

단부회전이 회전스프링으로 제약받는 기둥의 좌굴하중

Buckling Loads of Column with Rotation End Restricted by Rotational Spring

○ 김중웅* · 이태은** · 박광규*** · 이병구****

Kim, Jong Ung · Lee, Tae Eun · Park, Kwang Kyou · Lee, Byoung Koo

ABSTRACT

This paper deals with the buckling loads of column with rotation end restricted by rotational spring. The ordinary differential equations governing the buckling loads of such column is derived as nondimensional forms, and also its boundary conditions are derived. The buckled column model is based on the classical Bernoulli-Euler beam theory. The Runge-Kutta method and Regula-Falsi method are used to perform the integration of the differential equations and to determine the eigenvalue. The numerical methods developed herein for the buckling loads of the such column are found to be efficient and reliable. It is expected that the results obtained herein can be practically utilized in the structural engineering field.

1. 서 론

기본단위 구조 중 기둥 요소는 보, 평판 등과 함께 구조공학 관련분야에서 가장 많이 이용되고 있어 이에 대한 정적, 동적해석에 관한 연구가 계속 진행되고 있다. 일반적으로 기둥은 축하중에 내하하도록 설계되며 대부분 각주형 부재로 길이방향으로 동일한 단면적을 갖는다. 그러나 기둥설계에서 변단면 기둥의 이용은 전체 구조물의 자중을 줄이면서 작용하중에 대한 내하능력 증진, 구조물의 미적 감각 및 시공성 등 특정한 이용목적 때문에 증가하는 추세이다.

이상과 같은 연구배경으로 본 연구에서는 단부회전이 회전스프링으로 제약받는 변단면 기둥의 수학적 모형을 구축하고 해석모형으로부터 정확한 기둥의 좌굴하중을 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하고, 이를 해석하는데 연구 목적이 있다.

-
- * 원광대학교 대학원 석사과정
 - ** 원광대학교 대학원 박사과정
 - *** 대전대학교 토목공학과 교수
 - **** 원광대학교 토목환경공학과 교수

2. 수학적 모형

그림 1은 대상기둥의 기하학적 형상 및 제변수를 나타낸 것이다. d_a, A_a, I_a 는 좌측 단부에서의 단면폭, 단면적 및 단면 2차모멘트이고 d_b, A_b, I_b 는 우측 단부에서의 단면폭, 단면적 및 단면 2차모멘트를 나타내고 있다. K_a, K_b 는 단부에서의 회전 스프링 상수이다. 보의 임의지점 x 에서의 단면폭 d , 단면적 A 및 단면 2차 모멘트 I 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d = d_a F(x), \quad A = A_a G(x), \quad I = I_a H(x) \quad (1a-c)$$

$$F(x) = [1 + (\beta - 1) l/x], \quad G(x) = [1 + (\beta - 1) l/x]^m, \quad H(x) = [1 + (\beta - 1) l/x]^n \quad (1d-f)$$

위의 식에서 $F(x), G(x), H(x)$ 는 단면의 변화를 표현하기 위하여 사용하는 x 만의 함수이며 β 는 단면비로서 보의 좌측단면폭에 대한 우측단면폭의 비 (d_b/d_a)이다. 또한 m 과 n 은 단면형상에 따라 결정되는 단면형상계수이다.

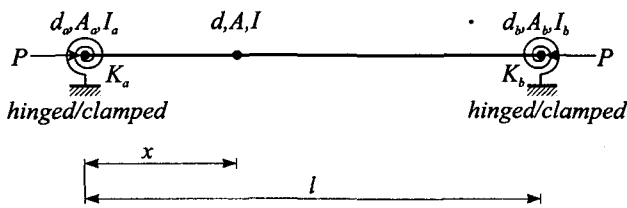


그림 1. 대상기둥의 기하학적 형상 및 제변수

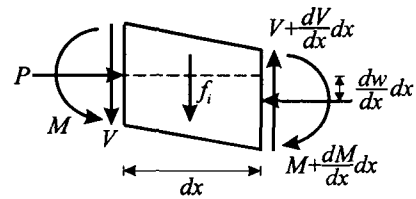


그림 2. 미소요소에 작용하는 힘

3. 지배미분방정식

본 연구에서 기둥은 조화진동을 한다고 가정하며 이 경우에 횡방향 변위의 조화진동식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t) \quad (2)$$

윗 식에서 w 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며 ω 는 rad/sec로 표시되는 고유각 진동수, t 는 시간을 나타낸다.

기둥이 면내 진동하게 되면 기둥의 미소요소에는 변위에 의한 전단력, 휨모멘트 등의 합응력과 관성에 의한 단위길이당 관성력이 발생하게 된다.

그림 2와 같이 기둥의 미소요소 dx 에 대한 힘들의 평형방정식을 세우면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dV}{dx} - f_i = 0, \quad V - \frac{dM}{dx} = 0, \quad M = EIw'', \quad f_i = -\rho A_a G \omega^2 w \quad (3a-d)$$

윗 식에서 V 는 미소요소의 변위에 의한 전단력, M 은 임의의 변단면에 대한 휨모멘트이고 f_i 는 질량을 갖고 있는 기둥의 미소요소에서 직선운동 $w(x, t)$ 에 대한 단위길이당 관성력을 나타낸다.

식 (3c)로부터 dM/dx 를 구하여 식 (3b)에 대입하고 전단력 V 에 대하여 정리한 다음 dV/dx 를 구하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dV}{dx} = EI_a H \frac{d^4 w}{dx^4} + 2EI_a H' \frac{d^3 w}{dx^3} + EI_a H'' \frac{d^2 w}{dx^2} - P \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4)$$

식 (4)를 식 (3a)에 대입하면 다음과 같은 기둥의 좌굴하중을 산정하는 상미분방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = -2H'H^{-1} \frac{d^3 w}{dx^3} - \left[H''H^{-1} - \frac{P}{EI_a} \right] \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\rho A_a}{EI_a} GH^{-1} \omega^2 w \quad (5)$$

식 (5)는 임의의 변단면 기둥의 좌굴하중을 산정하는 상미분방정식이며 변단면 기둥의 변화계원을 나타내는 G, H, H', H'' 이 주어지면 어떠한 변단면 기둥도 해석할 수 있다.

지배미분방정식을 무차원 미분방정식으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l, \quad p = \frac{Pl^2}{EI_a}, \quad k_a = \frac{K_a l}{EI_a}, \quad k_b = \frac{K_b l}{EI_a} \quad (6a-e)$$

$$c_i = w_i l^2 \sqrt{\rho A_a / (EI_a)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6f)$$

여기서 ξ, η 는 각각 무차원 축방향 좌표, 무차원 변위, p 는 무차원 축하중 그리고 c_i 는 무차원 고유진동수를 나타내며 k_a, k_b 는 무차원 회전 스프링상수이다.

식 (6a-c)에 나타낸 무차원 변수를 식 (5)에 대입하여 정리하면 식 (7)과 같은 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 지배미분방정식이 유도된다.

$$\eta'''' = -2n(\beta-1)[1+(\beta-1)\xi]^{-1}\eta'' - \{n(n-1)(\beta-1)^2[1+(\beta-1)\xi]^{-2} - p[1+(\beta-1)\xi]^{-n}\}\eta'' + c_i^2[1+(\beta-1)\xi]^{m-n}\eta \quad (7)$$

본 연구에서는 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정, 고정-회전의 단부조건을 고려하며, 각 단부조건에 대한 경계조건은 다음과 같다. 회전단에서는 수직방향변위, 모멘트가 "0" 이고 고정단에서는 수직방향변위, 단면회전각이 "0"이므로 각각의 단부조건에 대한 좌단($\xi=0$), 우단($\xi=1$)의 경계조건을 무차원 변수를 이용하여 각각 정리하면 다음과 같다.

$$\bullet \text{ 회전단 : } \eta = 0, \quad \eta'' - k_a \eta' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 에서} \quad (8a,b)$$

$$\eta = 0, \quad \eta'' + \beta^{-n} k_b \eta' = 0, \quad \xi = 1 \text{ 에서} \quad (8c,d)$$

$$\bullet \text{ 고정단 : } \eta = 0, \quad \eta' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (8e,f)$$

압축하중 P 가 증가하여 좌굴하중에 도달하면 기둥은 좌굴하여 정적상태로 된다. 따라서 앞에서 유도한 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식 식 (7)에 $c_i=0$ 및 $p=b$ 를 대입하고 정리하면 다음식과 같이 단부회전이 회전스프링으로 제약받는 기둥의 좌굴형상을 지배하는 미분방정식으로 전환된다.

$$\eta'''' = -2n(\beta-1)[1+(\beta-1)\xi]^{-1}\eta''' - \{n(n-1)(\beta-1)^2[1+(\beta-1)\xi]^{-2} - b[1+(\beta-1)\xi]^{-n}\}\eta'' \quad (9)$$

위의 식에서 b 는 말뚝의 무차원 좌굴하중이며 식 (6c)에 의하여 다음과 같이 정의된다.

$$b = \frac{Bl^2}{EI_a} \quad (10)$$

식 (10)에서 B 는 말뚝의 좌굴하중이다.

4. 수치해석 방법 및 결과분석

앞장에서 유도한 지배미분방정식 식 (9)를 수치해석하는 문제는 기둥의 기하학적 형상 즉 β , k_a , k_b 에 대하여 지배미분방정식들의 고유치인 무차원 좌굴하중 b_i 를 결정하는 문제이다. 이를 위하여 경계조건식인 식 (8a~f)를 초기조건으로 하여 지배미분방정식 식 (9)를 Runge-Kutta method로 수치적분하고 고유치 b_i 값은 Regula-Falsi method로 산출하였다. 이상과 같은 수치해석 방법을 컴퓨터 프로그램화 하였다.

표 1은 본 연구결과를 비교 검증하기 위해 타 문헌의 결과들과 비교한 것이다. 기둥을 구조물 등의 기초로 사용하는 경우에 구조물과의 공진을 피하기 위하여 기둥의 진동을 제어할 필요가 있다. 이 경우에 기둥에 축방향력을 가함으로써 이를 실현할 수 있다. 이러한 관점에서 본 수치해석 예에서는 단부조건과 각종의 무차원 변수가 좌굴하중에 미치는 영향을 분석하였다. 표 1에서 나타난 바와 같이 본 연구결과와 문헌들의 결과는 매우 우수하게 일치하고 있어 본 연구에서 유도한 지배미분방정식과 수치해석 알고리즘의 타당성을 검증할 수 있었다.

표 2는 각각의 단부조건과 단면형상에 따라 무차원 좌굴하중 b_i 값을 비교한 것이다. 이 표에서 나타난 바와 같이 회전-고정 및 고정-회전지점이 회전-회전지점에 비해 무차원 좌굴하중 값이 크음을 알 수 있다. 단면형상에 따른 b_i 값은 폭 변화단면 ($m=1, n=1$), 깊이 변화단면 ($m=1, n=3$), 정방형 변화단면 ($m=2, n=4$)순으로 크음을 알 수 있다.

그림 3은 단면비 β 와 각각의 단부조건에 대하여 무차원 좌굴하중 b_i 에 미치는 영향을 나타낸 그림이다. 그림에서 단면비 β 가 증가함에 따라 좌굴하중이 커짐을 알 수 있으며, 변단면 기둥의 기하학적 형상이 동일한 경우 회전-고정, 고정-회전, 회전-회전의 단부조건 순서로 기둥의 좌굴하중이 크음을 알 수 있다.

그림 4는 좌측단의 회전 스프링상수 k_a 와 b_i 의 관계를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 k_a 가 증가할수록 b_i 의 값도 증가하지만 일정값 이상에서는 거의 수렴함을 알 수 있다. 고정-회전지점에서의 무차원 좌굴하중 값은 일정하게 나타나는데 이는 고정단에서의 회전스프링은 무의미하다는 것을 알 수 있다.

표 1. 본 연구와 문헌[5,6]의 무차원 좌굴하중 비교

조 건	비 교	무차원 좌굴하중, b_i	
		$i=1$	$i=2$
회전-회전 깊이 변화단면 $\beta=1.2$	본 연구	13.01	52.01
	문헌[5]	13.01	52.01
	오차(%)**	0.00	0.00
회전-회전 폭 변화단면 $\beta=1.4$	본 연구	11.79	47.07
	문헌[5]	11.79	47.07
	오차(%)**	0.00	0.00
회전-고정 $\beta=1^*$	본 연구	20.19	59.68
	문헌[6]	20.19	59.68
	오차(%)**	0.00	0.00

* 등단면

** 오차(%) = $|1 - \text{문헌} / \text{본 연구}| \times 100$

표 2. 변단면 형상 및 좌굴하중의 비교*

단부조건	변 화 단 면	무차원 좌굴하중, b_i	
		$i=1$	$i=2$
회전-회전	폭 변화	10.788	32.528
	깊이 변화	6.769	17.995
	정방형	5.212	13.181
회전-고정	폭 변화	17.034	44.780
	깊이 변화	8.917	22.651
	정방형	6.296	15.655
고정-회전	폭 변화	17.834	45.302
	깊이 변화	10.631	24.011
	정방형	8.014	17.216

* $\beta=0.5, k_a=k_b=1$

그림 5는 우단의 회전스프링상수 k_b 와 b_i 의 관계를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 k_b 가 증가할수록 b_i 도 증가하는 것을 알 수 있다. 그림 4와 비교하여 무차원 좌굴하중 b_i 의 값이 약간 큼을 알 수 있는데 이는 단면이 큰 지점에 회전스프링이 작용한 결과라 사료된다.

그림 6은 단부조건이 고정-회전지점, $k_a=1, \beta=0.5$ 일 때 단면형상에 따른 k_b 와 b_i 의 관계를 나타낸 그림이다. k_b 가 증가할수록 b_i 하중도 증가하지만 일정값 이상에서는 거의 수렴함을 알 수 있고 폭 변화단면, 깊이 변화단면, 정방형 변화단면 순으로 무차원 좌굴하중 b_i 의 값이 큼을 알 수 있다.

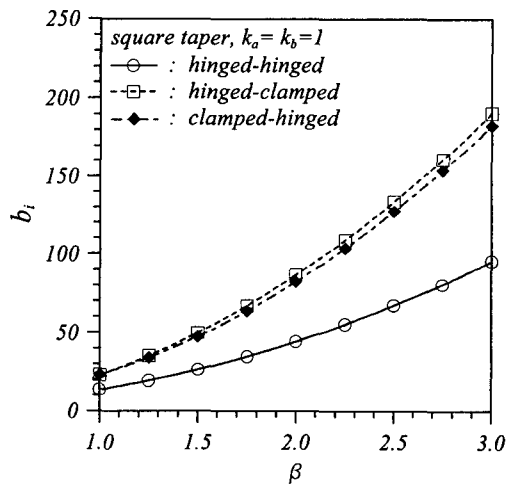


그림 3. β 와 b_i 의 관계

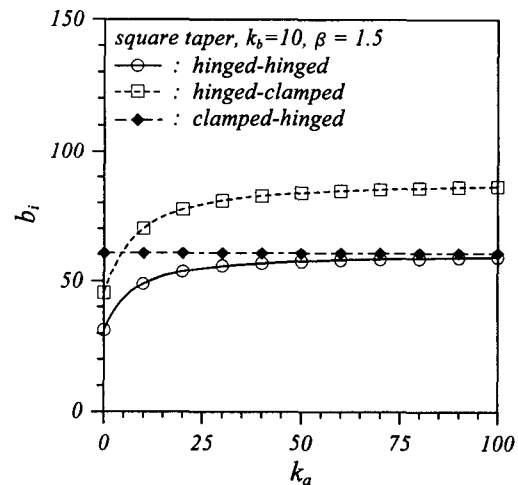


그림 4. k_a 와 b_i 의 관계

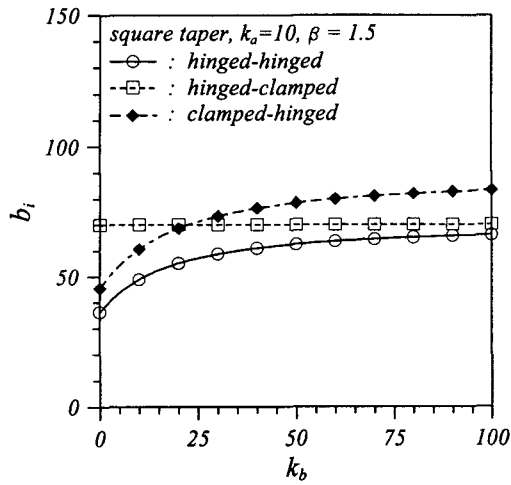


그림 5. k_b 와 b_i 의 관계

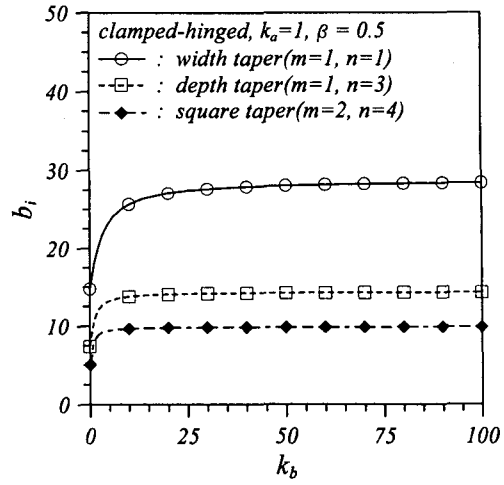


그림 6. 단면형상에 따른 k_b 와 b_i 의 관계

6. 결 론

이 논문은 단부회전이 회전스프링으로 제약받는 기둥의 좌굴하중 해석에 관한 연구이다. 이를 위하여 단부회전이 회전스프링으로 제약받는 기둥을 모형화하여 좌굴된 기둥의 정적 거동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식에는 단면비와 각 지점에서의 회전 스프링상수를 고려하였다. 이 상미분방정식들을 수치적분하기 위하여 Runge-Kutta method를 이용하고, 무차원 좌굴하중을 산출하기 위하여 Regula-Falsi method를 이용하였다. 이 연구의 수치해석 결과와 타문헌과의 결과가 아주 우수하게 접근하여 본 연구방법의 타당성을 검증할 수 있었으며 수치해석 예를 통하여 각종의 무차원 변수와 단면형상이 좌굴하중에 미치는 영향을 분석하였다. 이 연구에서 개발한 수치해석방법은 스프링으로 지지된 기둥요소 문제에 폭 넓게 응용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

1. H.K. Kim and M.S. Kim, "Vibration of Beams with Generally Restrained Boundary Conditions Using Fourier Series," *Journal of Sound and Vibration*, Vol 245, 2001, pp.771-784
2. W.L. Li, "Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 237, 2000, pp.709-725
3. N.M. Auciello, "On The Transverse Vibrations of Non-Uniform Beams with Axial Loads and Elastically Restrained Ends," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 43, 2001, pp.193-208
4. B.K Lee and J.F. Wilson, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, 1989, pp.75-89
5. 이병구, 오상진, 모정만, "단순지지 변단면 기둥의 임계하중 및 후좌굴 거동," *대한토목학회 논문집*, 제 11권 4호, 1991, pp.17-26
6. S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961, pp.126-130