비정규 공정능력 측도에 관한 연구
A Study on a Measure for Non-Normal Process Capability

김 홍 준* 김 진 수** 조 남 호***

ABSTRACT

All indices that are now in use assume normally distributed data, and any use of the indices on non-normal data results in inaccurate capability measurements. Therefore, C_s is proposed which extends the most useful index to date, the Pearn-Kotz-Johnson C_{pmk}, by not only taking into account that the process mean may not lie midway between the specification limits and incorporating a penalty when the mean deviates from its target, but also incorporating a penalty for skewness. Therefore we propose, a new process capability index $C_{psk}(WV)$ applying the weighted variance control charting method for non-normally distributed.

The main idea of the weighted variance method(WVM) is to divide a skewed or asymmetric distribution into two normal distribution from its mean to create two new distributions which have the same mean but different standard distributions. In this paper we propose an example, a distribution generated from the Johnson family of distributions, to demonstrate how the weighted variance-based process capability indices perform in comparison with another two non-normal methods, namely the Clements and the Wright methods. This example shows that the weighted variance-based indices are more consistent than the other two methods in terms of sensitivity to departure to the process mean/median from the target value for non-normal process.

* 대구산업정보대학 산업안전보건과

** 한밭대학교 산업경영공학과

*** 건국대학교 산업공학과

Ⅰ.서론

본 논문에서는 비정규공정 데이터를 나타내는데 가장 보편적으로 사용되고 있는 Pearson 시스템을 이용하여 비정규공정에 대한 새로운 공정능력 측도인 $C_{psk}(WV)$를 제안하여, 비정규공정의 사례에 적용시켜, 보다 비정규공정의 공정능력을 올바르게 나타내는 공정능력지수임을 입증하려고 한다. 비정규분포에 대한 공정능력지수 계산은 Clements(1989)에 의해 최초로 소개되었다. 그 후 비정규 Pearson 모집단에 대한 Clements방법을 적용한 제 2·제 3세대 공정능력지수 계산은 Pearn과 Kotz(1994~5)에 의해 실시되어 왔다. 따라서 본 연구에서 제안하는 가중분산에 기초한 공정능력지수 $C_{psk}(WV)$는 Clements 방법을 제 4세대 공정능력지수 계산에까지 확장시킨 개념과 유사하다. 예제로 $C_{psk}(WV)$를 Johnson 시스템의 S_B곡선을 사용하여 다른 2가지 비정규 공정능력지수와 현 공정능력지수와도 비교하여 $C_{psk}(WV)$가 가장 민감한 지수로써 비정규공정의 공정능력을 가장 올바르게 반영하고 있는 측도임을 확인하고자 한다.

Ⅱ. 정규공정에 대한 공정능력지수

공정능력지수들을 개발된 순으로 나타내면 식(2.1)~식(2.6)과 같다.

$$C_p = \frac{USL-LSL}{6\sigma} \tag{2.1}$$

$$C_{pk} = \min\left(\frac{USL-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-LSL}{3\sigma}\right) = \min(C_{pu}, C_{pl}) \tag{2.2}$$

$$C_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.3}$$

$$C_{pm}^{*} = \frac{\min(USL-T, T-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.4}$$

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL-\mu, \mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.5}$$

$$C_{psk} = \frac{\min(USL-\mu-|\mu-T|, \mu-LSL-|\mu-T|)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.6}$$

여기서 μ는 공정의 평균, σ^2은 공정의 분산, USL, LSL및 T는 각각 공정의 규격 상한치, 규격 하한치 및 목표치를 나타낸다.

Ⅲ. 비정규공정에 대한 공정능력지수

3.1 Pearson 시스템에 의한 공정능력지수: C_{psk}

C_p값을 추정하기 위해서 식(2.1)에서 Clements는 6σ 대신 $U_p - L_p$로 교체하여 식(3.1)과 같이 나타낸다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{U_p - L_p} \tag{3.1}$$

여기서 U_p는 99.865 백분위수이고, L_p는 0.135 백분위수인 점의 값을 나타낸다. C_{pk}도 동일한 접근으로 식(2.2)에서 $USL-\mu$ 대신에 $USL-M_e$로, $\mu-LSL$ 대신에 M_e-LSL로 변경되며, 3σ도 각각 U_p-M_e, M_e-L_p로 되어 식(3.2)와 같다.

$$C_{pk} = \min\left[\frac{USL-M_e}{U_p-M_e}, \frac{M_e-LSL}{M_e-L_p}\right] = \min(C_{pu}, C_{pl}) \tag{3.2}$$

C_{pm}, C^*_{pm}, C_{pmk}를 Pearson 과 Kotz(1994~5)의 방법으로 나타내면 식(3.3)~식(3.5)와 이 된다.

$$C_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{\left(\frac{U_p-L_p}{6}\right)^2 + (M_e-T)^2}} \tag{3.3}$$

$$C^*_{pm} = \frac{\min[USL-T, T-LSL]}{3\sqrt{\left(\frac{U_p-L_p}{6}\right)^2 + (M_e-T)^2}} \tag{3.4}$$

$$C_{pmk} = \min\left[\frac{USL-M_e}{3\sqrt{\left(\frac{U_p-M_e}{3}\right)^2 + (M_e-T)^2}}, \frac{M_e-LSL}{3\sqrt{\left(\frac{M_e-L_p}{3}\right)^2 + (M_e-T)^2}}\right]. \tag{3.5}$$

본 연구에서는 Clements의 방법을 제 4세대 공정능력지수에까지 확장시킨 결과, 새로운 공정능력지수인 C_{psk}를 식(3.6)으로 나타낼 수 있다.

$$C_{psk} = \min\left[\frac{USL-M_e-|M_e-T|}{3\sqrt{\left(\frac{U_p-M_e}{3}\right)^2 + (M_e-T)^2}}, \frac{M_e-LSL-|M_e-T|}{3\sqrt{\left(\frac{M_e-L_p}{3}\right)^2 + (M_e-T)^2}}\right] \tag{3.6}$$

3.2 Johnson 시스템에 의한 공정능력지수

비정규공정에 대한 공정능력지수의 정의를 일반화시킬 때의 C_p는 식(3.1)과 같다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{U_p - L_p}$$

C_{pk}인 경우의 일반화는 식(2.2)을 규격 한계치인 LSL과 USL을 Johnson 변환을 통하여 Z_L과 Z_U 값으로 치환하여 식(3.7)과 같이 나타낸다.

$$C_{pk} = \min\left(-\frac{Z_L}{3}, \frac{Z_U}{3}\right) \tag{3.7}$$

3.3 왜도에 민감한 공정능력지수: C_s

$$C_s = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2 + |\mu_3/\sigma|}}$$

$$= \frac{d - |\mu - T|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2 + |\mu_3/\sigma|}} \tag{3.8}$$

여기서 μ_3는 비대칭항을 신뢰하기 위하여 분모에 있는 다른 항과 동일한 단위로 되도록 σ로 나누며 절대값은 음의 비대칭을 신뢰시키고 또한 지수에 손실을 부과시킨다. 그리고 C_s의 각 항을 σ로 나누면 식(3.9)와 같이 된다.

$$C_s = \frac{d/\sigma - |(\mu - T)/\sigma|}{3\sqrt{1 + \{(\mu - T)/\sigma\}^2 + |\beta_1^{1/2}|}} \tag{3.9}$$

여기서 $\sqrt{\beta_1} = \mu_3/\sigma^3$은 왜도의 전통적 표준화된 측도이다.

3.4 가중분산에 기초한 공정능력지수

가중분산법(the weighted variance method : WVM)의 주된 개념은 동일한 평균과 상이한 표준편차를 갖는 2개의 새로운 분포를 만드는 것을 의미하는 것으로 즉, 편의 혹은 비대칭분포를 2개의 정규분포로 분할하는 것이다. WVM은 가정하는 모집단이 편의 되었을 때 적용하는 관리도는 Choobinch & Ballard(1987)에 의해 소개되었고 그 개념은 Choobinch & Branting(1986)의 반분산 근사에 기초한다. 따라서 가중분산에 기초한 공정능력지수들은 정규공정에 대한 공정능력지수들을 다음과 같이 수정하여 나타낼 수 있다.

$$\hat{C}_p(WV) = \frac{USL - LSL}{3(s_1 + s_2)} \tag{3.10}$$

여기서

$$s_1^2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2}{2n_1 - 1} \tag{3.11}$$

로 측정치가 $\overline{X}$와 같거나 작은 n_1 관측으로부터의 샘플 표준편차 s_1을 계산할 수 있다. 또한, $\overline{X}$보다 큰 n_2 관측으로부터의 샘플 표준편차 s_2는 다음과 같이 나타낸다.

$$s_2^2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n_2}(X_i - \overline{X})^2}{2n_2 - 1} \tag{3.12}$$

한편, 목표치(T)로부터 샘플 표준편차 S_{T1}과 S_{T2}는 다꾸씨 불편추정량을 고려함으로써 다음과 같이 나타낸다.

$$S_{T1}^2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - T)^2}{2n_1} = \frac{2n_1 - 1}{2n_1} s_1^2 + (\overline{X} - T)^2 \tag{3.13}$$

$$S_{T2}^2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n_2}(X_i - T)^2}{2n_2} = \frac{2n_2 - 1}{2n_2} s_2^2 + (\overline{X} - T)^2 \tag{3.14}$$

$$\hat{C}_{pk}(WV) = \min\left[\frac{\overline{X} - LSL}{3s_1}, \frac{USL - \overline{X}}{3s_2}\right] \tag{3.15}$$

$$\hat{C}_{pm}(WV) = \frac{USL - LSL}{3(S_{T1} + S_{T2})} \tag{3.16}$$

$$\hat{C}_{pm}^{*}(WV) = \min\left[\frac{T - LSL}{3S_{T1}}, \frac{USL - T}{3S_{T2}}\right] \tag{3.17}$$

$$\hat{C}_{pmk}(WV) = \min\left[\frac{\overline{X} - LSL}{3S_{T1}}, \frac{USL - \overline{X}}{3S_{T2}}\right] \tag{3.18}$$

$$\hat{C}_{psk}(WV) = \min\left[\frac{\overline{X} - LSL - |\overline{X} - T|}{3S_{T1}}, \frac{USL - \overline{X} - |\overline{X} - T|}{3S_{T2}}\right] \tag{3.19}$$

Ⅳ. 비교분석 및 고찰

본 연구에서 제안하는 비정규공정의 공정능력지수인 C_{psk}의 우수함을 입증하기 위하여 Pearson 시스템 곡선의 대안으로 개발된 Johnson 시스템의 S_B곡선인 경우의 공정능력지수와 왜도에 민감하게 개발된 C_s 및 현 공정능력지수를 비교 분석한다. 수치예제는 Hahn and Shapiro(1967)가 제시한 예제를 인용한다. <표 4.1>은 $LSL=0.4$, $USL=0.9$인 공정으로부터 $T=0.5\Omega$ 저항을 500개 측정한 데이터를 도수분포표로 정

리하여 나타내었다.

<표 4.1> 0.5 Ω 저항를 500개 측정하여 정리한 도수분포표(단위 : ohm)

N0	중앙값	도수	S_B
1	0.4미만	4	6.5
2	0.425	33	36.1
3	0.475	78	74.1
4	0.525	99	93.8
5	0.575	87	90.4
6	0.625	76	73.0
7	0.675	51	52.0
8	0.725	32	33.7
9	0.775	21	19.9
10	0.825	7	10.9
11	0.875	5	5.5
12	0.9초과	7	4.1
합계		500	500
χ^2의 값			3.64

4.1 Pearson(Clement방법)에 의한 공정능력지수 계산

공정능력지수 값을 구한 결과는 <표 4.2>와 같다.

4.2 Johnson 시스템에 의한 공정능력지수 계산

공정능력지수 값을 구한 결과는 <표 4.2>와 같다.

4.3 왜도에 민감한 공정능력지수(C_s) 및 가중분산에 기초한 공정능력지수 계산

이 2가지 공정능력지수 계산의 결과를 <표 4.2>에 정리하였다. 이 공정은 규격을 벗어나고 있고 또한 공정의 평균과 메디안이 각각 목표치를 약간벗어나고 있어 지속적인 품질개선이 요구된다. 이러한 내용을 반영 시켜주는 $\hat{C}_{psk}$의 값은 정규공정일 때 0.24로 비정규공정의 Pearson 시스템인 경우 0.25와 거의 같고, 본 논문에서 새롭게 제안된 WVM의 경우 0.30은 Johnson시스템의 경우 0.31과 유사하여 두 시스템간의 차는 거의 없다고 판단된다. <표 4.2>에서 알 수 있듯이 목표치를 벗어남을 감지하는 감도의 우수성은 $T=M$인 경우 Pearson과 Johnson 방법에서는 C_{psk}가 C^*_{pm} 보다 감도가 조금 떨어지나. 본 논문에서 제안하는 비정규공정에 대한 새로운 공정능력지수 $C_{psk}(WV)$는 $T=M$인 경우에 C^*_{pm}보다는 감도가 결코 떨어지지 않고, 특히 왜

<표 4.2> 정규 및 비정규 공정능력지수 계산 결과(( )는 최소값을 나타낸다.)

지수 / 공정분류 및 적용구분		$\hat{C}_p$	$\hat{C}_{pk}$		$\hat{C}_{pm}$	$\hat{C}^*_{pm}$	$\hat{C}_{pmk}$	$\hat{C}_s$	$\hat{C}_{psk}$
			$\hat{C}_{pl}$	$\hat{C}_{pu}$					
Normal		0.79	(0.60)	0.98	0.60	0.24	0.46	0.33	0.24
Non-Normal	*WVM*	1.08	(0.98)	1.15	0.70	0.30	0.57	-	0.30
	Pearson (Clements)	0.63	(0.56)	0.67	0.54	0.21	0.45	-	0.25
	Johnson	0.80	(0.74)	0.80	0.64	0.25	0.48	-	0.31
			(0.78)	0.85					
	Wright	-						0.33	-

도에 민감하게 개발된 C_s 보다 우수함을 보여주어 비정규공정의 공정능력을 올바르게 반영시키고 있음을 알 수 있다.

V. 결론

정규공정에 있어서 제 4세대 지수 C_{psk}는 목표치로부터 공정의 벗어남에 대한 여분의 손실로서 분자에 인자 $|\mu - T|$를 도입함으로써, C_{pmk}로 부터 만들어졌다. 목표치로부터 동일하게 떨어진 공정이라 하더라도 공정이 규격 한계치 이내에 있는 경우와 그렇지 못한 경우를 식별하기 위해서 C_{psk}가 제시되어 대칭인 경우와 비내칭인 경우, 공정이 목표치로부터 변화할 때 방향에 관계없이 실행되는 지수로 C_{psk}는 평가받고 있다. 현 공정능력 지수들은 정규분포의 가정 하에 개발되었기 때문에 비정규공정 데이터에 대해서는 적용하기가 힘들다. 그래서 Clements 방법은 이러한 전통적 공정능력지수들을 분위수들을 사용하여 재표현 함으로써 비정규공정에 대한 공정능력지수로 정의하는 것이다.

본 연구에서는 비정규공정에 대하여 Clements방법을 확장시켜 새로운 공정능력지수인 $C_{psk}(WV)$를 제안하여 Johnson 방법의 S_B곡선을 적용시켜 사례를 통해 살펴본 결과, 목표치 벗어남을 식별하는 감도는 *WVM*과 Johnson 방법과는 거의 일치함을 알

수 있었다. 앞으로 비정규 공정에 대한 Johnson 시스템의 S_L과도 비교해서 C_{psk}가 불량률의 측도로도 일관성 있게 비정규공정을 올바르게 평가하는 공정능력지수임을 보여 주어야 한다.

참고문헌

[1] Benson, E. D.(1994), "Statistical Properties of a System of Fourth-Generation Process Capability Indices C_{psk}(U,V,W)," Ph. D. Dissertation, University of Maryland.

[2] Boyles, R. A.(1991), "The Tagux Capability Index," *Journal of Quality Technology,* 23(1), pp. 17-26.

[3] Chan, L. K., Cheng, S. W., and Spiring, F. A.(1988), "A New Measure of Process Capability: C_{pm}," *Journal of Quality Technology,* 20(3), pp. 162 - 175.

[4] Choi, B. C., and Owen, D. B.(1990), "A Study of New Process Capability Index," *Communication in Statistics. -Theory and Method,* 19(4), pp. 1231 - 1245.

[5] Choobinch, F., Ballard, J. L.(1987), "Control-limits of QC Charts for Skewed Distribution using Weighted-Variance", IEEE Trans., REL-36, pp. 473-477

[6] Choobinch, F., Branting, D.(1986), "A Simple Approximation for semivariance", Eur. J. Oper. Res., 27, pp. 364-370

[7] Clements, J. A.(1989), " Process Capability Calculations for Non-normal Distributions," *Quality Process,* 22(9), pp. 95-100

[8] Farnum, N. R.(1996~7), "Using Johnson Curves to Describe Non-Normal Process Data," *Quality Engineering* , 9(2), pp. 329 - 336.

[9] Hahn, G. J., and Shapiro, S. S.(1967), "Statistical Models in Engineering," John Wiley & Sons, Inc., New York. p. 207.

[10] Johnson, N.(1949), "Systems of Frequency Curves Generated by Translation," *Biometrika,* 36, pp. 149 - 176.

[11] Kane, V.(1986), "Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology,* 18(1) , pp. 41 - 52.

[12] Lovelace, C. R.(1994), " The Development of a Process Capability Index for Non-Normal Processes Naturally Bound at Zero," Ph. D. Dissertation,

University of Alabama in Huntsville.

[13] Pearn, W. L., and Kotz, S.(1994~5), "Application of Clements' Method for Calculating Second-and-Third-Generation Process Capability Indices Non-Normal Pearsonian Population," *Quality Engineering*, 7(1), pp. 139-145.

[14] Pearn, W. L., Kotz, S., and Johnson, N. L.(1992), "Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, 24(4), pp. 216 - 231.

[15] Slifker, J. F., and Shapiro, S. S.(1980), "The Johnson System : Selection and Parameter Estimation," *Technometrics*, 22(2), pp. 239 - 246.

[16] Wright, P. A.(1995), "A Process Capability Index Sensitive to Skewness," *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 52, pp. 195-203.