

1차원 및 2차원 구조물의 진동해석을 위한 파워흐름경계요소법의 연구

Research of Power Flow Boundary Element Method for Vibrational Analysis of One and Two Dimensional Structures

° 박도현**, 홍석윤*, 이호원**, 서성훈**, 길현권***

(° D.-H. Park**, S.-Y. Hong*, H.-W. Lee**, S.-H. Seo**, H.-G. Kil***)

ABSTRACT

In this paper, Power Flow Boundary Element Method(PFBEM) has been developed for one and two dimensional noise and vibration problems in the medium to high frequency ranges. Green functions used for PFBEM are the fundamental solutions of energy governing equations. Both direct and indirect methods of PFBEM have been formulated and numerically applied to predict the vibrational energy density and intensity distributions of simple beams, rectangular plates and L-type plates.

I. 서론

복합구조물의 중고주파 진동 현상은 소음 발생의 주요 원인이 될 수 있기 때문에 관심의 초점이 되고 있다. 기존의 유한요소법(FEM)과 경계요소법(BEM) 및 통계적에너지해석법(SEA)이 중고주파 영역에서 가지는 한계점들을 보완하기 위해 제안된 파워흐름해석법(Power Flow Analysis, PFA)은 고유의 에너지지배방정식을 기반으로 하여 고주파 영역에서 에너지의 공간적인 분포와 전달경로등을 제시함은 물론 중주파수 영역에까지 확대 적용될 수 있는 방법으로 인식되고 있다. Nefske와 Sung은 파워흐름해석법을 보의 횡진동에 적용하였고 Wohlever와 Bernhard는 보의 횡진동과 종진동에 대한 에너지지배방정식을 제시하였다. Bouthier와 Bernhard는 이차원 막막(membrane)과 등방성 평판의 횡진동 및 음향공간에 대한 에너지지배방정

식을 제시하였다. 박도현 등은 등방성(isotropic) 평판의 면내(in-plane)진동과 직교이방성(orthotropic) 평판의 횡진동에 대한 에너지지배방정식을 유도하였다.

파워흐름해석법을 일반적인 형상을 가지는 구조물의 중고주파 소음진동 문제에 적용하기 위해서는 이를 유한요소법과 경계요소법에 접목할 필요가 있는데, 파워흐름해석법에 유한요소법을 적용한 파워흐름유한요소법(Power Flow Finite Element Method, PFFEM)은 서성훈등에 의해 1차원 및 2차원 부재로 이루어진 복합구조물의 진동문제를 대상으로 연구가 진행되고 있다. 한편 구조물의 방사소음 문제나 실내소음 문제 혹은 solid의 진동문제와 같은 경우에는 유한요소법보다 경계요소법을 적용하는 것이 일반적이는데 현재 파워흐름해석법과 경계요소법을 접목한 파워흐름경계요소법(Power Flow Boundary Method, PFBEM)에 대한 연구는 시도된 예가 없다.

본 논문에서는 파워흐름경계요소법을 복합구조물의 중고주파 소음진동 문제에 적용하기 위한 기초 연구로서 1차원 및 2차원 문제에 대해 파워흐름경계요소법을 직접적인 방법(Direct PFBEM)과

* 서울대학교 조선해양공학과

** 서울대학교 조선해양공학과 대학원

*** 수원대학교 기계공학과

간접적인 방법(Indirect PFBEM)으로 분리하여 정식화하고 단순보와 단일평판의 진동 문제에 수치적으로 적용해보았다.

II. 파워흐름해석법(PFA)

구조물의 단위 부피요소에 입력되는 진동파워 Π_{in} 는 정상상태($\partial/\partial t=0$)일 경우 요소 경계를 통해 외부로 전달되는 파워 q 와 내부에서 손실되는 파워 p_{diss} 의 합이 된다.

$$\nabla \cdot q + p_{diss} = \Pi_{in} \quad (1)$$

만약 요소내의 에너지 밀도 e 에 비해 내부손실에너지가 작으면 한주기에 대한 평균 손실파워는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$p_{diss} = \eta\omega e \quad (2)$$

여기서 ω 는 주파수이고 η 는 구조감쇠에 의한 내부손실계수이다. 한편 파워흐름해석법에서는 등방성 매질에서 진동에너지가 열에너지의 흐름처럼 에너지 밀도가 높은 곳에서 낮은 곳으로 전달된다고 가정하여 다음과 같은 에너지 전달관계식을 가진다.

$$q = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla e \quad (3)$$

여기서 c_g 는 파동의 군속도이다. 에너지 평형법칙을 나타내는 식(1)에 에너지 손실관계인 식(2)와 에너지 전달관계인 식(3)을 대입하면 다음과 같이 2차 편미분방식의 형태인 에너지지배방정식을 구할 수 있다.

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 e + \eta\omega e = \Pi_{in} \quad (4)$$

III. 파워흐름경계요소법(PFBEM)

3.1 1차원 문제에 대한 정식화

3.1.1 직접적인 방법(Direct PFBEM)

본 절에서는 파워흐름경계요소법을 1차원 문제에 대해 정식화한다. 1차원 구조물의 진동에 대한 에너지지배방정식은 다음과 같다.

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \frac{d^2 e}{dx^2} + \eta\omega e = \Pi_{in} \quad (5)$$

한편 다음의 적분식은 식 (5)와 같은 의미를 가지게 된다.

$$\int_0^L \left(-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \frac{d^2 e}{dx^2} + \eta\omega e - \Pi_{in} \right) G dx = 0 \quad (6)$$

여기서 L 은 구조물의 길이이고 G 는 다음과 같이 입력파워가 Dirac delta 함수일 때 식 (5)의 해가 된다.

$$G(x; \xi) = \frac{1}{2c_g} \exp \left[-\frac{\eta\omega}{c_g} |x - \xi| \right] \quad (7)$$

진동에너지밀도는 식 (6)을 정리하면 다음과 같다.

$$e(\xi) = -[G(L; \xi)q(L) - G(0; \xi)q(0)] + [F(L; \xi)e(L) - F(0; \xi)e(0)] + \int_0^L \Pi_{in}(x)G(x; \xi)dx \quad (8)$$

여기서 F 는 식 (9)와 같이 진동원과 관찰점의 위치에 따라 결정된다.

$$F(x; \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \exp(-\frac{\eta\omega}{c_g}(\xi-x)), & \xi > x \\ \frac{1}{2} \exp(-\frac{\eta\omega}{c_g}(\xi-x)), & \xi < x \end{cases} \quad (9)$$

한편 인텐시티는 에너지 전달관계식으로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$q(\xi) = \frac{c_g^2}{\eta\omega} \{ [G'(L; \xi)q(L) - G'(0; \xi)q(0)] - [F'(L; \xi)e(L) - F'(0; \xi)e(0)] - \Pi_{in}(x)G'(x; \xi) \} \quad (10)$$

만약 경계조건이 에너지밀도로 주어지면 관찰점을 경계점에 두고 식 (8)을 이용하여 경계에서의 인텐시티를 구하고 경계조건이 인텐시티로 주어지면 식 (10)으로부터 경계에서의 에너지밀도를 구한다. 마지막으로 경계값들이 결정되면 다시 식 (8)과 (10)을 이용하여 구조물내의 에너지와 인텐시티의 분포가 얻어지게 된다.

3.1.2 간접적인 방법(Indirect PFBEM)

경계요소법의 간접적인 방법에서는 유한차원의 실제 시스템을 무한영역으로 확장하고 시스템의 경계에 가상의 가진원(fictitious source)이 존재한다고 가정한다. 이 개념을 길이가 L 인 1차원 구조물에 적용하면 구조물에서의 에너지 밀도와 인텐시티는 식 (11)과 식 (12)로 각각 표현된다.

$$e(x) = G(x; 0)\Phi(0) + G(x; \xi)\Pi_{in} + G(x; L)\Phi(L) \quad (11)$$

$$q(x) = F(x,0)\Phi(0) + F(x,\xi)\Pi_{in} + F(x,L)\Phi(L) \quad (12)$$

여기서 함수 G 와 F 는 각각 식 (7)과 식 (9)에서 x 와 ξ 를 상호 치환한 형태와 같다. Φ 는 경계에서의 가상의 가진원을 의미한다.

만약 경계조건으로 에너지밀도가 주어지면 식 (11)을 이용하고 인텐시티가 주어지면 식 (12)를 이용해서 경계에서의 가상 가진원 $\Phi(0)$ 과 $\Phi(L)$ 을 구하고 이들을 다시 식 (11)과 (12)에 대입하면 구조물내에서의 에너지밀도와 인텐시티의 분포를 얻을 수 있다.

3.2 2차원 문제에 대한 정식화

3.2.1 직접적인 방법

등방성 매질의 2차원 문제에 대한 에너지지배방 정식은 다음과 같이 2차 편미분방정식의 형태를 지닌다.

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 e(x) + \eta\omega e(x) = \Pi_{in}(x) \quad (13)$$

다음의 적분식은 식 (13)과 같은 의미를 가지게 된다.

$$\int_A \left(-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 e + \eta\omega e - \Pi_{in} \right) G dA = 0 \quad (14)$$

여기서 A 는 관심영역의 면적이고, G 는 자유공간 Green 함수이며 다음과 같이 입력과위가 Dirac delta 함수일 때 해가 된다.

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 G + \eta\omega G = \delta(x - \xi) \quad (15)$$

한편 식 (14)는 관심영역 A 에 대해 면적분을 수행해야 되는데 이는 Green의 항등이론을 적용하여 관심영역을 둘러싼 경계에 대한 선적분으로 전환해줄 수 있다. 먼저 식 (14)의 좌변의 처음 두개 피적분항은 식 (15)를 이용하여 식 (16)과 같이 전환될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_A -\frac{c_g^2}{\eta\omega} G \nabla^2 e(x) + \eta\omega e(x) G dA \\ &= -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \int_A G \nabla^2 e(x) - e(x) \nabla^2 G dA \\ & \quad + \int_A e(x) \delta(x - \xi) dA \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 식 (16)의 첫번째 적분항은 Green의 항등이론을 이용하여 선적분으로 변환한다.

$$\begin{aligned} & -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \int_A G \nabla^2 e - e \nabla^2 G dA \\ &= -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \int_S (G \nabla e(x) - e(x) \nabla G) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (17)$$

식 (16)의 두번째 적분항은 Dirac delta 함수의 성질에 의해 다음과 같다.

$$\int_A e(x) \delta(x - \xi) dA = e(\xi) \quad (18)$$

따라서 식 (13)의 해인 에너지 밀도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} e(\xi) &= \frac{c_g^2}{\eta\omega} \int_S (G \nabla e(x) - e(x) \nabla G) \cdot \mathbf{n} dS \\ & \quad + \int_A G \Pi_{in}(x) dA \end{aligned} \quad (19)$$

여기서

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla e(x) \cdot \mathbf{n}(x) = q_n(x), \quad (20)$$

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla G \cdot \mathbf{n}(x) = F \quad (21)$$

을 이용하여 식 (19)를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} e(\xi) &= \int_S e(x) F dS - \int_S q_n(x) G dS \\ & \quad + \int_A \Pi_{in}(x) G dA \end{aligned} \quad (22)$$

한편 함수 G 와 F 는 식 (15)와 식 (21)로부터 다음과 같다.

$$G(x, \xi) = \frac{\eta\omega}{2\pi c_g^2} K_0(z) \quad (23)$$

$$F(x, \xi) = \frac{\eta\omega}{c_g} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{2\pi r} K_1(z) \quad (24)$$

여기서 $K_0(z)$ 와 $K_1(z)$ 은 2종 Bessel 함수이며 z 는 $(\eta\omega/c_g)|\mathbf{x} - \xi|$ 이다. 인텐시티는 에너지 전달관계식으로부터 계산할 수 있고 인텐시티의 각 방향 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_{\xi_1}(\xi) &= -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \left\{ \int_S e(x) \frac{\partial F}{\partial \xi_1} - q_n(x) \frac{\partial G}{\partial \xi_1} dS \right. \\ & \quad \left. + \int_A \Pi_{in}(x) \frac{\partial G}{\partial \xi_1} dA \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} q_{\xi_2}(\xi) &= -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \left\{ \int_S e(x) \frac{\partial F}{\partial \xi_2} - q_n(x) \frac{\partial G}{\partial \xi_2} dS \right. \\ & \quad \left. + \int_A \Pi_{in}(x) \frac{\partial G}{\partial \xi_2} dA \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

한편 함수 F 를 포함하는 적분항은 관찰점이 경계상에 위치할 경우 강한 특이값(strongly singular value)을 가지기 때문에 적분이 불가능하고 이 경우에는 특이값을 별도로 고려해야 되는데 경계선이 부드러운 형상이라면 경계선상에서의 관찰점의 에너지밀도는 다음과 같이 표현된다.

$$e(\xi_0) = \frac{1}{2} e(\xi_0) + \int_S e(x, y) F dS - \int_S q_n(x, y) G dS + \int_A \Pi_{in}(x, y) G dA \quad (27)$$

이때의 F 를 포함한 적분항은 적분가능하게 된다.

3.2.2 간접적인 방법

1차원 문제와 같이 유한한 차원의 실제 관심영역을 무한영역으로 확장하는 대신 경계선상에 가상 가진원이 분포해 있다고 가정하면 에너지밀도와 경계선에서의 인텐시티의 경계에 대한 수직방향 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$e(x) = \int_S G \phi(\xi) dS + \int_A G \Pi_{in}(\xi) dA \quad (28)$$

$$q_n(x) = \int_S F \phi(\xi) dS + \int_A F \Pi_{in}(\xi) dA \quad (29)$$

여기서 함수 G 와 F 는 각각 식 (23)과 식 (24)와 같은 형태이다. 경계에서의 가상 가진원 $\phi(\xi)$ 은 1차원 문제와 같이 경계조건의 성질에 따라 식 (28)과 식 (29)를 이용하여 구할 수 있는데 이때 적분시 특이값의 영향을 고려해줘야 한다. 구해진 값을 이용하면 관심영역내의 에너지밀도는 식 (28)으로부터 얻어질 수 있고 인텐시티의 각 방향 성분은 다음의 식들로부터 구할 수 있다.

$$q_x(x) = \int_S H_1 \phi(\xi) dS + \int_A H_1 \Pi_{in}(\xi) dA \quad (30)$$

$$q_y(x) = \int_S H_2 \phi(\xi) dS + \int_A H_2 \Pi_{in}(\xi) dA \quad (31)$$

여기서 함수 H_1 과 H_2 는 다음과 같다.

$$H_1(x, \xi) = \frac{\eta\omega}{c_g} \frac{(x-\xi_1)}{2\pi r} K_1(z) \quad (32)$$

$$H_2(x, \xi) = \frac{\eta\omega}{c_g} \frac{(y-\xi_2)}{2\pi r} K_1(z) \quad (33)$$

IV. 수치적 적용 예

4.1 1차원 단순보의 진동

양단이 단순지지된 단순보가 수직 하중에 의해 횡진동하고 있다고 가정하면 이때 양단에는 더이상 연결된 부재가 없기 때문에 Fig. 1과 같이 흘러나가는 파워가 없다고 가정할 수 있다. 보의 재질은 알루미늄이며, 길이는 12m, 가진원의 위치는 $x=4m$ 라 하고 가진주파수를 1kHz, 구조물의 감쇠계수를 0.02라고 가정하였다.

Fig. 4(a)는 에너지지배방정식으로부터 직접 구해진 보에서의 에너지밀도의 분포이고 Fig. 4(b)와 4(c)는 각각 파워흐름경계요소법의 직접적인 방법과 간접적인 방법으로부터 얻어진 에너지밀도 분포이다. Fig. 4로부터 파워흐름경계요소법으로부터 예측된 에너지 분포가 에너지지배방정식의 엄밀해와 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 5는 인텐시티의 분포를 비교한 그림인데 인텐시티도 엄밀해와 파워흐름경계요소법의 해가 잘 일치함을 알 수 있다.

4.2 2차원 평판의 진동

먼저 Fig. 2와 같이 직사각형 형상의 평판에 대해 에너지지배방정식의 해를 Fourier 급수로 구하고 이를 파워흐름경계요소법으로부터 얻어진 결과와 비교해보았다. 이때 입력파워가 Fig. 2와 같이 경계에 있고 경계의 나머지 부분은 파워의 출입이 없다고 가정한다. 평판의 재질은 알루미늄으로서 두께는 1mm이고 가로와 세로의 길이는 모두 1m로 하였다. 파워가 입력되는 위치는 $x=0m$, $y=0.525m$ 이다.

Fig. 6은 급수로 계산한 PFA 해와 PFBEM 해를 비교한 그림들이다. 이때 주파수는 1kHz이고 감쇠계수는 0.2로 하였다. 급수계산에는 결과의 수렴성을 고려하여 4900개를 사용하였고, PFBEM에 사용된 경계요소는 80개의 균일요소이다. 적분계산에는 4개의 적분점을 이용한 Gauss 적분법을 사용하였다. Fig. 7은 주파수를 1kHz로 하고 감쇠계수를 0.02로 낮춘 경우 파워흐름유한요소법의 직접적인 방법으로 얻어진 에너지밀도와 인텐시티의 분포를 나타내는 그림이다.

직사각형 평판보다 일반적인 경우로서 Fig. 3과 같은 "L"형 평판에 대해 파워흐름경계요소법을 적용해서 평판의 진동 에너지밀도와 인텐시티의 분포를 살펴본다. 파워흐름경계요소법에 사용된 요소는 80개이고 Gauss 적분법을 적용하였으며 적분점은 각 요소당 4개를 사용하였다. 가진점은 Fig. 3

과 같은 위치로 하였다. 주파수에 따른 에너지 분포의 경향을 살펴보기 위해 주파수는 1kHz와 10kHz로 두 종류로 하고 감쇠계수는 0.01로 하였고 Fig. 8은 파워흐름경계요소법의 직접적인 방법을 통해 얻어진 에너지 밀도의 분포를 나타낸 그림이다. Fig. 9는 파워흐름경계요소법의 직접적인 방법을 적용해서 얻어진 인텐시티 분포를 주파수에 따라 비교한 그림이다.

Fig. 10은 입력파워의 분포를 평판의 오른쪽 경계선에 모두 분포시켰을 때 파워흐름경계요소법의 간접적인 방법을 통해 얻어진 에너지 밀도의 분포를 비교한 그림이다. 이때 가진 주파수는 5kHz이고 감쇠계수는 0.01과 0.1로 달리하였다. 이를 통해 감쇠계수의 차이에 따른 진동 에너지 분포의 차이를 관찰할 수 있다. Fig. 11은 인텐시티의 분포를 통해 에너지 전달 경로를 살펴본 그림이다.

V. 결론

본 논문에서 일반 구조물의 중고주파 진동문제와 방사소음 및 실내소음을 효과적으로 해석하기 위해 파워흐름해석법에 경계요소법을 접목한 파워흐름경계요소법(PFBEM)의 기초 연구로서 1차원 문제와 2차원 문제에 대해 파워흐름경계요소법의 직접적인 방법과 간접적인 방법을 정식화하고 이들을 단순보와 직사각형평판 및 "L"형 평판의 횡진동 문제에 대해 수치적으로 적용하였다. 수치적분은 Gauss 적분법을 통해 수행하였으며 파워흐름경계요소법에 의해 예측된 결과들은 1차원 문제의 경우 에너지배방정식의 엄밀해와 비교하였고 2차원 문제의 경우 중복 Fourier 급수해와 비교하였다.

참고문헌

1. D.J. Nefske, S.H. Sung, 1989, "Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems : Basic Theory and Application to Beams," J. Vib. Acoustics, Stress and Reliability in Design, 111, pp.94-100.
2. J.C. Wohlever, R.J. Bernhard, 1992, "Mechanical Energy Flow Models of Rods and Beams," J. Sound Vib., 153(1), pp.1-19.
3. L. Cremer, M. Heckl, E.E. Ungar, 1973, Structure-Borne Sound, Springer-Verlag, Berlin.
4. O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, 1992, "Models of

Space-Averaged Energetics of Plates," AIAA J., 30(3), pp.616-623.

5. O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, 1995, "Simple Models of the Energetics of Transversely Vibrating Plates," J. Sound Vib., 182(1), pp.149-164.

6. P.E. Cho, 1993, "Energy Flow Analysis of Coupled Structures," Ph.D. Dissertation, Purdue University.

7. P.K. Banerjee, 1994, The Boundary Element Methods in Engineering, Mcgraw-Hill.

8. W.S. Hall, 1994, The Boundary Element Method, Kluwer Academic Publishers.

9. 박도현, 1999, "연성된 평판 및 상자형 구조물의 진동 파워흐름해석", 공학석사학위논문, 서울대학교.

10. 박도현, 홍석운, 길현권, 1999, "직교이방성 평판에 대한 진동 파워흐름모델 개발," 대한조선학회 추계학술대회논문집, pp.556-562.

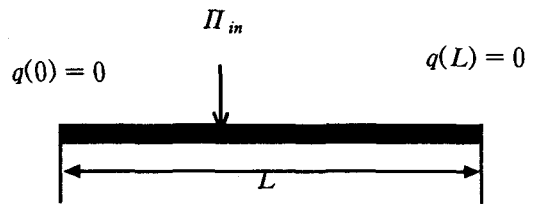


Fig. 1 Simple beam problems

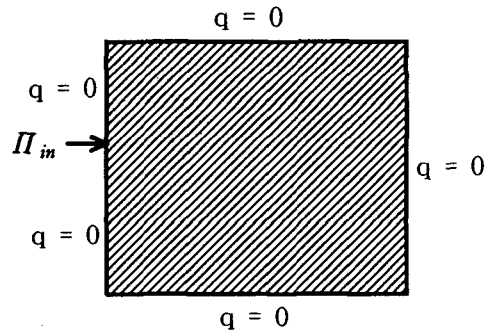


Fig. 2 Rectangular plate problems

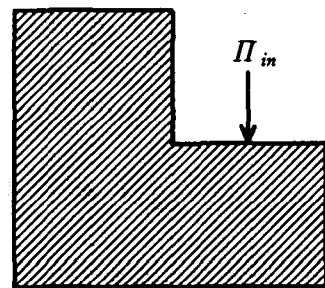


Fig. 3 L-type plate problems

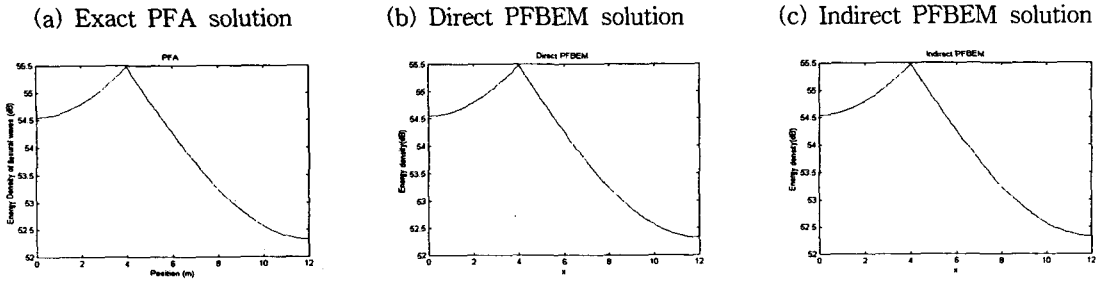


Fig. 4 Energy density(dB) distributions

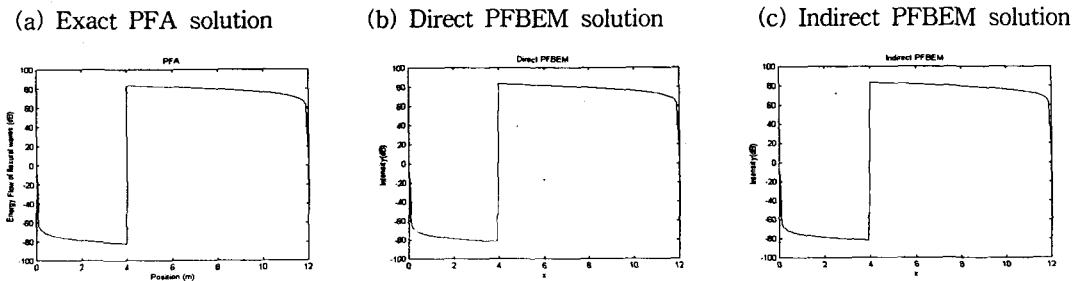


Fig. 5 Intensity(dB) distributions

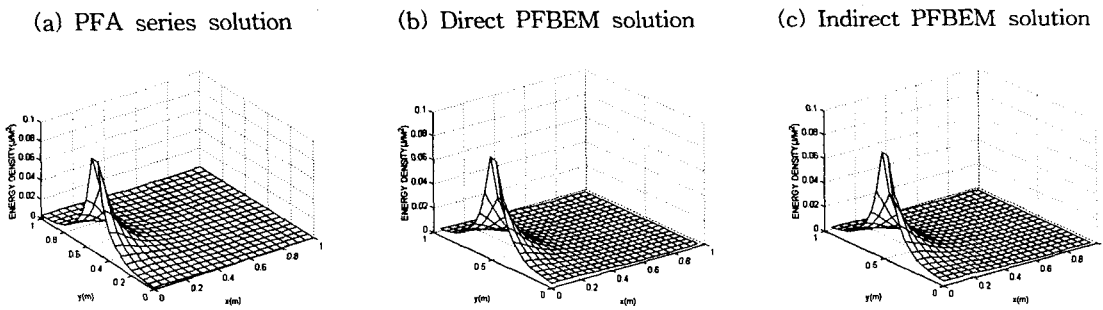


Fig. 6 Energy density(J/m²) distributions (f=1kHz, $\eta=0.2$)

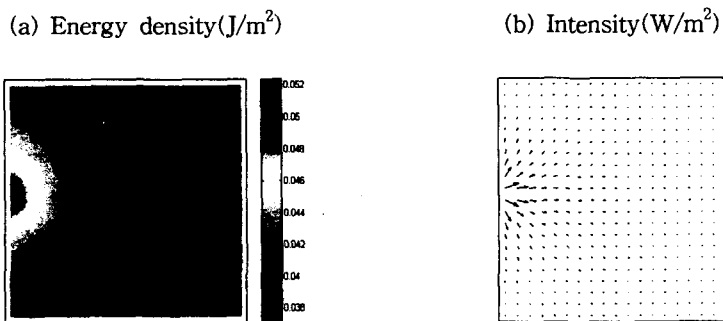


Fig. 7 Energy and intensity distributions predicted by Direct PFBEM (f=1kHz, $\eta=0.02$)

(a) Energy density(J/m^2) at $f=1kHz$ (b) Energy density(J/m^2) at $f=10kHz$

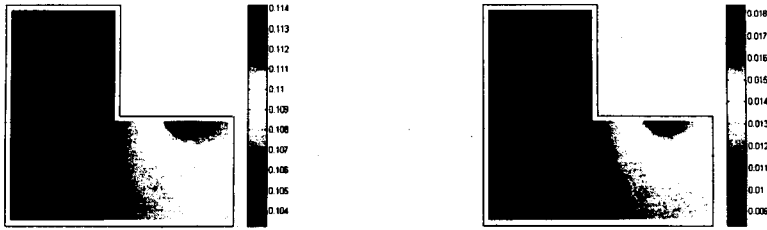


Fig. 8 Energy density distributions predicted by Direct PFBEM ($\eta=0.01$)

(a) Intensity(W/m^2) at $f=1kHz$ (b) Intensity(W/m^2) at $f=10kHz$

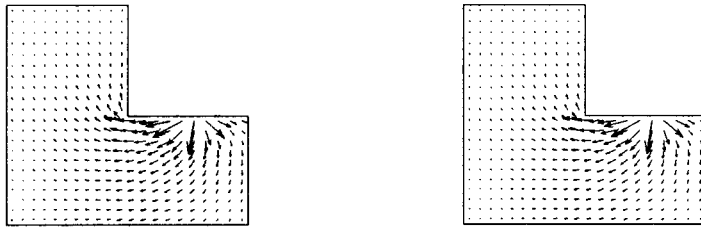


Fig. 9 Intensity distributions predicted by Direct PFBEM ($\eta=0.01$)

(a) Energy density(J/m^2) when $\eta=0.01$ (b) Energy density(J/m^2) when $\eta=0.1$

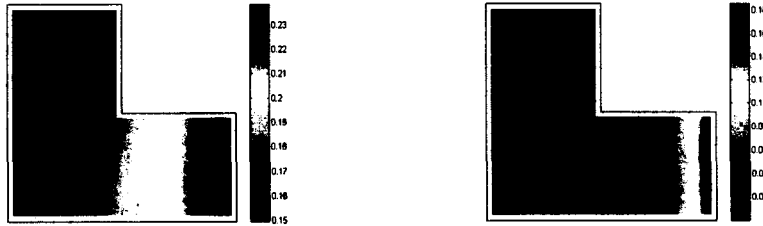


Fig. 10 Energy density distributions predicted by Indirect PFBEM ($f=5kHz$)

(a) Intensity(W/m^2) at $\eta=0.01$ (b) Intensity(W/m^2) at $\eta=0.1$

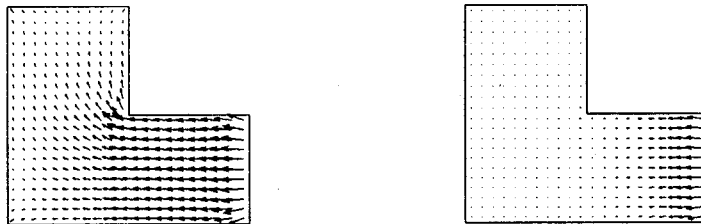


Fig. 11 Intensity distributions predicted by Indirect PFBEM ($f=5kHz$)