

변절점을 가진 비적합 평판휨 요소

Non-conforming Plate Bending Element with Variable-nodes

최창근* 이태열**
Choi, Chang-Koon Lee, Tae-Yeol

ABSTRACT

The present work is concerned with the development of new variable-node Mindlin plate bending elements. The proposed variable-node elements pass the patch tests, do not show spurious zero-energy modes, and do not produce shear locking phenomena. It is also shown that the elements produce reliable solutions through numerical tests for standard benchmark problems.

1. 서 론

일반적으로 사각형요소는 삼각형 요소보다 좋은 결과를 주지만 사각형요소에 의한 국지채눈세분화기법에서는 불규칙절점(irregular node)의 처리 과정이 필요하다(최창근 1992). 기존의 4 절점요소와 혼합 사용할 목적으로 변절점 평판휨요소가 제안되었다(Choi 와 Park 1997). 변절점 요소를 사용하면 불규칙절점의 처리가 근본적으로 필요없기 때문에 안정적인 해를 구할 수 있다. 이러한 요소는 채눈세분화에 효율적으로 사용될 수 있음이 입증되었으나 아쉽게도 조각시험을 통과하지 못한다. 본 연구에서는 최근 Choi 등(2001)에 의해 제안된 직접수정법(Direct Modification Method) 및 전단변형률 행렬의 교체를 통하여 조각시험의 통과가 보장되는 새로운 비적합 변절점 Mindlin 평판휨 요소를 제안한다.

2. 정식화 과정

2.1 비적합 Mindlin 평판휨 요소의 정식화

비적합 Mindlin 평판휨 요소의 정식화 과정의 첫 단계는 그림 1과 같은 평판의 변위 성분들을 식(1)과 같이 통상의 형상함수와 비적합 형상함수를 이용하여 이상화 하는 것이다.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} + \sum_j \bar{N}_j \begin{Bmatrix} \bar{w}_j \\ \bar{\theta}_{yj} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 N_i 는 다음과 같이 구성할 수 있다.

* 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수
** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

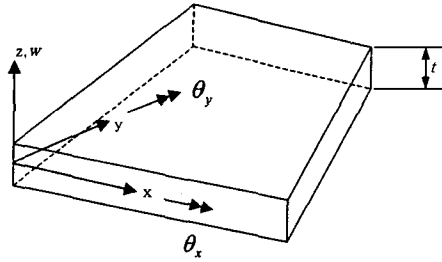
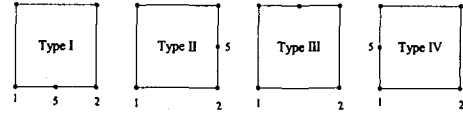
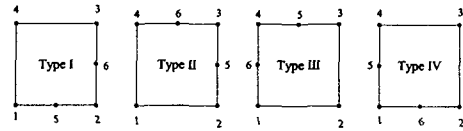


그림 1 Mindlin 평판의 변위 성분



(a) 5 절점 요소



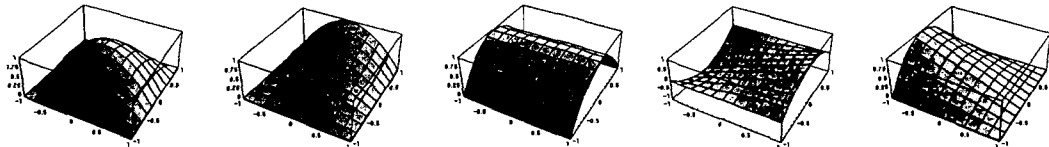
(b) 6 절점 요소

그림 2 여러 형태의 변절점 요소

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N'_1 - \frac{1}{2}N_5 \\
 N_2 &= N'_2 - \frac{1}{2}(N_5 + N_6) \\
 N_3 &= N'_3 - \frac{1}{2}N_6 \\
 N_4 &= N'_4 \\
 N_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\
 N_6 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{2a}$$

$$N'_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \text{ for } i = 1, 2, 3, 4 \tag{2b}$$

식(2a)에서 N_5 와 N_6 는 절점이 존재하지 않을 경우에는 0의 값을 갖는다. 일반적으로 5,6 절점 요소는 여러가지 형태가 존재할 수 있다(그림 2). 각각의 형태는 Type I의 경우를 회전변환하여 얻어질 수 있으므로 Type I의 경우에 대하여 강성행렬을 구성하고, 해석 코드 내에서 자동으로 회전 변환시키도록 구현할 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 Type I의 강성행렬을 구성하는 방법만을 논하기로 한다.



$$\bar{N}_1 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad \bar{N}_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad \bar{N}_3 = (1 - \eta^2) \quad \bar{N}_4 = (1 - \eta^2)\xi \quad \bar{N}_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$$

그림 3 변절점 요소의 비적합 변위모드

본 연구에서는 표 1과 같이 회전항 θ_x, θ_y 에는 버블형태(bubble mode)의 \bar{N}_1 만을 추가하고 변위항 w 에는 다양한 비적합 변위 모드를 고려하였다(그림 3).

오른손 법칙(right-hand-rule)의 기호규약을 적용하여 휨곡률, 변형률 및 전단 변형률을 정의하면 식(3),(4)와 같다.

표 1 개발된 5,6 절점 요소의 종류

요소	비적합모드	
	w	θ_x, θ_y
5 절점 평판	$\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4$	\bar{N}_1
6 절점 평판	$\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_5$	\bar{N}_1

$$\kappa = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ -\theta_{y,y} + \theta_{x,x} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon = -z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_b \mathbf{u} + \bar{\mathbf{B}}_b \bar{\mathbf{u}} = \sum_i \mathbf{B}_{bi} \mathbf{u}_i + \sum_j \bar{\mathbf{B}}_{bj} \bar{\mathbf{u}}_j \quad (3)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_s \mathbf{u} + \bar{\mathbf{B}}_s \bar{\mathbf{u}} = \sum_i \mathbf{B}_{si} \mathbf{u}_i + \sum_j \bar{\mathbf{B}}_{sj} \bar{\mathbf{u}}_j \quad (4)$$

여기서,

$$\mathbf{B}_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & zN_{i,x} \\ 0 & -zN_{i,y} & 0 \\ 0 & zN_{i,x} & -zN_{i,y} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z\bar{N}_{j,x} \\ 0 & -z\bar{N}_{j,y} & 0 \\ 0 & z\bar{N}_{j,x} & -z\bar{N}_{j,y} \end{bmatrix} \quad (5a)$$

$$\mathbf{B}_{si} = \begin{bmatrix} N_{i,y} & -N_i & 0 \\ N_{i,x} & 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_{sj} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{j,y} & -\bar{N}_j & 0 \\ \bar{N}_{j,x} & 0 & \bar{N}_j \end{bmatrix} \quad (5b)$$

$$\mathbf{u}_i = \langle w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \rangle^T, \quad \bar{\mathbf{u}}_j = \langle \bar{w}_j \quad \bar{\theta}_{xj} \quad \bar{\theta}_{yj} \rangle^T \quad (5c)$$

이상을 정리하면 다음과 같이 행렬 형태의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & \bar{\mathbf{B}}_b \\ \mathbf{B}_s & \bar{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

2.2 적접수정법(Direct Modification Method)의 적용

비적합 변위모드를 사용하면 요소의 거동 개선 효과를 가져오지만, 아무런 수정없이 사용할 경우에는 조각시험(patch test)을 통과하지 못하는 문제점을 수반한다. 이와 같은 문제점은 비적합 변위모드의 미분항을 직접수정하는 방법(Choi 등, 2001)을 이용하여 해결할 수 있다. 즉, 식(5a,b)의 $\bar{\mathbf{B}}_{bj}$, $\bar{\mathbf{B}}_{sj}$ 항에 나타나는 비적합 변위형의 미분값($\bar{N}_{j,x}$ 와 $\bar{N}_{j,y}$)을 수정계수 $c_{j\alpha}$ 를 이용하여 식(7a,b)와 같이 보정할 수 있다. 여기서 위첨자(*)는 직접수정법으로 수정되었음을 의미한다.

$$(\bar{N}_{j,x})^* = \frac{|J(0,0)|}{|J(\xi,\eta)|} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ J_{1\alpha}^{-1}(0,0) \left(\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \xi_\alpha} + c_{j\alpha} \right) \right\}, \quad (\bar{N}_{j,y})^* = \frac{|J(0,0)|}{|J(\xi,\eta)|} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ J_{2\alpha}^{-1}(0,0) \left(\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \xi_\alpha} + c_{j\alpha} \right) \right\} \quad (7a)$$

$$c_{j\alpha} = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \xi_\alpha} d\xi d\eta \quad (7b)$$

또한, 식(5b)의 $\bar{\mathbf{B}}_{sj}$ 항에 나타나는 바와 같이 비적합 변위형 자체(\bar{N}_j)가 사용되는 경우에도 최창근 등(2001)이 제안한 수정계수 d_j 를 도입하여 수정할 수 있다. 즉,

$$\bar{N}_j^* = \frac{1}{|J(\xi,\eta)|} (\bar{N}_j + d_j), \quad d_j = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{N}_j d\xi d\eta \quad (8)$$

식(7),(8)에 나타낸 수정계수들을 본 연구에 사용된 비적합 변위 모드에 대하여 해석적으로 계산하여 표 2에 나타내었다.

표 2 다양한 비적합 변위모드에 대한 수정계수

비적합 변위 모드 \bar{N}_j		수정계수		
		$c_{j\xi}$	$c_{j\eta}$	d_j
\bar{N}_1	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$	0	0	$-\frac{4}{9}$
\bar{N}_2	$1-\eta^2$	0	0	$-\frac{2}{3}$
\bar{N}_3	$(1-\eta^2)\xi$	$-\frac{2}{3}$	0	0
\bar{N}_4	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
\bar{N}_5	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$

이와같이 직접수정법으로 보정된 \bar{B}_b^* , \bar{B}_s^* 를 이용하여 구성된 \bar{B}_b , \bar{B}_s 를 이용하여 식(6)의 \bar{B}_b 와 \bar{B}_s 를 대체하면 조각시험통과가 보장된다.

2.3 전단 변형률 행렬의 구성

Mindlin 평판요소는 일반적으로 전단잠김(shear locking)현상을 보이게 되므로 별도의 요소거동 기법을 도입할 필요가 있다. 본 연구에서는 Oñate 등 (1992)이 제안한 전단변형률 행렬의 구성법을 5,6 절점 요소에 활용할 수 있도록 확장하였다. 우선 자연좌표계상의 전단변형률(natural shear strains)을 다음과 같이 다항식(polynomial)을 이용하여 가정한다.

$$\gamma' = \begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} = A\alpha \quad (5 \text{ 절점}); \quad \gamma' = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = A\alpha \quad (6 \text{ 절점}) \quad (9)$$

직각좌표계상의 전단변형률(Cartesian shear strains)은 식(10)과 같이 Jacobian 행렬을 이용하여 변환할 수 있다.

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = J^{-1}\gamma' \quad (10)$$

여기서 J 는 $x, y \rightarrow \xi, \eta$ 변환을 나타내는 2×2 크기의 Jacobian 행렬이다.

또한, 요소변($j-k$)의 접선방향 전단변형률(tangential shear strain) γ_{edge}^{j-k} 은 식(14.11)와 같이 구할 수 있다.

$$\gamma_{edge}^{j-k} = \cos \beta_{edge}^{j-k} \gamma_\xi + \sin \beta_{edge}^{j-k} \gamma_\eta \quad (11)$$

여기서 β_{edge}^{j-k} 는 자연좌표 ξ 와 요소변($j-k$)이 이루는 각도이다.

그림 4와 같이 자연좌표계상의 요소변에 존재하는 5개(5 절점 요소의 경우) 혹은 6개(6 절점 요소의 경우) 표본점(sampling points)의 접선방향 전단변형률로 구성된 벡터를 γ_{edge} 라 하고, 식(9)와 식(11)을 이용하여 식(12)를 도출해 낼 수 있다.

$$P(\xi_i, \eta_i, \beta_{edge}^{j-k})\alpha = \gamma_{edge} \quad (12)$$



(a) 5 절점 요소

(a) 6 절점 요소

그림 4 요소변에 존재하는 표본점(sampling points)

여기서 $\gamma_{edge} = \langle \gamma_{edge}^{1-5}, \gamma_{edge}^{5-2}, \gamma_{edge}^{4-3}, \gamma_{edge}^{2-3}, \gamma_{edge}^{1-4} \rangle^T$ (5 절점) 또는 $\gamma_{edge} = \langle \gamma_{edge}^{1-5}, \gamma_{edge}^{5-2}, \gamma_{edge}^{4-3}, \gamma_{edge}^{2-6}, \gamma_{edge}^{6-3}, \gamma_{edge}^{1-4} \rangle^T$ (6 절점)이다.

식(12)에서 다음식을 유도할 수 있다.

$$\alpha = P^{-1} \gamma_{edge} \quad (13)$$

식(11)을 이용하면 γ_{edge} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\gamma_{edge} = \begin{Bmatrix} \gamma_{edge}^{1-5} \\ \gamma_{edge}^{5-2} \\ \gamma_{edge}^{4-3} \\ \gamma_{edge}^{2-3} \\ \gamma_{edge}^{1-4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi}^{1-5} \\ \gamma_{\eta}^{1-5} \\ \gamma_{\xi}^{5-2} \\ \gamma_{\eta}^{5-2} \\ \vdots \\ \gamma_{\eta}^{1-4} \end{Bmatrix} = T \tilde{\gamma}' \quad (5 \text{ 절점}) \quad (14a)$$

$$\gamma_{edge} = \begin{Bmatrix} \gamma_{edge}^{1-5} \\ \gamma_{edge}^{5-2} \\ \gamma_{edge}^{4-3} \\ \gamma_{edge}^{2-6} \\ \gamma_{edge}^{6-3} \\ \gamma_{edge}^{1-4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi}^{1-5} \\ \gamma_{\eta}^{1-5} \\ \gamma_{\xi}^{5-2} \\ \gamma_{\eta}^{5-2} \\ \vdots \\ \gamma_{\eta}^{1-4} \end{Bmatrix} = T \tilde{\gamma}' \quad (6 \text{ 절점}) \quad (14b)$$

여기서 $\tilde{\gamma}' = \langle \gamma_{\xi}^{1-5}, \gamma_{\eta}^{1-5}, \gamma_{\xi}^{5-2}, \gamma_{\eta}^{5-2}, \gamma_{\xi}^{4-3}, \gamma_{\eta}^{4-3}, \gamma_{\xi}^{2-3}, \gamma_{\eta}^{2-3}, \gamma_{\xi}^{1-4}, \gamma_{\eta}^{1-4} \rangle^T$ (5-절점) 또는 $\tilde{\gamma}' = \langle \gamma_{\xi}^{1-5}, \gamma_{\eta}^{1-5}, \gamma_{\xi}^{5-2}, \gamma_{\eta}^{5-2}, \gamma_{\xi}^{4-3}, \gamma_{\eta}^{4-3}, \gamma_{\xi}^{2-6}, \gamma_{\eta}^{2-6}, \gamma_{\xi}^{6-3}, \gamma_{\eta}^{6-3}, \gamma_{\xi}^{1-4}, \gamma_{\eta}^{1-4} \rangle^T$ (6-절점)이다.

한편, 직각좌표계와 자연좌표계상의 전단변형률의 관계를 나타내면 다음식과 같다.

$$\tilde{\gamma}' = \begin{bmatrix} J_1^{1-5} & & \\ & \ddots & \\ & & J_n^{1-4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{1-5} \\ \vdots \\ \gamma_{xz}^{1-4} \end{Bmatrix} = C \tilde{\gamma} \quad (15)$$

여기서 $\tilde{\gamma} = \langle \gamma_{yz}^{1-5}, \gamma_{xz}^{1-5}, \gamma_{yz}^{5-2}, \gamma_{xz}^{5-2}, \gamma_{yz}^{4-3}, \gamma_{xz}^{4-3}, \gamma_{yz}^{2-3}, \gamma_{xz}^{2-3}, \gamma_{yz}^{1-4}, \gamma_{xz}^{1-4} \rangle^T$ (5 절점) 혹은 $\tilde{\gamma} = \langle \gamma_{yz}^{1-5}, \gamma_{xz}^{1-5}, \gamma_{yz}^{5-2}, \gamma_{xz}^{5-2}, \gamma_{yz}^{4-3}, \gamma_{xz}^{4-3}, \gamma_{yz}^{2-6}, \gamma_{xz}^{2-6}, \gamma_{yz}^{6-3}, \gamma_{xz}^{6-3}, \gamma_{yz}^{1-4}, \gamma_{xz}^{1-4} \rangle^T$ (6 절점) 이고 J_i^{j-k} 는 $j-k$ 변상에 존재하는 i 번째 표본점의 Jacobian 행렬(크기: 2x2)을 의미한다.

또한, 직각좌표계상의 전단변형률($\tilde{\gamma}$)—변위(u) 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{1-3} \\ \vdots \\ \gamma_{xz}^{1-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_s^{1-3} \\ \vdots \\ B_s^{1-4} \end{Bmatrix} u = B_s u \quad (16)$$

식(16)의 B_s 는 식(4)에서 유도된 B_s 와 동일하며 상기한 식들을 정리하면 다음과 같다.

$$\gamma = J^{-1} A \alpha = J^{-1} A P^{-1} \gamma_{edge} = J^{-1} A P^{-1} T \tilde{\gamma}' = J^{-1} A P^{-1} T C B_s u = \tilde{B}_s u \quad (17)$$

여기서

$$\tilde{B}_s = J^{-1} A P^{-1} T C B_s \quad (18)$$

이와같이 구성된 \tilde{B}_s 를 이용하여 식(6)의 B_s 를 대체하면 전단잠김(shear locking)현상을 제거할 수 있다.

2.4 요소 강성행렬의 구성

2.2절과 2.3절에서 설명한 바와 같이 \bar{B}_b^* , \bar{B}_s^* , \tilde{B}_s 를 이용하여 식(6)을 다시 쓰면 다음과 같이 수정된 변형률-변위관계 행렬이 구성된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_b & \bar{B}_b^* \\ \tilde{B}_s & \bar{B}_s^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \bar{u} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

최종적으로, 힘-변위 방정식은 다음과 같이 확대된 형태로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CN} \\ K_{CN}^T & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \bar{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

여기서, 부행렬(sub-matrix)은 각각 다음과 같다.

$$K_{CC} = \int_V B_b^T D_b B_b dV + \int_V \tilde{B}_s^T D_s \tilde{B}_s dV \quad (21a)$$

$$K_{CN} = \int_V B_b^T D_b \bar{B}_b^* dV + \int_V \tilde{B}_s^T D_s \bar{B}_s^* dV \quad (21b)$$

$$K_{NN} = \int_V \bar{B}_b^{*T} D_b \bar{B}_b^* dV + \int_V \bar{B}_s^{*T} D_s \bar{B}_s^* dV \quad (21c)$$

D_b 와 D_s 는 각각 횡과 전단에 관련된 재료행렬을 나타내며, 비적합 변위모드의 추가에 의해 확대된 강성행렬은 정적압축(static condensation)과정을 통해 원래의 평판요소들의 자유도 수와 같은 차수의 강성행렬로 복원된다.

$$K = K_{CC} - K_{CN} K_{NN}^{-1} K_{CN}^T \quad (22)$$

3. 수치 해석

본 연구에서 제안한 변절점 Mindlin 평판요소들의 타당성을 검증하기 위하여 기본적인 수치해석을 수행하였다.

3.1 고유치 시험 (Eigenvalue Test)

제안된 요소에서의 가상적인 제로에너지모드(spurious zero energy mode) 발생 여부를 검증하기 위하여 개별 요소강성행렬을 이용한 고유치해석을 수행하였다. 시험 결과 강체운동과 관련된 3 개의 제로에너지모드만이 존재하는 것으로 나타났으므로 가상적인 제로에너지모드는 발생하지 않음을 알 수 있다.

3.2 조각 시험 (Patch Test)

본 연구에서 개발한 요소가 일정변형률상태(constant strain state)를 표현할 수 있는가를 검증하기 위해 조각시험을 수행하였다. McNeal 과 Harder(1985)가 제안한 4 절점요소 조각에 절점을 추가하여 각각 5 절점 및 6 절점 요소로 구성되도록 변형하였다(그림 5). 변에 존재하는 모든 절점들은 변의 중앙에 존재한다. 요소조각 내에 균일한 곡률(curvature)을 발생시키기 위한 경계조건으로써 $w=10^{-3}(x^2+xy+y^2)/2$, $\theta_x=10^{-3}(y+x/2)$ 및 $\theta_y=-10^{-3}(x+y/2)$ 를 부여하였다. 조각내에 존재하는 모든 절점에서 이론해와 동일한 변위가 산출되었으며, 단위폭당 모멘트는 $m_x=m_y=1.111\times 10^{-7}$; $m_{xy}=3.333\times 10^{-8}$ 이고 표면에서의 응력(surface stress)은 $\sigma_x=\sigma_y=\pm 0.667$; $\tau_{xy}=\pm 0.200$ 으로 산출되었다. 이는 이론해와 일치하는 값으로 조각시험을 통과함을 알 수 있다.

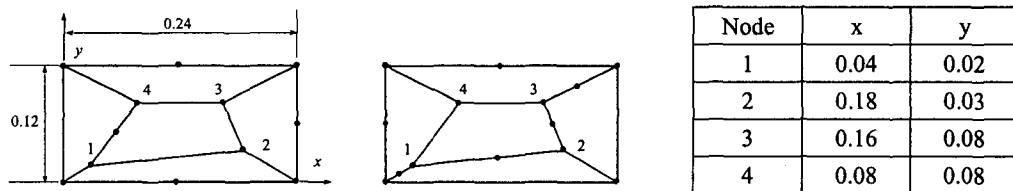


그림 5 조각시험

3.3 전단 잠김 시험 (Shear Locking Test)

평판요소의 두께가 매우 얇아짐에 따라 전단잠김(shear locking)현상의 발생 여부를 검토하기 위하여 중앙에 집중하중 $P=1000$ 을 받는 길이 $L=200$ 인 정사각형 평판을 해석하였다. 물성치는 탄성계수 $E=3.0\times 10^6$ 와 포아송비 $\nu=0.3$ 를 사용하였고 경계는 고정경계 조건을 부여하였다. 그림 7(a)에 제시한 바와 같이 1/4 만 모델링하였고 적절한 대칭 경계조건을 부여하였다. 본 연구에서 제안한 5,6 절점 요소와 최창근 등(2001)이 개발한 4 절점 요소를 함께 사용하였다. 얇은 평판에 대한 이론해로 정규화하여 그림 6에 그래프로 제시하였다. 시험결과 얇은 평판으로 간주될 수 있는 $L/t=10^2 \sim 10^6$ 영역에서 어떠한 전단잠김현상도 나타나지 않았다.

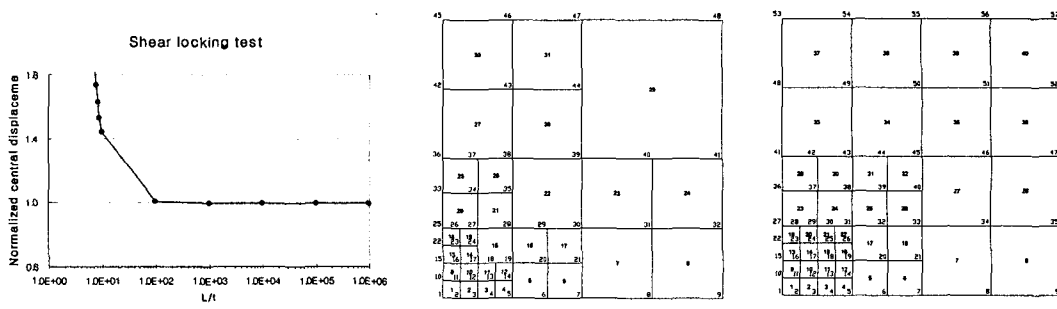


그림 6 전단잠김 시험

(a) 4,5,6 절점 요소

(b) 4,5 절점 요소

그림 7 정사각형 평판 (1/4 모델)

3.4 고정지지된 정사각형 평판

네변이 고정지지된 정사각형 평판에 대하여 그림 7과 같이 2 가지 요소망에 대하여 해석을 수행하였다. 물성치는 3.3절에서 제시한 값과 동일하고 두께는 2.5 를 사용하였다. 표 3에 중앙점의 처짐 (정규화된 값) 및 조각시험 통과 여부를 이전의 연구와 비교하여 제시하였다. 그림 8은 단위폭당 모멘트 분포를 도시한 것이다.

표 3 중앙점에서의 변위값 ($\times 10^{-2}$)

	요소망 — 그림 7(a)	요소망 — 그림 7(b)	조각시험
Choi 와 Park (1997)	5.280068 (1.005)	5.267650 (1.003)	실패
Choi 와 Lee (2000)	5.170132 (0.984)	5.141185 (0.979)	실패
본 연구	5.265024 (1.002)	5.306115 (1.010)	통과
참고값 (16x16 체눈)	5.253432 (1.000)		

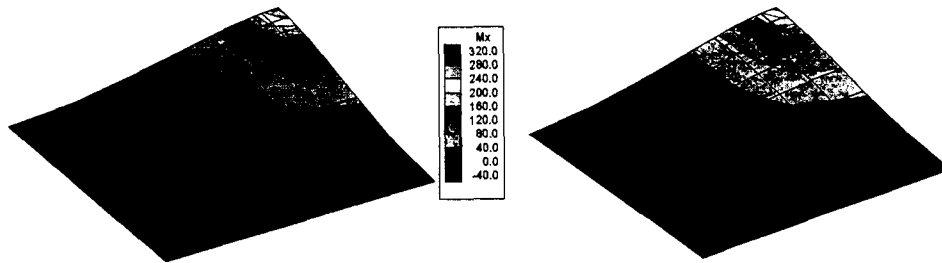


그림 8 정사각형 평판 (단위폭당 모멘트)

4. 결론

본 연구에서는 비적합 변위모드의 추가와 전단변형을 행렬의 구성 및 대체를 통하여 새로운 변위점 Mindlin 평판 힘요소를 제안하였다. 제안된 요소는 직접수정법으로 수정되었으므로 조각시험을 통과하여 일정곡률을 묘사할 수 있으며, 여분의 제로에너지모드도 지니지 않는 것으로 나타났다. 또한, 전단잠김현상도 전혀 나타나지 않고 예제 해석결과 거동도 양호한 것으로 나타났다.

참고문헌

1. 최창근, 유한요소해석, 집문당, 1992.
2. 최창근, 이태열, 정근영, 개선된 비적합 변위형과 대체전단 변형률장을 이용한 4 절점 평판힘 요소, 대한토목학논문집, 제 21 권 제 2-A 호, pp.279-286, 2001.
3. Choi, C.K., Chung, K.Y. and Lee T.Y. "A direct modification method for strains due to non-conforming modes", *Structural Engineering and Mechanics* 11(3), pp. 325-340, 2001.
4. Choi, C.K. and Lee, T.Y. "Modified Substitute Shear Strain Fields for Transition Plate-Bending Element", *The 6th Asian Pacific Conference on Shell and Spatial Structures*, Seoul, Korea, October 16-18, pp.541-548 (volume I), 2000.
5. Choi, C.K. and Park, Y. M. "Conforming and Nonconforming Transition Plate Bending Elements For An Adaptive h -refinement", *Thin-Walled Structures*, 28(1), pp.1-20, 1997.
6. McNeal, R.H. and Harder, R.L. "A proposed Standard set of problems to test finite element accuracy", *Finite Elements in Analysis and Design* 1, pp. 3-20, 1985.
7. Oñate E., Zienkiewicz O.C., Suarez B. and Taylor R.L. "A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements", *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 33, pp.345-367, 1992.