

H_∞ 제어기법을 적용한 다중비 필터 뱅크의 설계

이상철^{*} · 박종우^{*} · 박계원^{*}
^{*}재능대학 정보통신계열

A Design of Mutirate Filter Banks using H_∞ Control Approach

Sang-cheol Lee^{*} · Jong-woo Park^{*} · Kye-won Park^{*}
^{*}Dept. of Information & Communication, Jaeneung College

요 약

다중비 필터뱅크의 합성 필터 설계 문제에 H_∞ 제어기법을 적용한다. 순수한 시간 지연 시스템을 기준 모델로 설정하여 이 지연 시스템과 다중비 필터 뱅크와의 오차 시스템을 고려한다. 설계 하고자 하는 합성 필터는 오차 시스템의 l_2 -유도된 노름을 최소화하도록 설계한다.

ABSTRACT

A H_∞ control theory is applied to the design problem of synthesis filters in a mutirate filter bank. We select a desired pure time-delay system as reference model, and then consider the error system between the mutirate filter bank and the reference model. The synthesis filters minimize the l_2 -induced norm of the error system.

1. 서 론

멀티미디어 통신 등에서 이용되는 음성 압축 알고리즘에 부대역 부호화(subband coding) 기법이 널리 사용되고 있다. 다중비 필터뱅크는 부대역 부호화에서 중요한 역할을 하고 있으며, 많은 연구가 이루어지고 있다 [1,2,3,4]. 특히, 다중비 필터뱅크에서의 완벽한 재구성(perfect reconstruction) 문제가 많이 다루어지고 있다 [5]. 또한, 현대 제어 이론에서는, 연속시간 L_2 -유도된 노름(induced-norm)의 최적 모델 정합(optimal model-matching)에 관한 이론이 정립되어 있다. 이 제어 이론은 H_∞ 제어 이론으로 알려져 있다 [6,7]. 더욱이, Shenoy 등은 이산시간 주기적 시변 시스템(discrete-time periodic time-varying system)에 대해서, 신호의 올림(lifting 혹은 blocking)을 통해 등가의 LTI 오차 시스템을 얻고, 이 시스템의 l_2 -유도된 노름 최적 모델정합 문제를 연구하였다 [8].

본 논문에서는 다중비 필터뱅크의 합성 필터 설계 문제에 H_∞ 제어기법을 적용한다. 이를 위해, 모델정합의 개념으로부터, 완벽한 재구성 시스템 조건을 만족하는 순수한 시간 지연 시스템을 기준 모델로 설정하여 이 지연 시스템과 다중비 필터 뱅크와의 오차 시스템을 고려한다. 이산시간 주기적 시변 시스템인 오차 시스템에 H_∞ 제어기법을 적용하여, 오차 시스템의 l_2 -유도된 노름을 최소화하도록 설계한다.

II. 다중비 필터 뱅크와 H_∞ 제어 문제

이 장에서는 다중비 필터 뱅크의 합성필터 설계문제를 H_∞ 제어 문제로 변환하여 합성필터를 설계하는 문제를 고려한다. 문제 설정을 위해서, 먼저, 그림 1의 다중비 필터 뱅크 시스템을 고려한다.

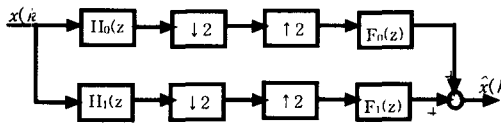


그림 1. 다중비 필터뱅크 시스템
Fig. 1 Multirate Filter Bank System

여기서, $H_0(z)$, $H_1(z)$, $F_0(z)$, 및 $F_1(z)$ 은 선형 시불변 필터(linear time-invariant filter)의 전달함수 이고, $\downarrow 2$ 는 인수 2의 다운 샘플러(down sampler)를 나타내며, $\uparrow 2$ 는 인수 2의 업 샘플러(upsampler)를 나타낸다.

이 시스템에서, 입력 신호 $x(k)$ 는 먼저, 해석 필터(analysis filter)인 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 에 의해 처리된다. 일반적으로, $H_0(z)$ 는 저역통과(lowpass)이고, $H_1(z)$ 는 고역통과(highpass)이다. 따라서, 이 필터들을 통해 나온 출력신호는 정보의 손실 없이 다운 샘플(downsample)할 수 있다. 다운 샘플된 신호는 다시 양자화(quantization)된 후에 통신채널을 통해 전송된다. 전송된 신호는 업샘플러와 합성필터(synthesis filter) $F_0(z)$, $F_1(z)$ 에 의해 신호 $x(k)$ 를 재구성한다.

입력 신호 $x(k)$ 가 이상적으로 재구성되는 경우 단순히 시간 지연 요소만을 갖게된다. 재구성 신호를 $\hat{x}(k)$ 로 표기하여, 어떤 정수 $m \geq 0$ 에 대하여 다음 식 (1)이 만족하면, 신호 $x(k)$ 는 완벽하게 재구성되었다고 한다.

$$\hat{x}(k) = x(k - m) \quad (1)$$

즉, $x(k)$ 에서 $\hat{x}(k)$ 로의 전달함수는 다음 식 (2)와 같은 선형 시불변 시스템이다.

$$T_d(z) = z^{-m} \quad (2)$$

그러나, 실제 다중비 필터뱅크 시스템은 업샘플러와 다운샘플러로 인하여 시변 시스템이 된다.

본 논문에서는, 해석필터는 이미 설계되어 있다고 가정하고, 필터 뱅크 시스템이 가능한 완벽한 재구성 신호를 만들 수 있도록 설계하는 데 목적을 둔다. 이를 위해서, 그림 2의 오차 시스템을 고려한다.

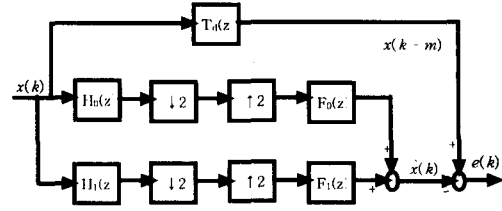


그림 2. 오차 시스템
Fig. 2 Error System

그림 2에서, $e(k)$ 는 이상적인 출력신호 $x(k-m)$ 과 실제 출력 $\hat{x}(k)$ 사이의 재구성 오차를 나타낸다. 이 오차 값이 작을수록, 설계된 필터뱅크가 이상적인 시스템에 가깝다는 것을 나타내므로 신호가 좀더 완벽에 가깝게 재구성된다.

그림 2의 오차 시스템에서, $x(k)$ 로부터 $e(k)$ 까지의 l_2 -유도된 노름을 다중비 필터 뱅크의 성능 척도로 사용한다. 즉, 본 논문에서 고려하는 성능 척도는 식(3)과 같다.

$$J = \sup_{\|x\|_2=1} \|e\|_2 \quad (3)$$

식(3)은 그림 2의 오차 시스템에 대한 H_∞ 노름과 같다. 따라서, 필터 뱅크의 합성필터 설계 문제를 H_∞ 최적화 문제로 변환함으로써, 식(3)을 최소화 시키는 합성 필터를 설계할 수 있다. 이렇게 설계된 필터 뱅크는, 식(2)에 가까운 시스템이라고 말할 수 있으므로, 입력 $x(k)$ 에 대하여, 출력 $\hat{x}(k)$ 를 완전히 가깝게 재구성 할 수 있게 된다.

그림 2의 시스템을 H_∞ 최적화 문제로 변환하기 위해서, 각각, 식(4)와 식(5)를 만족하는 2×2 행렬 $E(z)$ 와 $R(z)$ 를 고려한다.

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = E(z) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[F_0(z) \ F_1(z)] = [z^{-1} \ 1] R(z) \quad (5)$$

식(4) 및 식(5)의 관계에서, 행렬 $E(z)$ 과 $R(z)$ 은 시불변 시스템이다. 식(4)와 식(5)를 그림 2의 시스템에 적용하면, 그림 3과 같은 동가 시스템을 얻을 수 있다.

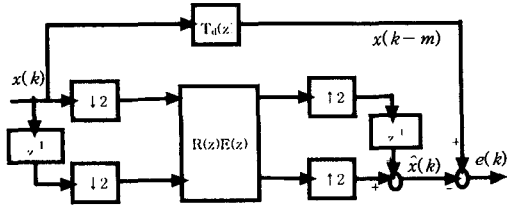


그림 3. 오차 시스템의 등가 시스템
Fig. 3 Equivalent system of Error System

그림 3의 시스템에서, 업 샘플러와 다운 샘플러로 인한 시변 시스템을 시불변 시스템으로 바꾸어 주기 위해서, 입력 신호와 출력 신호의 차수올림(lifting)을 적용한다. 입력과 출력에 차수올림을 적용한 신호는 식(6)과 같다.

$$v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

식(6)을 이용하여 그림 3의 등가 시스템을 다시 표현하면, 그림 4를 얻는다.

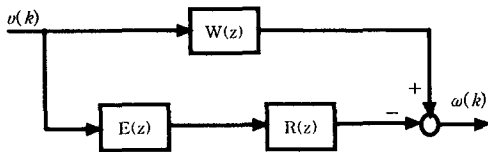


그림 4. 입출력에 차수올림을 적용한 시스템
Fig. 4 The system of Input and Output lifting

여기서, $E(z)$, $R(z)$ 은 시불변 시스템이고, $W(z)$ 는 그림 5와 같다.

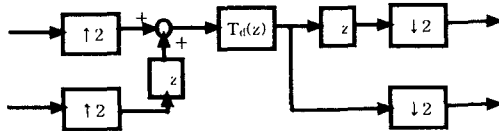


그림 5. 시스템 $W(z)$ 의 블록 선도
Fig. 5 The Block Diagram of $W(z)$ system

그림 5에서, $T_d = z^{-m}$ 이므로, $W(z)$ 은 식(7)과 같은 시불변 시스템임을 알 수 있다.

$$W(z) = \begin{cases} z^{-d} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{if } m = 2d + 1, \\ z^{-d} \begin{bmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \text{if } m = 2d \end{cases} \quad (7)$$

또한, 차수올림은 l_2 노름을 유지하기 때문에, 시변 특성을 갖는 그림 2의 오차 시스템에 대한 l_2 -유도된 노름은 그림 5의 차수올림이 적용된 시불변 시스템의 l_2 -유도된 노름과 같다. 즉, 입력 신호 $x(k)$ 로부터 출력 신호 $y(k)$ 로의 l_2 -유도된 노름은 $v(k)$ 에서 $\omega(k)$ 로의 l_2 -유도된 노름과 같다. 그러나, 식(6)에서 알 수 있듯이, 차수올림에 의해, 입출력 신호의 차원(dimension)이 올라감을 알 수 있다.

이제, 그림 4의 차수올림을 적용한 시스템에 대하여, 그림 7과 같은 H_∞ 최적화 문제를 적용한다.

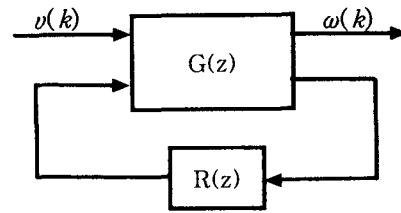


그림 6. H_∞ 최적화 문제
Fig. 6 The H_∞ Optimization Problem

여기서, 일반화 제어대상 $G(z)$ 은 식(8)과 같다.

$$G(z) = \begin{bmatrix} W(z) & -I \\ E(z) & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

결국, 그림 7의 H_∞ 최적화 문제에서 얻어진 $R(z)$ 으로부터, 식(4)에 의해 우리가 설계하고자 하는 필터를 얻을 수 있다.

III. 모 의 실험

설계된 필터의 성능을 확인하기 위해, 전형적인 IIR 필터와 비교하여, 모의 실험을 수행한다. 모의 실험을 위한 도구로는 MATLAB을 이용한다. 먼저, 그림 2의 구조에서, 해석 필터인 H_0 와 H_1 는 3차의 butterworth filter를 원형으로 하는 디지털 필터로 설정한다. 이를 위해 사용된 MATLAB 명령은 다음과 같다.

```
num_h0, den_h0=butter(3, 0.5);
num_h1, den_h1=butter(3, 0.5, 'high');
```

입력신호 $x = \sin(0.0063k)$ 를 인가하고, $m=9$ 로 설정하였다.

식(8)로 주어진 일반화 제어대상은 다음과 같이 얻는다.

```
% Generalized plant G
systemnames='W E';
inputvar='[v(2); u(2)]';
outputvar='[W-u; E]';
input_to_W='[v]';
input_to_E='[v]';
sysoutname='G';
cleanupsysic='yes';
sysic;
```

얻어진 일반화 제어대상으로부터, H_∞ 최적화 기법을 이용하여 $R(z)$ 을 얻는 방법은 다음의 MATLAB명령을 사용한다.

```
dhfsyn(G,2,2,0.001,10,0.001,1);
```

이 명령으로부터 얻어진 식(2)의 성능측도는 $J=0.01248$ 의 값을 갖는다. 얻어진 필터에 의한 시스템 응답은 그림 7과 같다.

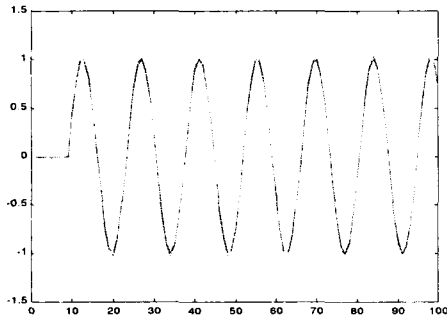


그림 7. 모의실험 결과
Fig. 7 The Result of Simulation

비교를 위해, 고전적인 합성필터로 $F_0=2H_0$ 및 $H_1=2F_1$ 을 이용하였다. 모의실험 결과, 고전적인 합성필터를 사용한 오차의 2-norm값은 0.33인 반면에, 본 논문에서 제시한 방법으로 설계된 합성필터의 경우, 오차의 2-norm값이 0.19로 계산된다.

결과적으로, 본 논문에서 제시한 방법의 필터뱅크가 고전적인 방법보다, 좀더 완벽에 가깝게 재구성한다.

IV. 결 론

본 논문에서는, 필터뱅크의 해석필터는 미리 설정되어 있다고 가정하고, 입력신호의 완벽한 재구성을 위한 합성필터를 설계하는데 있어서, 완벽한 재구성 시스템인 순수한 시간지연 시스템을 기준모델로 하여, 필터뱅크와 기준모델 사이의 오차를 최소화하는 방법을 적용하였다.

따라서, 부대역 부호화에 사용되는 다중비 필터뱅크의 설계문제에 H_∞ 제어문제를 적용하기 위한 방법을 제시하고 모의실험을 통해 그 성능을 확인하였다. 모의실험 결과, 고전적인 필터를 사용한 필터뱅크에 비해, 본 논문에서 제시한 방법으로 설계된 필터뱅크가, 좀더 완벽에 가까운 재구성을 하였다.

참고문헌

- [1] N. J. Fliege, Multirate Digital Signal Processing, Wiley, 1994.
- [2] H. S. Malvar, Signal Processing with Lapped Transforms, Artech House, 1992.
- [3] Y. Meyer, Wavelets: Algorithms and Applications, SIAM, 1993.
- [4] P. P. Vaidyanathan, Multirate Systems and Filter Banks, Prentice-Hall, 1993.
- [5] B. A. Francis, "A course in H_∞ control theory", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Vol. 88, 1987.
- [6] M. Green and D. J. N. Limbeer, Linear Robust Control, Prentice-Hall, 1995.
- [7] R. G. Shenoy, D. Burnside, and T. W. Parks, "Linear periodic systems and multirate filter design", IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 42, pp. 2242-2256, 1994.