

박판구조물의 방사소음에 대한 형상 설계민감도 해석

⁰이제원*, 왕세명**

Shape Design Sensitivity Analysis For The Radiated Noise From Thin body

Jeawon Lee, Semyung Wang

ABSTRACT

A continuum-based shape design sensitivity analysis (DSA) method is presented for the acoustic radiation from thin body. The normal derivative integral formulation is employed as an analysis formulation and differentiated directly by using material derivative to get the acoustic shape design sensitivity. In the acoustic sensitivity formulation, derivative coefficients of the structural normal velocities on the surface are required as the input. Thus, the shape design sensitivities of structural velocities on the surface with respect to the shape change are also calculated with continuum approach. A simple disk is considered as a numerical example to validate the accuracy and efficiency of the analytical shape design sensitivity equations derived in this research. This research should be very helpful to design an application involving thin body and to change its acoustic characteristics.

1. 서론

방열판이나 내외부가 서로 뚫린 구조의 판재와 같은 박판 구조물은 대부분의 제품에 일반적으로 사용될 만큼 사용 빈도가 높다. 그런데 제품에 진동이 발생하는 경우, 일반적으로 다른 부분에 비해 상대적으로 큰 소음 방사가 판 구조물에서 발생하게 된다. 그러나 일반적인 경계 요소법을 사용하는 박판 구조물의 소음 해석은 정확한 해를 얻기가 쉽지 않다는 어려움이 있다. 물론 매우 세밀하게 요소를 나눈다면 해석이 가능하지만, 이 경우에는 지나치게 많은 해석 시간이 요구되는 단점

이 있다. 따라서 많은 연구자들이 소음 해석을 비롯한 많은 분야에서 이러한 문제를 해결하기 위하여 연구해 왔다.

다영역 경계 요소법(multi-domain BEM)^[1]은 이론적으로 박판 구조물의 소음 해석을 위한 가장 간단한 방법이다. 그러나 상대적으로 가상 평면(imaginary surface)이 넓은 경우에는 계산 효율이 매우 떨어지는 단점이 있다. 반면에 법선 도함수 적분식(normal derivative integral equation)^[2]은 개념적으로는 다영역 경계 요소법과 마찬가지로 가상 평면을 구축하지만, 압력과 속도의 연속성을 이용하여 적분 과정에서는 이를 고려하지 않게 된다. 결국 박판 구조물 부분만을 이산화 함으로써 해석을 한다는 차이가 있다. 그러나, 법선 도함수 적

* 정회원, 광주과학기술원 기전공학과 박사과정

** 정회원, 광주과학기술원 기전공학과 부교수

분식은 $1/r^3$ 의 초특이성을 갖는 단점이 있다. 따라서 Maue^[3], Mitzner^[4]등에 의해 제안된 정규화 방법을 이용하여 초특이성을 해소하여야 한다. 이 방법은 기본적으로 간접 변분법(Indirect variational method)^[5]에서도 사용된다. 간접 변분법은 이산화 후에 대칭 행렬을 얻을 수 있다는 장점이 있지만, 이때 이중 면적분을 수행해야 한다.

소음 분야에서의 설계 민감도 해석에 관한 연구는 구조 분야에 비해 상대적으로 활발하지는 못했다. J.H. Kane 과 S. Mao^[6]는 이산화된 헬름홀츠 방정식에 미분을 취함으로써 민감도 식을 유도하였다. Koopmann 등^[7]은 주어진 구조물의 기하학적 형상 하에서 속도의 변화에 따른 음향 파워의 설계 민감도 식을 유도하였으며, N. Vlahopoulos^[8]와 J.P. Coytte^[9]등은 일반적인 경계 적분식을 이용하여 구조물로 부터의 방사 소음에 대한 크기 설계 민감도식을 유도하였다. Smith 와 Bernhard^[10]는 이산화된 경계 적분식에 유한 차분법을 이용하여 형상 변화에 따른 설계 민감도를 구하였다. 또한 해석적인 접근법을 이용한 민감도 식도 유도가 되었는데, M. Bonnet^[11]은 일반적인 물질 미분법을 이용하여 형상 변화에 대한 경계 적분식의 미분을 구하였으며, Koo^[12]등은 일차원 파동 방정식을 이용하여 정규화 된 경계 적분식을 이용하여 형상 설계 민감도 식을 유도하였으며, Wang 과 Lee^[13]는 연속체법을 이용한 소음의 크기 설계 민감도 식을 유도하였다.

본 논문에서는 연속체 설계 민감도법을 이용하여 박판으로부터 방사되는 소음의 형상 설계 민감도식을 유도하고, 이를 경계상의 법선 속도에 대한 구조 설계 민감도 식과 연계함으로써 해석적으로 연속체법을 이용한 설계 민감도 식을 유도하였다. 또한 유도된 식의 해를 검증하기 위하여 단 순 원판을 간단한 수치 예제로서 이용하였다.

2. 소음 형상 설계 민감도 해석식

법선 도함수 적분식

법선 속도 v_n 으로 진동하는 박판으로부터 방사되는 소음은 법선 도함수 적분식^[2]을 이용하여 구할 수 있다.

$$\int_S \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}} \mu dS = \int_S (\nabla G \cdot \mathbf{n}) \mu dS = p(x) \quad (1)$$

식(1)에서, $G(x,y)$ 는 Green function으로서, 평면상의 한 점 y 와 수음점 x 의 거리 R 의 함수이다. 또, μ 는 박판 양면의 음압 차, $\mu \equiv p^+ - p^-$ 를 의미하며 jump of pressure나 double layer potential로 불린다. 이때 수음점 x 가 박판 평면 상에 존재하는 경우에는 다음과 같은 형태의 법선 도함수 적분식^[2]을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x)}{\partial \mathbf{n}_x} &= -j\omega\rho v_n(x) \\ &= \int_S \{(\mathbf{n}_x \times \nabla_x G) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \mu) + k^2(\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n})G\mu\} dS \end{aligned} \quad (2)$$

결국 박판 평면상의 각 점에 대하여 법선방향 진동 속도 v_n 을 알고 있을 경우, 식(2)로 부터 double layer potential μ 를 계산할 수 있으며, 이 값을 식(1)에 대입함으로써 임의의 점 x 에서의 압력 $p(x)$ 를 구할 수 있다. 식(1)과 (2)를 수치적으로 해석하기 위해서는 평면 S 를 보간 함수를 이용하여 이산화하여야 한다.

$$p(x) = \mathbf{M}_e \boldsymbol{\mu} \quad (3)$$

$$-j\omega\rho v_n = \mathbf{M} \boldsymbol{\mu} \quad (4)$$

식(3)은 식(1)의 이산화 행렬식이다. 여기에서 $p(x)$ 는 수음점 x 에서의 음압을 의미하며, \mathbf{M}_e 는 기여 행렬(contribution matrix or vector), 그리고 $\boldsymbol{\mu}$

는 박판 평면상의 각 절점에서의 double layer potential 로 구성된 열벡터이다. 식(4)는 식(2)의 행렬식이며, 박판의 법선방향 진동 속도 v_n 과 시스템 행렬(system matrix) \mathbf{M} 으로 이루어져 있다.

소음 형상 설계 민감도

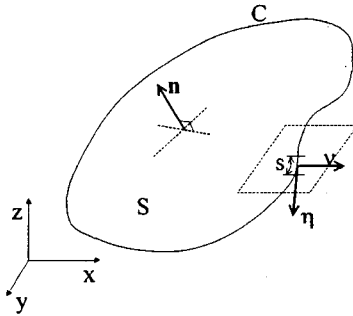


Fig. 1. Direction vectors for the surface (\mathbf{n} -surface normal, $\boldsymbol{\eta}$ -boundary tangent, and \mathbf{v} -boundary normal)

식(5)의 일반적인 평면 적분 함수 $g(x)$ 에 대한 물질 미분식은 식(6)과 같이 표현된다^[14,15].

$$\Psi = \int_S g_r(x_r) dS_r \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi' &= \int_S [\dot{g}(x) + g(x) \text{div}_V \mathbf{V}] dS \\ &= \int_S [g'(x) + (\nabla g \cdot \mathbf{n} + Hg(x))(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})] dS + \int_C g(x)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) ds \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 각 방향 벡터 \mathbf{n}, \mathbf{v} 등은 Fig.1에 보인 것과 같으며, $H \equiv \text{div } \mathbf{n}$ 으로서 평면의 곡률에 비례하고, \mathbf{V} 는 형상 변화에 대한 설계 속도장(design velocity field)을 의미한다. 결국 박판 구조물의 형상 변화에 대한 소음 설계 민감도 식은, 식(6)의 물질 미분식에 식(1),(2)를 적용함으로써 해석적으로 구해질 수 있다. 유도된 민감도식을 변수 μ 와 μ' 에 대해 보간 함수를 적용하여 이산화하면 식(7), (8)과 같다.

$$\dot{p}(x) = \mathbf{M}_r \mu' + \mathbf{M}_r^D \mu \quad (7)$$

$$-j\omega\rho\dot{v}_n = \mathbf{M}\mu' + \mathbf{M}^D\mu \quad (8)$$

이상의 민감도 식은, 연속식에서 미분을 취하고 이를 이산화하는 과정을 거친 것으로서, 이산화 식을 직접 미분한 경우에 비하여 정확하다. 개념적으로, 식(7)과 (8)의 \mathbf{M}_r^D 와 \mathbf{M}^D 는 각각 기여 행렬 \mathbf{M}_r 의 물질 미분항과 시스템 행렬 \mathbf{M} 의 물질 미분항을 의미한다.

Fig.2에는 박판 구조물의 진동으로 인한 소음 방사 해석 및 형상 설계 민감도 해석절차를 보였다. 여기에서 알 수 있듯이, 소음 형상 설계 민감도를 구하기 위해서는 v_n 과 \dot{v}_n 을 알아야 한다.

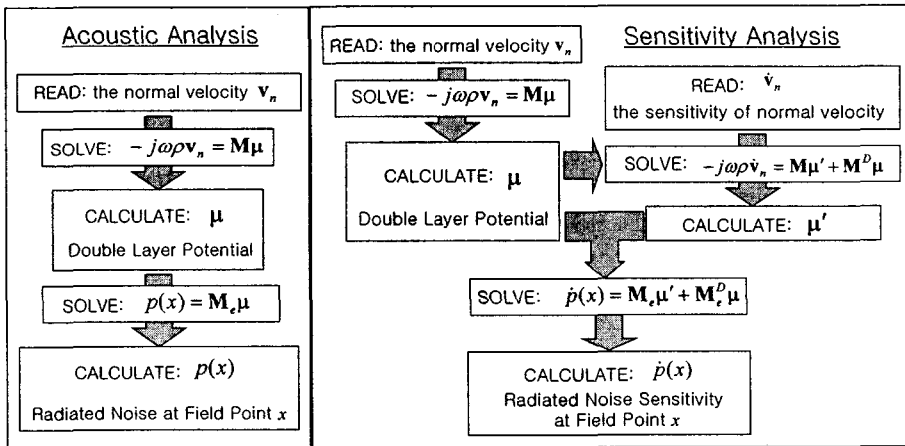


Fig. 2. Calculation procedures of acoustic analysis and sensitivity analysis

3. 구조 형상 설계 민감도 해석식

박판 구조물의 방사 소음에 대한 형상 설계 민감도를 계산하기 위해서는, 구조물의 진동 속도에 대한 형상 설계 민감도 값을 알고 있어야 한다. 이를 위해, 우선 동적 주파수 응답에 대한 구조물의 에너지 변분식^[6]을 생각해 보자.

$$b_{\Omega}(z, \bar{z}) \equiv \iint_{\Omega} f(z, \bar{z}) d\Omega \quad (9)$$

$$= -\omega^2 \rho d_{\Omega}(z, \bar{z}) + i\omega c_{\Omega}(z, \bar{z}) + a_{\Omega}(z, \bar{z}) = \ell_{\Omega}(\bar{z})$$

여기에서, $d_{\Omega}(z, \bar{z})$, $c_{\Omega}(z, \bar{z})$, 그리고 $a_{\Omega}(z, \bar{z})$ 는 각각 구조물의 질량, 감쇠, 변형에 대한 에너지 항이며, $\ell_{\Omega}(\bar{z})$ 는 외력에 의한 항이다. 식(9)의 일차 변분은 다음과 같다.

$$[b_{\Omega}(z, \bar{z})]' = b_{\Omega}(\dot{z}_v, \bar{z}) + b_{\Omega}(z, \dot{\bar{z}}_v) - b_{\Omega}(\nabla z^T V, \bar{z}) - b_{\Omega}(z, \nabla \bar{z}^T V) + b_{\Omega}^0(z, \bar{z}) = \ell'_v(\bar{z}) = [\ell_{\Omega}(\bar{z})]' \quad (10)$$

$$b_{\Omega}^0(z, \bar{z}) = \iint_{\Omega} \text{div}[f(z, \bar{z})V_{\Omega}] d\Omega \quad (11)$$

식(10)의 미분 값 $b'_v(z, \bar{z})$ 과 $\ell'_v(\bar{z})$ 는 형상 변화에 따른 에너지와 외력항의 양함수적(explicit) 표현이며, 식(11)의 $f(z, \bar{z})$ 는 쌍선형 사상(bilinear mapping)을 의미한다. $b'_v(z, \bar{z})$ 는 다음과 같다.

$$b'_v(z, \bar{z}) = -b_{\Omega}(\nabla z^T V, \bar{z}) - b_{\Omega}(z, \nabla \bar{z}^T V) + b_{\Omega}^0(z, \bar{z}) \quad (12)$$

가상 변위의 미분값도 주어진 허용 가상상태(kinematically admissible virtual state)를 만족하므로 $\dot{\bar{z}}_v \in Z$, $b_{\Omega}(z, \dot{\bar{z}}_v) = \ell_{\Omega}(\dot{\bar{z}}_v)$ 의 관계가 있다. 이 관계식을 식(9)에 적용하여 일차 변분을 취하면,

$$b_{\Omega}(\dot{z}_v, \bar{z}) = \ell'_v(\bar{z}) - b'_v(z, \bar{z}) \quad \text{for all } \bar{z} \in Z \quad (13)$$

이제 식(14)와 같은 영역 적분 함수의 일반형에 대해 생각해 보자.

$$\psi_z = \iint_{\Omega} g(z_r, \nabla z_r) d\Omega, \quad (14)$$

여기에서 $\nabla z = [\nabla z_1, \nabla z_2, \nabla z_3]^T$ 이다. 식(14)의 일차 변분은 다음과 같다.

$$\psi' = \iint_{\Omega} [g_z z'_v + g_{\nabla z} \nabla z'_v + \nabla g^T V + g \text{div} V] d\Omega \quad (15)$$

여기에서 $g_{\nabla z} = [\partial g / \partial z_1, \partial g / \partial z_2, \partial g / \partial z_3]$ 이다. ψ' 는 ψ 의 형상 변화에 대한 물질 미분으로서 식(15)는 $\dot{z}_v = z'_v + \nabla z^T V$ 과 $\nabla \dot{z}_v = \nabla z'_v + \nabla(\nabla z^T V)$ 을 이용하여 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\psi' = \iint_{\Omega} [g_z \dot{z}_v + g_{\nabla z} \nabla \dot{z}_v - g_z \nabla z^T V - g_{\nabla z} \nabla(\nabla z^T V) + \nabla g^T V + g \text{div} V] d\Omega \quad (16)$$

변분값 ψ' 를 설계 속도장을 이용하여 양함수적으로 표현하기 위하여, 식(16) 우변의 첫번째와 두번째 항의 \dot{z}_v 를 보조 변수법(adjoint method)을 사용하여 소거한다. 식(16)의 $\dot{z}_v \in Z$ 을 가상 변위 $\bar{\lambda} \in Z$ 으로 대치하고, 두 항의 합을 쌍선형 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$b_{\Omega}(\lambda, \bar{\lambda}) = \iint_{\Omega} [g_z \bar{\lambda} + g_{\nabla z} \nabla \bar{\lambda}] d\Omega \quad \text{for all } \bar{\lambda} \in Z \quad (17)$$

이제 식(17)의 보조 변위를 이용하면, 보조 변수법을 이용한 민감도 식을 유도할 수 있다.

$$\psi' = \ell'_v(\lambda) - b'_v(z, \lambda) - \iint_{\Omega} [g_z (\nabla z^T V) + g_{\nabla z} \nabla(\nabla z^T V) + \nabla g^T V + g \text{div} V] d\Omega \quad (18)$$

4. 수치 예제

계산된 형상 설계 민감도 결과를 검증하기 위하여 HDD에 들어가는 얇은 원판 디스크를 예제로 하였다. Fig.3에서 알 수 있듯이, 내원은 고정단으로서 반지름 'a'를 가지며 외원은 자유단으로 반지름 'b'를 가진다. 수치 모델의 경우, Table 1에 보인 바와 같이 실험과의 고유치 비교를 통해 전체 요소수를 96개로 정하였다.

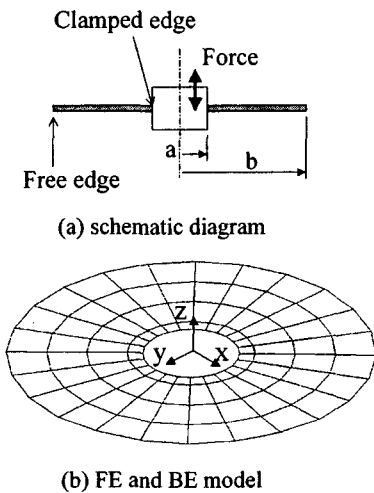


Fig. 3. Annular disk model

주어진 수치 모델에 대하여 고정점에 가진을 주고 원판 중심 상부에서의 음압을 해석한 결과 Fig.4와 같이 668Hz에서 첫번째 peak을 가진다. 이 해석 결과는 간접 변분법을 이용하는 상용 프로그램 SYSNOISE를 이용하여 참고적으로 비교하였다.

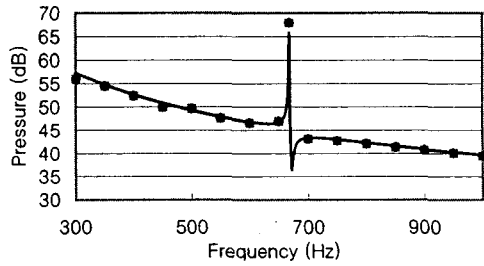


Fig. 4. Acoustic analysis results
(— indirect variational method, SYSNOISE, ■ normal derivative integral equation)

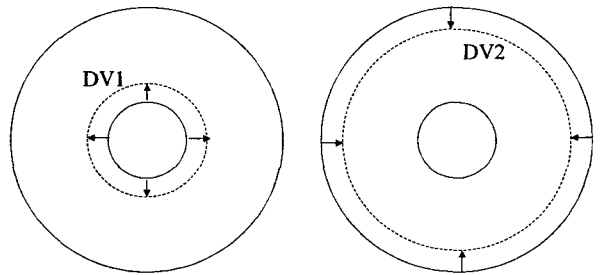


Fig. 5. Design variables of shape change
(DV1 and DV2)

민감도 해석을 위하여 668Hz를 관심 주파수로 선택하였으며, Fig.5와 같이 두개의 설계 변수를 결정하였다. 이때 박판 구조물의 진동 속도 v_n 및 보조 변위 λ 는 MSC/NASTRAN을 이용하여 계산되었다. 계산된 v_n 와 λ 를 이용하여 자체 개발된 프로그램을 통해 진동 속도의 설계 민감도 \dot{v}_n 을 계산하고, 다시 방사 소음의 설계 민감도 $\dot{p}(x)$ 를 계산하였으며, 이를 Table 2에서 유한차분법을 이용한 결과 값과 비교 검증하였다.

Table. 1. Element convergence test (Hz)

Free-free case	Number of elements			Experiment
	48	96	144	
1 st mode (0,2)	359.0	419.5	425.6	423.9
2 nd mode (0,0)	426.8	668.2	705.2	656.9
3 rd mode (0,3)	807.6	1010.6	1035.9	1056.9

*(m, n)=(number of nodal circles, number of nodal diameters)

Table 2. Sensitivity verification for both DV1 and DV2

Design variable	Perturbation		$\Psi(d + \delta d)$ [Pa]	$\Psi(d - \delta d)$ [Pa]	$\Delta\Psi$	Ψ'	Accuracy ($\Psi'/\Delta\Psi$) [%]
	[%]	[mm]					
DV1	0.1	0.0475	5.2123e-2	5.2102e-2	2.1e-4	2.047e-4	97.5
	0.01	0.00475	5.2111e-2	5.2109e-2	2.1e-4		97.5
DV2	0.1	0.0125	5.1874e-2	5.2316e-2	-1.768e-2	-1.858e-2	105.7
	0.01	0.00125	5.2092e-2	5.2137e-2	-1.800e-2		103.2

* $\Delta\Psi = \frac{\Psi(d + \delta d) - \Psi(d - \delta d)}{2\delta d}$, central finite difference and Ψ' is an analytical sensitivity result

5. 결론 및 고찰

본 연구에서는 박판 구조물의 진동으로 인한 방사 소음의 형상 설계 민감도 식을 유도하고, 이를 수치적으로 해석할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 개발된 프로그램은 단순 원판 모델을 이용하여 정확성을 검증하였다. 그러나, 본 연구에서 개발된 프로그램은 아직 모든 경우의 형상 변화를 해석하지는 못 한다. 그것은 기본적으로 본 연구에서 유도된 민감도 식들이 $O(1/r^3)$ 의 초특이성을 갖는 것에 기인한다. 본 연구에서는 수정 보간 함수^[15](modified interpolation function)를 이용하여 특이성의 차수를 $O(1/r^2)$ 로 낮추고, CPV (Cauchy Principle Value)를 이용하여 적분을 수행하였는데, 박판 구조가 완만한 면이 아니고 곡률 변화가 큰 경우에는 구조물의 형상이 변화함에 따라 CPV 식이 왜곡되는 결과가 발생한다. 이 문제를 해결하기 위해서는 좀 더 일반적인 정규화에 대한 연구가 진행되어야 할 것이다.

참고 논문

[1] A.F. Seybert, C.Y.R. Cheng, T.W. Wu, 1991, "A multidomain boundary element solution for silencer and muffler performance prediction," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 151, pp. 119-129.
 [2] T.W. Wu, G.C. Wan, 1992, "Numerical modeling of acoustic radiation and scattering from thin bodies using a Cauchy principal integral equation," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 92, pp. 2900-2906.
 [3] A.W. Maue, 1949, "Zur Formulierung eines allgemeinen Beugungsproblems durch eine Integralgleichung," *Z. Physik*, Vol. 126, pp. 601-618.

[4] K.M. Mitzner, 1966, "Acoustic scattering from an interface between media of greatly different density," *J. Mathematical Physics*, Vol. 7, pp. 2053-2060.
 [5] X.F. Wu, A.D. Pierce, J.H. Ginsberg, 1987, "Variational method for computing surface acoustic pressure on vibrating bodies, applied to transversely oscillating disks," *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, Vol. OE-12, pp. 412-418.
 [6] J.H. Kane, S. Mao, G.C. Everstine, 1991, "A boundary element formulation for acoustic shape sensitivity analysis," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 90, pp. 561-573.
 [7] R.R. Salagame, A.D. Belegundu, G.H. Koopmann, 1995, "Acoustical sensitivity of acoustic power radiated from plate," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 117, pp. 43-48.
 [8] N. Vlahopoulos, 1992, "Boundary element formulation for acoustic sensitivities with respect to structural variables and acoustic impedance," 2nd International Congress on Recent Developments in Air- and Structure-borne Sound and Vibration, Auburn University, March.
 [9] J.P. Coytte, H. Wynendaele, M. Chargin, 1993, "Evaluation of Global Acoustic Sensitivities using a Combined Finite Element/Boundary Element Formulation," Noise-con 93(INCE/USA), May 2-5.
 [10] D. C. Smith, R. J. Bernhard, 1992, "Computation of acoustic shape design sensitivity using a boundary element method," *Journal of vibration and acoustics*, Vol. 114, pp. 127-132.
 [11] M. Bonnet, M. Guiggiani, 1998, "Tangential derivative of singular boundary integrals with respect to the position of collocation points," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 41, pp. 1255-1275.
 [12] B.U. Koo, J.G. Ih, B.C. Lee, 1998, "Acoustic shape sensitivity analysis using the boundary integral equation," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 104, pp. 2851-2860.
 [13] S. Wang, J. Lee, 2001, "Acoustic design sensitivity analysis and optimization for Reduced exterior noise", *AIAA journal*, Vol. 39.
 [14] E.J. Haug, K.K. Choi, V. Komkov, 1985, *Design Sensitivity Analysis of Structural System*, Academic press, New York.
 [15] M. Bonnet, 1995, *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England.
 [16] S. Wang, S. Ki, K. Lee, 2001, "Configuration design sensitivity analysis for dynamic systems using CAD-based velocity field," *AIAA journal*, to appear.