

# 같은 유체로 연성된 두 원판의 고유진동 해석

°\*정 경훈, \*박 근배, \*\*장 문희 \*\*\*정 명조

## Free Vibration Analysis of Two Circular Plates Coupled with Bounded Fluid

°Kyeong-Hoon Jeong\*, Keun-Bae Park\*, Moon-Hee Chang, Myung-Jo Jhung\*\*

### ABSTRACT

This paper deals with the free vibration of two identical circular plates coupled with a bounded fluid. An analytical method based on the finite Fourier-Bessel series expansion and Rayleigh-Ritz method is suggested. In the theory, it is assumed that the ideal fluid is filled in a rigid cylindrical container and the two plates are clamped along the plate edges. The proposed method is verified by the finite element analysis using commercial software with a good accuracy. Two transverse vibration modes, namely in-phase and out-of-phase, are observed alternately in the fluid-coupled system when the number of nodal circles increases for the fixed nodal diameter. The effect of gap between the plates on the fluid-coupled natural frequency is also investigated.

### 1.0 서론

유체와 접촉하는 구조물은 공기중의 고유진동수보다 유체로 인한 부가질량의 증가로 접수구조물의 고유진동수는 상당히 감소하게 된다. 이러한 유체-구조물간의 상호 간섭문제는 많은 연구자들이 연구해 오고 있다. 최근에는 이러한 문제에 유한요소법과 경계요소법과 같은 강력한 수치해석적인 방법들이 제안되고 사용되지만 이러한 접근 방법으로는 실제 문제에 있어서는 모델링과 계산에 수많은 시간과 노력이 들게 된다. 특히 유체와 접촉하고 있는 공학적인 구조물들은 원판 및 원통형의 문제를 많이 다루고 있다.

무한유체 위에 떠있는 원판에 대해서는 Kwak [1, 2]이 연구하였고, 유한 깊이를 갖는 유체 위에 떠있는 원판은 Kwak [3]과 Amabili [4]가 연구하였다. Chiba [5]는 유체로 채워진 강체 원통형 바닥에 균일 탄성지지된 원판의 해석을 다루었다. Bauer [6]는 원통형 용기에 이상유체가 채워있고 상단에 원판이 덮혀 있는 구조물에 대한 해석을 수행하였다. De Santo [7]는 물속에 잠긴 다공판의 고유진동 해석을 실험적으로 수행하였다. Montero de Espinosa [8]는 물에 잠긴 판의 저차모드의 진동문제를 근사 해석 및 실험으로 다루었다. 그러나 이러한 연구

는 두 평판이 유체로 연성된 경우와 다르다.

Jeong [9]은 본 논문과 동일한 문제를 다루었으나 공기중의 모드와 접수 원판 모드가 동일하리라는 가정에 근거한 이론식으로 동위상 모드 고유진동수는 정확하게 예측을 하였으나 역위상 모드의 고유진동수는 유한요소 해석결과와 상당한 차이가 있음을 확인하였다. 그 원인으로 공기중의 모드 형상과 접수 원판 모드형상이 동일하리라는 가정에 문제가 있음을 밝혔다. 따라서 본 논문에서는 Jeong [9]의 연구를 보완하여 두 평판이 강체 원통 사이에 유체가 채워진 경우의 고유진동 특성을 파악하기 위하여 공기중 모드를 조합하는 Rayleigh-Ritz 방법을 적용한 이론적인 해석방법을 제시하고, 고유진동수를 구한 다음 ANSYS 5.6 상용 코드를 이용한 3차원 유한요소 해석으로 검증하고자 한다.

### 2.0 이론적 해석

#### 2.1 수식전개

Fig 1은 유체로 연성된 두 개의 동일한 원판을 보여주고 있다. 여기서  $R$ 과  $h$ 는 원판의 반경과 두께를 각각 나타낸다. 이론해석을 위하여 다음과 같은 가정을 설정하였다. (a) 유체의 운동이 매우 작아서 선형으로 취급할 수 있다. (b) 유체는 비압축성, 비점성 그리고 비회전성의 이상유체이다. (c) 원판의 동적거동은 선형탄성 범위 내에 있다.

유체와 접하는 원판의 상하방향 변위  $w_f$ 에 대한

\* 한국원자력연구소, 동력로기술개발팀, 정희원.

\*\* 한국원자력연구소, 동력로기술개발팀

\*\*\* 한국원자력안전기술원, 월성원자력본부

과기부 주재관실, 정희원.

운동방정식은 다음 식으로 나타난다.

$$D(\nabla^4 w_j + \rho h w_{j,tt}) = p_j \quad j=1, 2 \quad (1)$$

여기서  $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ 는 원판의 강성도이며,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $p_j$  및  $E$ 는 판의 밀도, Poisson 비, 판에 작용하는 유체압력, 그리고 탄성계수를 각각 나타낸다. 그리고 수식에서 첨자 1은 상부 원판을 나타내고 2는 하부 원판을 나타낸다. 식(1)의 해는 극좌표  $(r, \theta)$ 에 대하여 원판의 공기중 변위의 조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_1(r, \theta, t) = \cos(n\theta) \sum_{m=1}^M q_m W_{nm1}(r) \exp(i\omega t), \quad (2a)$$

$$w_2(r, \theta, t) = \cos(n\theta) \sum_{m=1}^M p_m W_{nm2}(r) \exp(i\omega t). \quad (2b)$$

여기서  $q_m$ 은 미정계수이고  $n$ 은 절점직경의 수를 나타낸다. 원판의 경계조건이 고정단을 갖는 경우,  $r = R$ 에서 변위가 영이 되어야 하므로 원판의 동적변위에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$W_{nmj}(r) = J_n(\lambda_{nm} r) - J_n(\lambda_{nm} R) I_n(\lambda_{nm} r) / I_n(\lambda_{nm} R) \quad (3)$$

여기서  $\omega$ 와  $\lambda_{nm}$ 은 원판의 공기중 고유진동수와 주파수 파라미터를 나타낸다.  $J_n$ 와  $I_n$ 는 각각 제 1종 Bessel 함수와 수정 Bessel 함수이다. 첨자  $m$ 은 공기중 진동모드의 절점원의 수를 나타내고 점수진동 모드에서는 반경방향 진동모드 전개항을 나타낸다. 원판이 고정단을 갖는 경우,  $r = R$ 에서 기울기도 영이 되어야 하므로 식(4)로부터  $\lambda_{nm}$  값을 얻을 수 있다.

$$J_n(\lambda_{nm} R) I_{n+1}(\lambda_{nm} R) + J_{n+1}(\lambda_{nm} R) I_n(\lambda_{nm} R) = 0. \quad (4)$$

## 2.2 속도 포텐셜 (Velocity Potential)

두 원판과 강체용기로 둘러싸인 이상유체의 운동은 다음과 같은 속도포텐셜의 Laplace 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2 \Phi(x, r, \theta, t) = 0 \quad (5)$$

식(5)의 속도포텐셜은 변수분리를 이용하면 식(6)으로 나타낼 수가 있다.

$$\Phi(x, r, \theta, t) = i\omega \phi(r, \theta, x) \exp(i\omega t) \quad (6)$$

식(6)을 식(5)에 적용하면 식(5)의 일반해는 식(7)로 나타난다.

$$\phi(r, \theta, x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[ J_n(\beta_{ns} r) \left\{ \begin{array}{l} E_{ns} \sinh(\beta_{ns} x) \\ + F_{ns} \cosh(\beta_{ns} x) \end{array} \right\} \right] \cos(n\theta) \quad (7)$$

그런데 강체용기 벽에서 반경방향의 유속은 영이 되어야 하므로 식(8)을 얻을 수 있다.

$$\partial \phi / \partial r \Big|_{r=R} = 0 \quad (8)$$

식(8)에 식(7)을 대입하면 모든 계수  $\beta_{ns}$ 를 구할 수 있는 식(9)을 얻는다.

$$J_n'(\beta_{ns} R) = 0 \quad (9)$$

유동의 대칭성을 고려하면 동위상 모드 (in-phase mode) 및 역위상 모드 (out-of-phase mode)에 대한 속도포텐셜은 다음 식을 만족해야 한다:

$$\begin{aligned} \partial \phi(r, \theta, -x) / \partial x &= \partial \phi(r, \theta, x) / \partial x \\ &\text{(동위상 모드의 경우)} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \partial \phi(r, \theta, x) / \partial x \Big|_{x=0} &= 0 \\ &\text{(역위상 모드의 경우)} \end{aligned} \quad (11)$$

식(10)과 식(11)을 적용하면 식(7)은 각각의 모드에 대하여 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

동위상 모드의 경우,

$$\phi(r, \theta, x) = \cos(n\theta) \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} J_n(\beta_{ns} r) \sinh(\beta_{ns} x) \quad (12)$$

역위상 모드의 경우,

$$\phi(r, \theta, x) = \cos(n\theta) \sum_{s=1}^{\infty} F_{ns} J_n(\beta_{ns} r) \cosh(\beta_{ns} x) \quad (13)$$

## 2.3 해석 방법

두 원판과 유체가 접하는 점수면에서 연직방향의 유속은 동일해야 하므로 유체운동에 대한 계수  $E_{ns}$ 과  $F_{ns}$ 를 원판의 운동을 나타내는 계수로 나타낼 수 있다. 따라서,

$$w_1 = -\partial \phi / \partial x \Big|_{x=d/2} \quad (14)$$

$$w_2 = -\partial \phi / \partial x \Big|_{x=-d/2} \quad (15)$$

식(2)와 식(3) 및 식(12)와 (13)을 식(14)와 식(15)에 대입하면, 동위상 모드의 경우는 식(16)이 되고 역위상 모드의 경우는 식(17)이 된다.

$$\sum_{m=1}^M q_m [J_n(\lambda_{nm} r) - J_n(\lambda_{nm} R) I_n(\lambda_{nm} r) / I_n(\lambda_{nm} R)]$$

$$= -\sum_{s=l}^{\infty} E_{ns} \beta_{ns} J_n(\alpha_{ns} r) \cosh(\beta_{ns} d/2) \quad (16)$$

$$\sum_{m=l}^M q_m [J_n(\lambda_{nm} r) - J_n(\lambda_{nm} R) I_n(\lambda_{nm} r) / I_n(\lambda_{nm} R)]$$

$$= -\sum_{s=l}^{\infty} F_{ns} \beta_{ns} J_n(\beta_{ns} r) \sinh(\beta_{ns} d/2) \quad (17)$$

그런데 Bessel-Fourier 급수전개로 식(16)과 식(17)의 Bessel 함수  $J_n(\lambda_{nm} r)$  과  $I_n(\lambda_{nm} r)$  을 전개하면 식(18)을 얻는다[6, 10].

$$J_n(\lambda_{nm} r) = \sum_{s=l}^{\infty} a_{nms} J_n(\beta_{ns} r),$$

$$I_n(\lambda_{nm} r) = \sum_{s=l}^{\infty} b_{nms} J_n(\alpha_{ns} r) \quad (18)$$

여기서,

$$a_{nms} = \frac{2(\lambda_{nm} R)(\beta_{ns} R)^2 J_n'(\lambda_{nm} R)}{\{(\beta_{ns} R)^2 - (\lambda_{nm} R)^2\} \{(\beta_{ns} R)^2 - n^2\} J_n(\beta_{ns} R)},$$

$$b_{nms} = \frac{2(\lambda_{nm} R)(\beta_{ns} R)^2 I_n'(\lambda_{nm} R)}{\{(\beta_{ns} R)^2 + (\lambda_{nm} R)^2\} \{(\beta_{ns} R)^2 - n^2\} J_n(\beta_{ns} R)} \quad (19)$$

따라서 속도포텐셜은 동위상 모드와 역위상 모드에 대하여 계수  $E_{ns}$  과  $F_{ns}$  대신 미정계수  $q_m$  으로 각각 나타낼 수가 있다.

$$\phi(r, \theta, x) = \sum_{m=l}^M q_m \sum_{s=l}^{\infty} \varepsilon_{nms} J_n(\beta_{ns} r) \sinh(\beta_{ns} x) \cos(n\theta)$$

$$\phi(r, \theta, x) = \sum_{m=l}^M q_m \sum_{s=l}^{\infty} \varepsilon_{nms} J_n(\beta_{ns} r) \cosh(\beta_{ns} x) \cos(n\theta) \quad (20)$$

여기서 동위상 및 역위상 모드에 대하여  $\varepsilon_{nms}$  은 각각 다음과 같이 유도된다.

$$\varepsilon_{nms} = -\frac{[a_{nms} - b_{nms} J_n(\lambda_{nm} R) / I_n(\lambda_{nm} R)]}{\beta_{ns} \cosh(\beta_{ns} d/2)},$$

$$\varepsilon_{nms} = -\frac{[a_{nms} - b_{nms} J_n(\lambda_{nm} R) / I_n(\lambda_{nm} R)]}{\beta_{ns} \sinh(\beta_{ns} d/2)} \quad (21)$$

수치해석을 수행하기 위하여 전개항  $m$  을 충분히 큰 값  $M$  까지 고려하기 위하여 미정계수 벡터  $\mathbf{q}$  을 정의하면 다음과 같다.

$$\mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \cdots q_M\}^T \quad (22)$$

계의 연성된 고유진동수를 계산하기 위하여 원판 및 유체의 운동에너지를 계산해야 한다. 먼저 유체의 운동에너지를 계산하면 식(23)이 된다[9].

$$T_F = -\frac{I}{2} \rho_o \kappa_{\theta} \left[ \int_0^R w_1 \phi(r, d/2) r dr + \int_0^R w_2 \phi(r, -d/2) r dr \right] \quad (23)$$

여기서  $n = 0$  일 때  $\kappa_{\theta} = 2\pi$  이고,  $n > 0$  일 때  $\kappa_{\theta} = \pi$  이다. 식(23)에 식(2), 식(3), 그리고 식(20)을 대입하면 유체의 운동에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_F = \rho_o \kappa_{\theta} \mathbf{q}^T \mathbf{G} \mathbf{q} \quad (24)$$

상하 원판의 모드형상이 대칭이거나 동일하기 때문에 원판의 운동에너지는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_d = \rho h \kappa_{\theta} \int_0^R w_i^2 r dr \quad (25)$$

식(25)에 식(2)를 대입하면 두 원판의 운동에너지는 식(26)과 같이 나타낼 수 있으며 동일한 방법으로 두 원판의 포텐셜에너지도 식(27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_d = \rho h \kappa_{\theta} \mathbf{q}^T \mathbf{Z} \mathbf{q} \quad (26)$$

$$V_d = \kappa_{\theta} \mathbf{q}^T \mathbf{P} \mathbf{q} \quad (27)$$

여기서  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{P}$  는 수식을 정리하여 유도되는 행렬이다. 식(24), (26) 및 (27)로부터 미정계수  $q_m$  에 대하여 Rayleigh 지수  $V_d / (T_d + T_F)$  를 최소화 시키는 고유치 행렬식을 구할 수 있으며 이 식으로부터 유체로 연성된 두 원판의 고유진동수를 얻을 수 있다.

### 3.0 계산에 및 고찰

#### 3.1 수치해석 모델

고정된 두 원판이 반경방향으로 갇혀 있는 이상 유체로 연성될 때, 고유진동수를 2.3 절에서 제시된 절차에 따라서 수치해석적인 방법으로 구할 수가 있다. 이 이론적인 방법의 타당성을 확인하기 위하여 상용 유한요소해석 코드인 ANSYS 5.6 을 이용하여 3 차원 유한요소 해석모델을 만들어 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 상하 원판은 알루미늄 재질로 되어 있다고 가정하였다. 이 동일한 두 원판의 반경은 150 mm 이고 두께는 3 mm 이며, 물성

치는 다음과 같다: 탄성계수 = 69.0 GPa, Poisson 비 = 0.3, 밀도 = 2700 kg/m<sup>3</sup>. 원판 사이에 채워지는 유체는 물로서 밀도가 1000 kg/m<sup>3</sup>이다. 두 원판이 강체용기와 만나는 경계조건은 고정단으로 가정하였다. 유한요소 해석에서 Fig 1 과 같은 해석모델은 3 차원 유체요소(FLUID80)와 탄성 쉘요소(SHELL63)로 구성되었다. 유체요소 절점은 강체용기 벽에서 반경방향의 변위만을 구속하였다. 그리고 원판과 접촉하는 유체의 절점이 원판의 절점과 연직방향으로만 같이 움직일 수 있도록 연성시켰다. 이것은 식(14)와 식(15)를 모사하게 된다. 두 원판사이의 거리는  $d=50\text{ mm}$  인 경우, 유한요소 해석 모델은 Fig 1 에서 보는 바와 같이 3744 (6×624)개의 유체요소와 1248 (2×624) 개의 쉘요소로 이루어져 있다.

### 3.2 이론의 검증 및 결과

Table 1 과 2 는 유한요소 해석결과 및 이론해석 결과를 보여주고 있다. 이론해석 계산에서 Bessel-Fourier 급수전개의 수렴성을 조사하여 수렴 속도가 느리다는 것을 확인하였고 따라서 충분히 큰 급수전개항을 계산에서 사용하였다. Bessel-Fourier 급수전개항  $s$  는 1000 값을 취하여 해가 충분히 수렴하도록 하였다. Rayleigh-Ritz 방법을 적용할 때 공기중의 모드를 중첩시키는데  $m$  에 큰 값을 취하여 운동에너지와 포텐셜에너지를 나타내는 식(24), 식(26)과 식(27)의 행렬크기를 증가시키면 좀 더 정확한 값을 얻을 수 있지만 그럴 경우 계산시간이 증가하게 된다. Table 1 과 2 에서 보는 바와 같이 동위상 모드와 역위상 모드의 경우는 이론치 고유진동수와 유한요소 해석결과가 상당히 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 따라서 역위상 모드의 고유진동수 값을 예측할 때 이론치가 유한요소 해석결과에서 크게 벗어나는 단점을 가지고 있는 참고문헌[9]의 이론해석의 문제점을 보완될 수 있음을 확인할 수 있었다. 고유진동 모드 중에서  $n = 0$  이고  $m = 0$  인 역위상 모드는 관찰할 수 없는데 그 이유는 물리적으로 이 모드가 유체질량의 보존에 위배되기 때문이다.

원판에 미치는 유체의 영향을 정량화하기 위하여 유체와 접하는 원판의 고유진동수를 이 모드에 해당되는 공기중 고유진동수로 나누어 정규화 고유진동수(normalized natural frequency)를 정의할 때, 이 정규화 고유진동수는 유체의 부가질량(added mass)의 영향으로 항상 1 과 0 사이의 값을 갖는다는 것은 잘 알려진 사실이다. 일반적으로 모드수가 증가하면 유체와 접하는 구조물에서 정규화 고유진동수는 증가하게 된다. Fig 2 에서도 확인할 수 있듯이 동위상 모드의 고유진동수가 대응되는 역위상 모드의 고유진동수보다 항상 크게 나타난다. 모

드수가 낮을수록 구조물간의 간격이 작을수록 이 현상으로 나타나는 두 고유진동수 차이가 커지고 있음을 알 수 있다. Fig 2 는 원판사이의 거리에 따른 고유진동수 변화를 나타내고 있다. 원판사이의 거리가 멀어지면 유체의 양은 많아지나 원판사이의 연성효과는 감소하게 된다. 따라서 원판사이의 거리가 멀어질수록 유체의 총량에 영향을 받는 동위상 모드의 고유진동수는 유체의 부가질량이 커져서 고유진동수가 감소하지만, 유체의 연성효과에 영향을 받는 역위상 모드는 반대로 유체로 인한 연성이 떨어져 고유진동수가 증가하게 된다. 원판사이의 거리가 10 mm 인 경우 대하여 유한요소 해석으로부터 얻은 동위상 모드형상 및 역위상 모드형상들의 일부를 Fig 3 부터 Fig 14 까지 보여주고 있다.

### 4.0 결론

물로 연성된 두 개의 동일한 원판에 대한 고유진동수를 구하는 해석방법을 제시하였다. 그리고 유체와 연성된 이 구조물의 동적특성을 고찰하였다. 이 방법을 타당성을 확인하기 위하여 원판의 경계조건이 고정된 경우에 대하여 고유진동수를 이론적으로 구하고 상용 컴퓨터 코드로 검증하였다. 그 결과, 모든 고유진동 모드는 동위상 모드와 역위상 모드로 나뉘어 나타났다. 모든 동위상 모드와 역위상 모드의 경우에 이론값의 고유진동수와 유한요소 해석결과로 얻은 고유진동수가 대체로 잘 일치하였다. 공기중 모드의 전개항의 수를 증가시키면 이론값의 고유진동수가 유한요소 해석결과에 접근하리라 판단된다. 또한 원판사이의 거리가 멀어지면 유체의 양은 많아지고 원판사이의 연성효과는 감소하게 되어 동위상 모드의 고유진동수는 고유진동수가 감소하지만, 역위상 모드는 반대로 고유진동수가 증가하게 됨을 확인하였다.

### 참고문헌

1. Kwak, M. K., 1991, "Vibration of circular plates in contact with water," *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp.480-483.
2. Kwak, M. K. and Kim, K. C. 1991, "Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146, pp.381-389.
3. Kwak, M. K. and Han, S. B., 2000, "Effect of fluid depth on the hydroelastic vibration of free-edge circular plate," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, pp.171-185.
4. Amabili, M., 1996, "Effect of finite fluid depth on the hydroelastic vibrations of circular and annular plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 193, pp.

909-925.

5. Chiba, M., 1994, "Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **169**, pp. 387-394.
6. Bauer, H. F., 1995, "Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **180**, pp.689-704.
7. De Santo, D. F., 1981, "Added mass and hydrodynamic damping of perforated plates vibrating in water," *Transaction of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. **103**, pp.175-182.
8. Montero de Espinosa, F. and Gallego-Juarez, J. A., 1984, "On the resonance frequencies of water-loaded circular plate," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **94**, pp.217-222.
9. Jeong, K. H., Kim, T. W., Choi, S. and Park, K. B. 1998, "Free vibration analysis of two circular disks coupled with fluid," *PVP-Vol. 366, Proceedings, Technologies in Reactor Safety, Fluid-Structure Interaction, Sloshing and Natural Hazards Engineering*, 157-164.
10. Sneddon, I. N., 1951, *Fourier Transforms*, New York; McGraw-Hill; p.82.

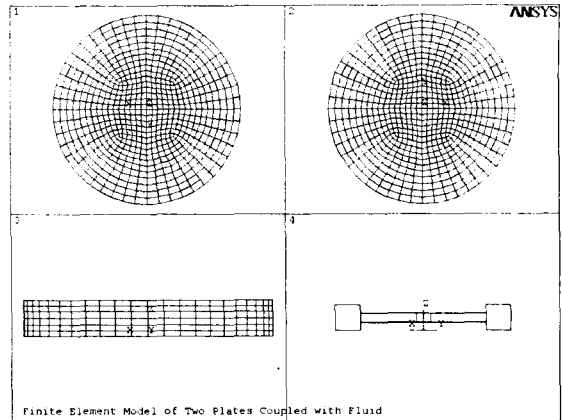


Fig 1. Finite element model of two plates coupled with fluid

Table 1. Out-of-phase mode natural frequencies of circular plates coupled with water for  $d = 50$  mm

n	Method	Natural frequency (Hz)			
		$m' = 0$	$m' = 1$	$m' = 2$	$m' = 3$
0	FEM	---	400	1323	2785
	Theory	---	585	1534	3033
1	FEM	148	781	1975	3691
	Theory	156	653	1620	3134
2	FEM	366	1269	2727	4941
	Theory	384	1227	2615	4586
3	FEM	666	1841	3554	5764
	Theory	696	1864	3601	5929
4	FEM	1041	2492	4464	7121
	Theory	1085	2571	4632	7289

Table 2. In-phase mode coupled natural frequencies of circular plates coupled with water for  $d = 50$  mm

n	Method	Natural frequency (Hz)			
		$m' = 0$	$m' = 1$	$m' = 2$	$m' = 3$
0	FEM	168	691	1645	3089
	Theory	169	754	1751	3280
1	FEM	358	1088	2280	3980
	Theory	358	1101	2340	4133
2	FEM	602	1556	2990	4964
	Theory	605	1585	3094	5176
3	FEM	902	2093	3787	6003
	Theory	913	2150	3939	6317
4	FEM	1263	2703	4657	7484
	Theory	1285	2796	4876	7555

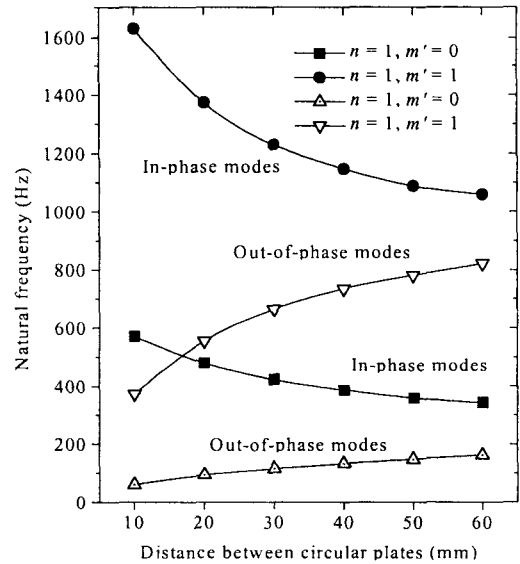


Fig 2. Fluid gap effect on natural frequencies ( $n$  = number of nodal diameters,  $m'$  = number of nodal circles)

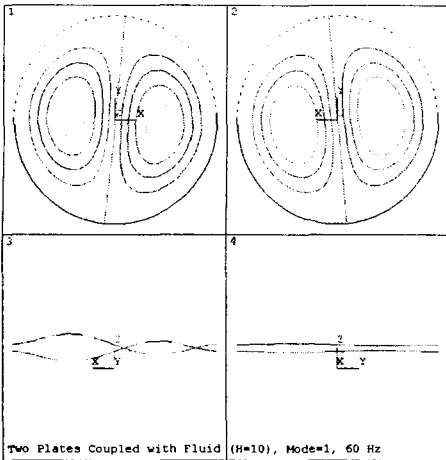


Fig 3. Mode shape of two plates coupled with fluid for out-of-phase mode with  $n = 1$  and  $m' = 0$

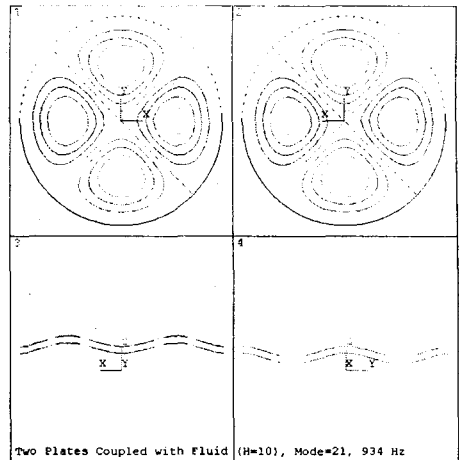


Fig 6. Mode shape of two plates coupled with fluid for in-phase mode with  $n = 2$  and  $m' = 0$

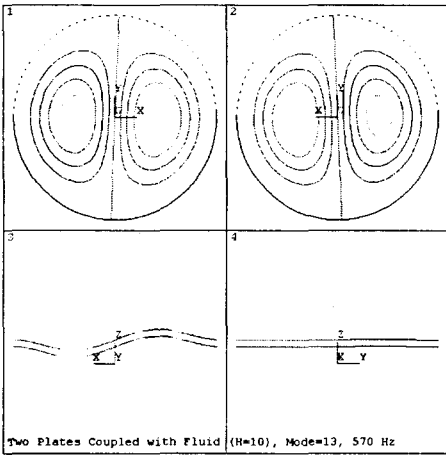


Fig 4. Mode shape of two plates coupled with fluid for in-phase mode with  $n = 1$  and  $m' = 0$

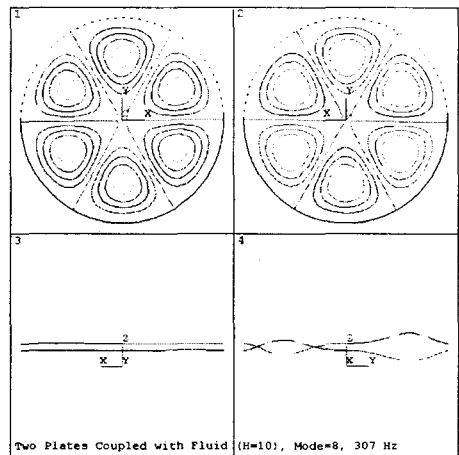


Fig 7. Mode shape of two plates coupled with fluid for out-of-phase mode with  $n = 3$  and  $m' = 0$

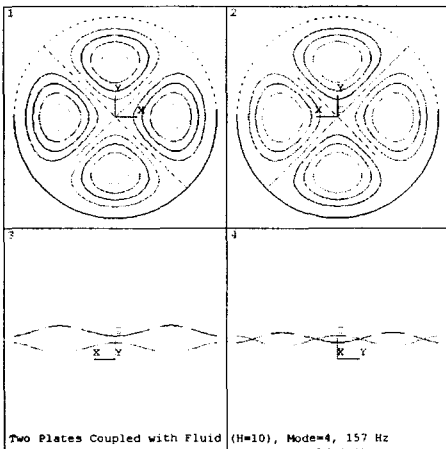


Fig 5. Mode shape of two plates coupled with fluid for out-of-phase mode with  $n = 2$  and  $m' = 0$

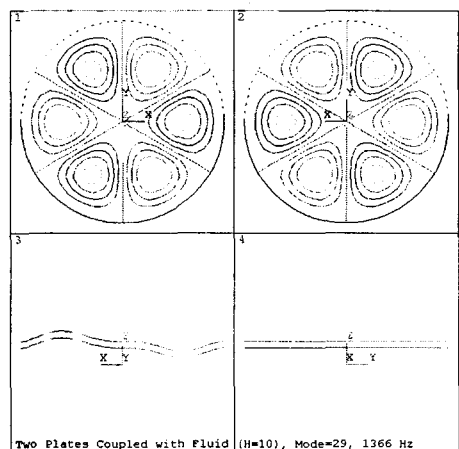


Fig 8. Mode shape of two plates coupled with fluid for in-phase mode with  $n = 3$  and  $m' = 0$

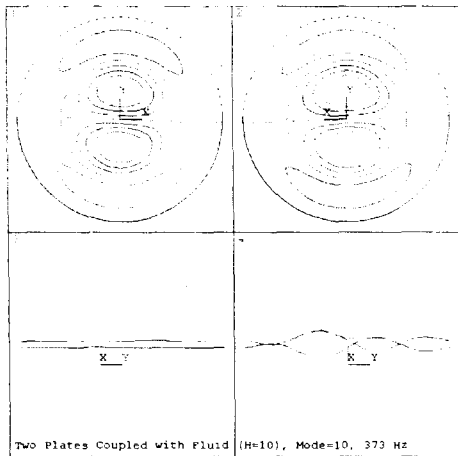


Fig 9. Mode shape of two plates coupled with fluid for out-of-phase mode with  $n = 1$  and  $m' = 1$

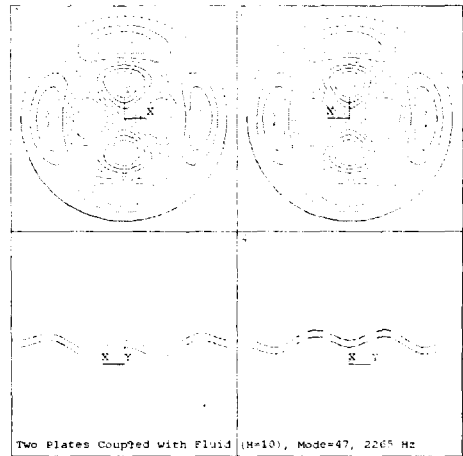


Fig 12. Mode shape of two plates coupled with fluid for in-phase mode with  $n = 2$  and  $m' = 1$

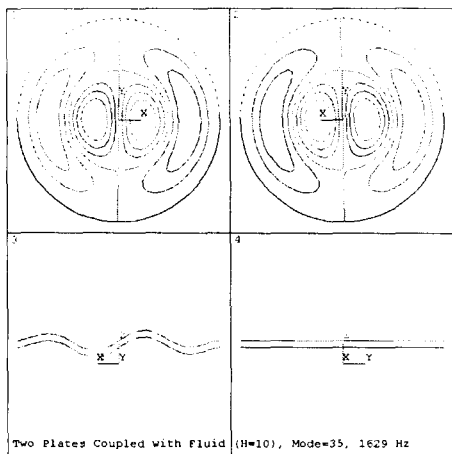


Fig 10. Mode shape of two plates coupled with fluid for in-phase mode with  $n = 1$  and  $m' = 1$

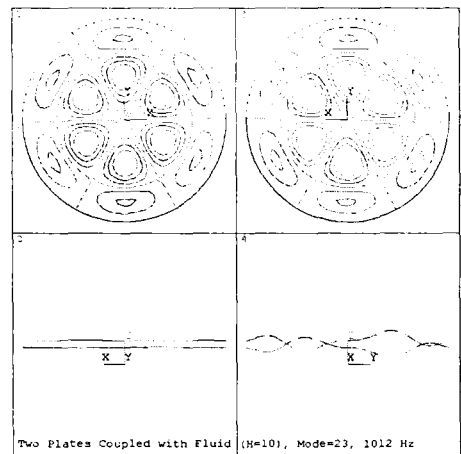


Fig 13. Mode shape of two plates coupled with fluid for out-of-phase mode with  $n = 3$  and  $m' = 1$

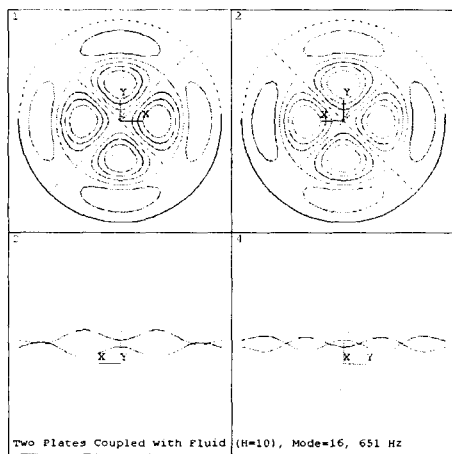


Fig 11. Mode shape of two plates coupled with fluid for out-of-phase mode with  $n = 2$  and  $m' = 1$

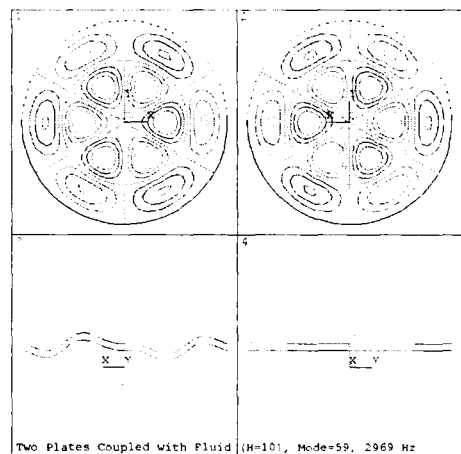


Fig 14. Mode shape of two plates coupled with fluid for in-phase mode with  $n = 3$  and  $m' = 1$