \sinh \beta \xi \\ &\quad + \gamma^{-1}(\alpha^2 - \beta^2) \sinh \gamma \xi \} \\ q_1 &= \Delta \{ (\beta^2 - \gamma^2) \cosh \alpha \xi + (\gamma^2 - \alpha^2) \cosh \beta \xi \\ &\quad + (\alpha^2 - \beta^2) \cosh \gamma \xi \} \\ q_2 &= \Delta \{ \alpha(\beta^2 - \gamma^2) \sinh \alpha \xi + \beta(\gamma^2 - \alpha^2) \sinh \beta \xi \\ &\quad + \gamma(\alpha^2 - \beta^2) \sinh \gamma \xi \} \\ q_3 &= \Delta \{ \alpha^2(\beta^2 - \gamma^2) \cosh \alpha \xi + \beta^2(\gamma^2 - \alpha^2) \cosh \beta \xi \\ &\quad + \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2) \cosh \gamma \xi \} \\ q_4 &= \Delta \{ \alpha^3(\beta^2 - \gamma^2) \sinh \alpha \xi + \beta^3(\gamma^2 - \alpha^2) \sinh \beta \xi \\ &\quad + \gamma^3(\alpha^2 - \beta^2) \sinh \gamma \xi \} \\ q_5 &= \Delta \{ \alpha^4(\beta^2 - \gamma^2) \cosh \alpha \xi + \beta^4(\gamma^2 - \alpha^2) \cosh \beta \xi \\ &\quad + \gamma^4(\alpha^2 - \beta^2) \cosh \gamma \xi \} \end{aligned}$$