

초기하중을 받는 전단변형을 고려한 비대칭 박벽보의 엄밀한 동적 요소강도행렬

Exact Dynamic Element Stiffness Matrix of Shear Deformable Nonsymmetric Thin-walled Beams Subjected to Initial Forces

윤희택*

김동욱**

김상훈***

김문영****

Yun, Hee Taek Kim, Dong Wook Kim, Sang Hoon Kim, Moon Young

ABSTRACT

Derivation procedures of exact dynamic element stiffness matrix of shear deformable nonsymmetric thin-walled straight beams are rigorously presented for the spatial free vibration analysis. An exact dynamic element stiffness matrix is established from governing equations for a uniform beam element with nonsymmetric thin-walled cross section. First this numerical technique is accomplished via a generalized linear eigenvalue problem by introducing 14 displacement parameters and a system of linear algebraic equations with complex matrices. Thus, the displacement functions of displacement parameters are exactly derived and finally exact stiffness matrices are determined using member force-displacement relationships. The natural frequencies are evaluated and compared with analytic solutions or results of the analysis using ABAQUS' shell elements for the thin-walled straight beam structure in order to demonstrate the validity of this study.

1. 서 론

전단변형을 고려한 박벽보 요소의 자유진동해석을 위한 엄밀한 동적강도행렬유도에 관한 연구는 Wittrick-Williams algorithm을 사용한 Banerjee¹⁾, Banerjee와 Williams²⁾, Leung과 Zhou^{3,4)} 및 Eisenberger등⁵⁾에 의한 연구를 들 수 있다.

본 연구에서는 전단변형을 고려한 비대칭 박벽보 구조의 동적해석을 위하여 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀한 해를 얻을 수 있는 일관된 유한요소 정식화 기법을 제안한다. 변분법을 이용하여 도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보의 총포텐셜에너지로부터 운동방정식과 힘-변위 관계식을 유도한다. 이 지배방정식은 고차의 연립미분방정식이므로 14개의 변위 파라미터를 도입하여 1차 연립미분방정식으로 변환시킨다. 이제 미분방정식에 대응하는 선형 고유치 문제를 풀어서 엄밀한 처짐함수를 얻는다. 마지막으로, 힘-변위 관계식을 적용하므로써 엄밀한 동적 14×14 요소강도행렬을 유도한다. 형상함수를 도입하여 요소의 강도행렬을

* 한국철도기술연구원 선임연구원

** 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정

*** 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정

**** 성균관대학교 토목환경공학과 교수

산정하는 기존의 유한요소법과 비교할 때, 이러한 요소 강도행렬은 해석해로서 요소의 수와 계산시간을 대폭 줄일 수 있으며, 다양한 하중과 경계조건에 대한 엄밀해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 본 연구에서 개발한 수치해석 기법의 타당성을 검증하기 위하여 비대칭 단면을 가지는 단순지지, 캔틸레버 박벽보 구조에 대한 고유진동수를 산정하고, 해석해, 혹은 ABAQUS 쉘요소⁶⁾를 사용한 유한요소법의 결과와 비교한다.

2. 비대칭 박벽보의 운동방정식과 힘-변위 관계식

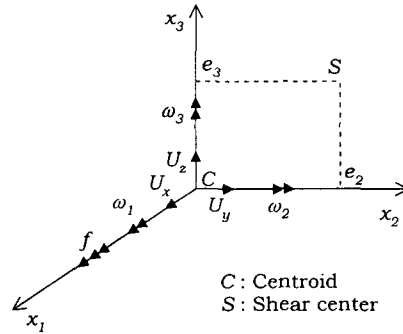


그림 1. Displacement parameters for a thin-walled cross-section

그림 1은 도심에서 정의한 7개의 변위파라미터를 나타낸다. 전단변형효과를 고려하는 비대칭 단면을 갖는 박벽보의 총포텐셜에너지⁷⁾에 대하여 U_x, U_y, U_z 와 θ 로 변분을 취하면 아래와 같이 7개의 비대칭 박벽보에 대한 운동방정식과 힘-변위 관계식을 얻을 수 있다.

$$EA U_x'' + ES_2 \omega_2'' - ES_3 \omega_3'' + \rho \omega^2 (AU_x + S_2 \omega_2 - S_3 \omega_3) = 0 \quad (1a)$$

$$GA_2 (U_y'' - \omega_3') + GA_{23} (U_z'' + \omega_2') + GA_{2r} (\omega_1'' + f') \quad (1b)$$

$$+ {}^o F_1 U_y'' - {}^o M_2 \omega_1'' + \rho \omega^2 (AU_y - S_2 \omega_1) = 0$$

$$EI_3 \omega_3'' - ES_3 U_x'' - EI_{23} \omega_2'' - EI_{3\phi} f'' + GA_2 (U_y' - \omega_3) + GA_{23} (U_z' + \omega_2) \quad (1c)$$

$$+ GA_{2r} (\omega_1' + f) + \rho \omega^2 (I_3 \omega_3 - S_3 U_x - I_{23} \omega_2 - I_{3\phi} f) = 0$$

$$GA_3 (U_z'' + \omega_2') + GA_{23} (U_y'' - \omega_3') + GA_{3r} (\omega_1'' + f') \quad (1d)$$

$$+ {}^o F_1 U_z'' - {}^o M_3 \omega_1'' + \rho \omega^2 (AU_z + S_3 \omega_1) = 0$$

$$EI_2 \omega_2'' + ES_2 U_x'' - EI_{23} \omega_3'' + EI_{2\phi} f'' - GA_3 (U_z' + \omega_2) - GA_{23} (U_y' - \omega_3) \quad (1e)$$

$$- GA_{3r} (\omega_1' + f) + \rho \omega^2 (I_2 \omega_2 + S_2 U_x - I_{23} \omega_3 + I_{2\phi} f) = 0$$

$$GJ \omega_1'' + GA_r (\omega_1'' + f') + GA_{2r} (U_y'' - \omega_3') + GA_{3r} (U_z'' + \omega_2') \quad (1f)$$

$$- {}^o M_2 U_y'' - {}^o M_3 U_z'' + {}^o M_\phi \omega_1'' + \rho \omega^2 (I_\phi \omega_1 + S_3 U_z - S_2 U_y) = 0$$

$$EI_\phi f'' + EI_{2\phi} \omega_2'' - EI_{3\phi} \omega_3'' - GA_r (\omega_1' + f) - GA_{2r} (U_y' - \omega_3) \quad (1g)$$

$$- GA_{3r} (U_z' + \omega_2) + \rho \omega^2 (I_\phi f + I_{2\phi} \omega_2 - I_{3\phi} \omega_3) = 0$$

그리고

$$F_1 = EA U_x' + ES_2 \omega_2' - ES_3 \omega_3' \quad (2a)$$

$$F_2 = GA_2(U_y' - \omega_3) + GA_{23}(U_z' + \omega_2) + GA_{2r}(\omega_1' + f) + {}^o F_1 U_y' - {}^o M_2 \omega_1' \quad (2b)$$

$$M_3 = EI_3 \omega_3' - ES_3 U_x' - EI_{23} \omega_2' - EI_{3\phi} f' + 0.5 {}^o M_2 \omega_1 \quad (2c)$$

$$F_3 = GA_3(U_z' + \omega_2) + GA_{23}(U_y' - \omega_3) + GA_{3r}(\omega_1' + f) + {}^o F_1 U_z' - {}^o M_3 \omega_1' \quad (2d)$$

$$M_2 = EI_2 \omega_2' + ES_2 U_x' - EI_{23} \omega_3' + EI_{2\phi} f' \quad (2e)$$

$$M_1 = GJ \omega_1' + GA_r(\omega_1' + f) + GA_{2r}(U_y' - \omega_3) + GA_{3r}(U_z' + \omega_2) - {}^o M_2(U_y' - 0.5 \omega_3) - {}^o M_3(U_z' + 0.5 \omega_2) + {}^o M_\phi \omega_1' \quad (2f)$$

$$M_\phi = EI_\phi f' + EI_{2\phi} \omega_2' - EI_{3\phi} \omega_3' \quad (2g)$$

본 논문에서는 Connor⁸⁾가 정의한 전단계수를 이용하여 단면 도심에서의 두 축과 주축이 일치하는 경우에 대하여 전단변형효과를 나타내는 단면계수를 정의한다.

3. 박벽보의 동적 요소강도행렬(dynamic element stiffness matrix)

3.1 엄밀한 변위함수의 유도

먼저 운동방정식 (1)을 1계 연립미분방정식 형태의 고유치 문제로 전환하기 위하여, 14개의 변위성분으로 구성되는 변위벡터를 다음과 같이 도입한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(x) &= \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14} \rangle^T \\ &= \langle U_x, U_x', U_y, U_y', \omega_3, \omega_3', U_z, U_z', \omega_2, \omega_2', \omega_1, \omega_1', f, f' \rangle^T \end{aligned} \quad (3)$$

이제 식 (3)을 운동방정식 (1)에 대입하여 정리하면, 상수계수를 가지는 1계 연립방정식이 구성되며, 행렬 관계식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{A} \mathbf{d}' = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (4)$$

여기서 행렬 \mathbf{A} 와 \mathbf{B} 의 구체적인 결과식은 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_1 & & & & & & & & & & & & & & \\ & g_2 & & & & & g_3 & & & & & & & g_4 & \\ & & g_1 & & & & & & & & & & & & \\ & & & g_5 & & & & & & & g_6 & & & g_7 & \\ & & & & g_1 & & & & & & & & & & \\ g_3 & & & & & & g_8 & & & & & & g_9 & & g_{10} \\ & & & & & & & g_1 & & & & & & & \\ & & & & & g_6 & & & & & g_{11} & & & g_{12} & \\ & & & & & & & & & & & g_1 & & & \\ g_4 & & & & & & g_9 & & & & & g_{13} & & & g_{14} \\ & & & & & & & & & & & & g_1 & & \\ & & & & & & & & & & & g_{12} & & g_{15} & \\ & & & & & & & & & & & & & & g_1 & \\ & & & & & & & & & & & & & & & g_{10} \\ & & & & & & & & & & & & & & & g_{14} \\ & & & & & & & & & & & & & & & g_{16} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}^a = \langle F_1^a, F_2^a, M_3^a, F_3^a, M_2^a, M_1^a, M_\phi^a \rangle^T, \quad a = p, q \quad (15)$$

이제 식 (15)를 이용하여 부재 양단 ($x = 0, l$)의 부재력을 구한후 정리하면 박벽 직선보의 엄밀한 동적 요소강도행렬 $\mathbf{K}(\omega)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}(\omega) \mathbf{U}_e \quad (16)$$

여기서

$$\mathbf{K}(\omega) = \begin{bmatrix} -S \mathbf{X}(0) \mathbf{E}^{-1} \\ S \mathbf{X}(l) \mathbf{E}^{-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

결과적으로 박벽보 구조의 고유진동수는 동적 강도행렬의 행렬식이 영이 되는 조건으로 산정할 수 있다.

$$\det |\mathbf{K}(\omega)| = 0 \quad (18)$$

4. 수치해석

4.1 단순지지 보구조(simply supported beam structure)

다음의 표 1은 아래와 같은 단면제원을 가지는 단순지지된 비대칭 박벽보에 대하여 전단변형효과를 고려한 경우와 무시한 경우, 본 연구에서 제안한 방법에 의한 결과와 해석해의 결과를 비교한 것이다. 표에서 보는 바와 같이 두 해석결과는 서로 일치함을 알 수 있다.

$$E = 10000.0 \text{ N/cm}^2, \quad G = 5000.0 \text{ N/cm}^2, \quad A = 30.0 \text{ cm}^2, \quad J = 10.0 \text{ cm}^4, \quad L = 100.0 \text{ cm}$$

$$I_2 = 100. \text{ cm}^4, \quad I_3 = 800. \text{ cm}^4, \quad I_\phi = 83750. \text{ cm}^6, \quad I_{2\phi} = 600. \text{ cm}^5, \quad I_{3\phi} = -8000. \text{ cm}^5, \quad \rho = .00785 \text{ kg/cm}^3$$

$$\beta_1 = 30.0 \text{ cm}^2, \quad \beta_2 = 25.0 \text{ cm}, \quad \beta_3 = -22.0 \text{ cm}, \quad f_{\phi 2} = 30, \quad f_{\phi 3} = 50, \quad C_r = 20$$

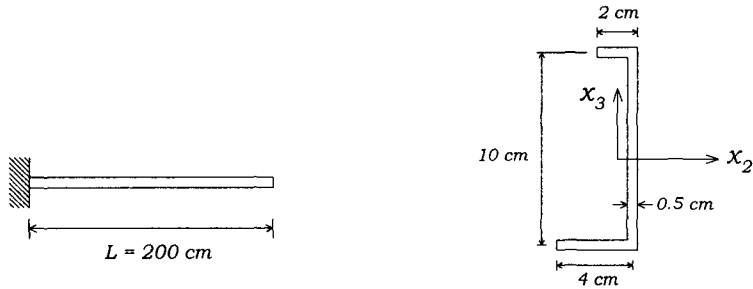
표 1. Flexural-torsional natural frequencies under

$${}^oF_1 = -200 \text{ N at } (\bar{x}_2, \bar{x}_3) = (-5, 7) \text{ [(radian/sec)}^2]$$

mode	With shear deformation		Without shear deformation	
	Present study	Analytic solution	Present study	Analytic solution
n=1	0.19842	0.198424	0.29079	0.29079
	3.64734	3.64734	5.11979	5.11979
	60.1912	60.1912	134.184	134.184
n=2	1.57140	1.57140	2.32697	2.32697
	31.7785	31.7785	80.4626	80.4626
	350.396	350.396	1612.80	1612.80
n=3	3.90529	3.90529	7.20439	7.20439
	92.3298	92.3298	400.665	400.665
	873.450	873.450	5822.04	5822.04

4.2 캔틸레버 보구조(cantilever beam structure)

본 예제에서는 비대칭 단면을 가지는 캔틸레버 박벽 보구조에 대하여 자유진동해석을 수행한다. 그림 2는 길이 $L = 200 \text{ cm}$ 인 캔틸레버 보구조와 단면을 보여주고 있으며, 단면제원은 아래와 같다.



(a) Cantilever beam under an axial load (b) Nonsymmetric channel section
 그림 2. Cantilever beam with nonsymmetric channel section

$$E = 30000.0 \text{ N/cm}^2, \quad G = 11500.0 \text{ N/cm}^2, \quad A = 8.0 \text{ cm}^2, \quad J = 0.6667 \text{ cm}^4, \quad L = 200 \text{ cm}$$

$$I_2 = 114.872 \text{ cm}^4, \quad I_3 = 7.54463 \text{ cm}^4, \quad I_\phi = 408.333 \text{ cm}^6, \quad I_{2\phi} = 182.413 \text{ cm}^5, \quad I_{3\phi} = 18.9757 \text{ cm}^5$$

$$\rho = 0.00785 \text{ kg/cm}^3, \quad \beta_1 = 15.3021 \text{ cm}^2, \quad \beta_2 = 0.57706 \text{ cm}, \quad \beta_3 = 5.93192 \text{ cm}$$

$$f_2 = 5.28221, \quad f_3 = 1.79271, \quad C_r = 0.01766$$

표 2. Flexural-torsional natural frequencies for the cantilever beam [(radian/sec)²]

mode	Present Study		ABAQUS
	With shear deformation	Without shear deformation	
1	0.027	0.027	0.028
2	0.334	0.336	0.331
3	0.704	0.707	0.696
4	1.065	1.074	1.074
5	4.817	4.859	4.766
6	7.055	7.186	7.083
7	17.95	18.22	17.95
8	19.30	20.15	19.36
9	23.74	24.39	23.58
10	45.71	47.34	46.52

표 2는 비대칭 캔틸레버 박벽 보구조에 대하여 전단변형효과를 고려한 경우와 무시한 경우에 대하여 자유진동해석을 수행하여 10개의 모드를 산정하였으며, 본 연구에 의한 결과와 9절점 감차적분이 적용된 600개의 ABAQUS 쉘요소(S9R5)를 사용한 유한요소 해석의 결과를 함께 제시하였다. 표에서도 볼 수 있듯이 고차모드로 갈수록 전단변형효과를 고려한 직선보 요소에 의한 해석결과가 이를 무시한 해석결과와 비교하여 ABAQUS의 결과에 보다 근접한 것을 알 수 있으며, 8번째 모드에서 전단변형효과를 무시한 직선보 요소와

비교하여 최대 4.2% 정도 차이가 나타나는 것을 볼 수 있다.

5. 결 론

- 1) 전단변형효과를 고려한 비대칭 단면을 가지는 직선 박벽보의 3차원 자유진동해석을 위한 엄밀한 요소강도행렬을 산정하는 수치해석기법을 개발하였다.
- 2) 14개의 변위파라미터를 도입하여 고차의 연립미분방정식의 형태로 표현되는 비대칭 직선 박벽보 요소의 지배방정식을 1차 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 재단력-변위 관계식을 이용하여 엄밀한 동적강도행렬을 유도하였다.
- 3) 요소강도행렬을 이용하여 단순지지 및 캔틸레버 보구조에 대한 고유진동수를 산정하고, 해석해 및 유한요소해석의 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다.

참고문헌

1. Banerjee J.R., "Free vibration of axially loaded composite Timoshenko beams using the dynamic stiffness matrix method" , *Computers and Structures* Vol.69, 1998, pp.197-208.
2. Banerjee, J.R. and Williams, F.W., "Exact dynamic stiffness matrix for composite Timoshenko beams with applications" , *Journal of Sound and Vibration* Vol.194, No.4, 1996, pp.573-585.
3. Leung, A.Y.T. and Zhou, W.E., "Dynamic stiffness analysis of non-uniform Timoshenko beams" , *Journal of Sound and Vibration* Vol.181, No.3, 1995, pp.447-456.
4. Leung, A.Y.T. and Zhou, W.E., "Dynamic stiffness analysis of axially loaded non-uniform Timoshenko columns" , *Computers and Structures* Vol.56, No.4, 1995, pp.577-588.
5. Eisenberger, M., Abramovich, H. and Shulepov, O., "Dynamic stiffness analysis of laminated beams using a first order shear deformation theory" , *Composite Structures* Vol.31, 1995, pp.265-271.
6. *ABAQUS User's Manual* Vol. I and Vol. II, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. 1992.
7. 김문영, 김성보, "전단변형 및 회전관성효과를 고려한 박벽 공간빔대구조의 자유진동 및 안정성해석을 위한 일반이론" , 전산구조공학회 논문집, 제11권 제2호, 1998, pp.251-262.
8. Connor, J.J., *Analysis of structural members systems*, Ranald Press Company, New York, 1976.