

Timoshenko보 요소를 이용한 평면 뼈대구조의 탄-소성 해석 Elasto-Plastic Analysis of Plane Frame Structures using Timoshenko Beam Element

정동영* 이정석** 신영식***
Jung, Dong-Young Lee, Jeong-Seok Shin, Young-Shik

Abstract

This paper presents a non-linear analysis procedure for plane frame structures by finite element formulation with assumptions of Timoshenko beam theory. Finite element displacement method based on Lagrangian formulation is used and two-noded and isoparametric line element is adopted to represent finite element model. The layered approach is used for the elasto-plastic analysis of the plane frame structures with rectangular and I cross sections. A load incremental method combined with the tangent stiffness and the initial stiffness methods for each load increment is used for the solution of non-linear equations.

Numerical examples are presented to investigate the behavior and the accuracy of the elasto-plastic non-linear application and the results of this study are compared with other solutions using the concept of plastic hinge.

1. 서 론

본 논문에서는 축방향 변형과 전단변형을 고려한 2절점 3자유도 Timoshenko보 요소를 사용하여 뼈대구조의 탄-소성해석을 수행하였다. 탄-소성거동을 나타내기 위해 단면을 여러 층으로 분할하는 적층모델방법을 사용하였으며 평면뼈대구조의 탄-소성해석을 위한 유한요소정식화는 Lagrange보간함수를 사용하여 정식화하였다. 또한 보의 두께가 얇아질수록 강성도(stiffness)가 과도하게 평가되는 전단구속 현상을 피하기 위하여 감차적분요소(reduced integration element)를 사용하여 해석 프로그램을 구축하였다.

중전의 연구자들이 연구한 평면뼈대구조를 해석하여 그 결과를 하중-처짐관계 곡선으로 나타내어 기존의 연구결과와 비교, 검토하였는바 소성힌지개념으로 해석한 기하비선형 해석 결과와는 약간의 차이는 있으나 소변형이론을 적용한 연구 결과와는 잘 일치함을 알 수 있었다.

* 정희원 · 안동정보대학 토목과 조교수(E-mail : dyjung@www.ait.ac.kr)

** 영남대학교 토목공학과 석사졸업

*** 정희원 · 영남대학교 토목공학과 교수(E-mail : ysshin@yu.ac.kr)

2. 지배방정식

그림 1.1과 같이 Timoshenko보 이론에서는 중립축에 직각인 평면은 휨변형 후에도 평면을 유지하지만 전단 변형의 영향으로 중립축에 반드시 직각이 되지는 않는다는 이론으로서 전단변형을 고려한 지배방정식은 식 (2.1)과 같다^[1].

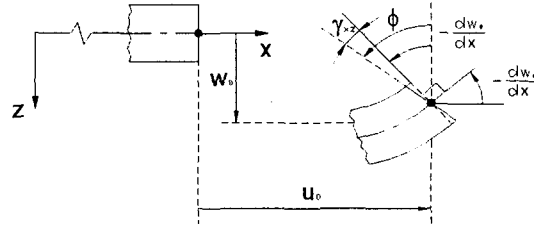


그림 1.1 Deformation of a Timoshenko beam

$$\frac{d}{dx} \left[GAK_s \left(\Phi + \frac{dw}{dx} \right) \right] + f = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\Phi}{dx} \right) - GAK_s \left(\Phi + \frac{dw}{dx} \right) = 0 \quad (2.1b)$$

여기서, G : 전단탄성계수, w : 중립축에서의 수직처짐

K_s : 전단수정계수, Φ : 전단변형을 고려한 평면의 회전변위, f : 수직력

가중함수 w_1 과 w_2 를 식 (2.1)에 곱하여 전체 요소길이에 대해서 적분을 수행하고 첫 번째 항에 대해서 부분적분을 수행하면 다음과 같다.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw_1}{dx} GAK_s \left(\Phi + \frac{dw}{dx} \right) - w_1 f \right] dx - \left[w_1 GAK_s \left(\Phi + \frac{dw}{dx} \right) \right]_{x_A}^{x_B} \quad (2.2a)$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw_2}{dx} EI \frac{d\Phi}{dx} + w_2 GAK_s \left(\Phi + \frac{dw}{dx} \right) \right] dx - \left[w_2 EI \frac{d\Phi}{dx} \right]_{x_A}^{x_B} \quad (2.2b)$$

식 (2.2)에서 주요변수는 w 와 Φ 이고 요소양단의 전단력과 휨모멘트는 식 (2.3)으로 나타내어진다.

$$Q_1^e \equiv - \left[GAK_s \left(\Phi + \frac{dw}{dx} \right) \right]_{x_A}, \quad M_2^e \equiv - \left[EI \frac{d\Phi}{dx} \right]_{x_A} \quad (2.3a)$$

$$Q_3^e \equiv - \left[GAK_s \left(\Phi + \frac{dw}{dx} \right) \right]_{x_B}, \quad M_4^e \equiv - \left[EI \frac{d\Phi}{dx} \right]_{x_B} \quad (2.3b)$$

따라서 식 (2.1)을 Weak Form으로 정식화하면 다음과 같다.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw_1}{dx} GAK_s \left(\Phi + \frac{dw}{dx} \right) - w_1 f \right] dx - w_1(x_A) Q_1^e - w_1(x_B) Q_3^e \quad (2.4a)$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{dw_2}{dx} EI \frac{d\Phi}{dx} + w_2 GAK_s \left(\Phi + \frac{dw}{dx} \right) \right] dx - w_2(x_A) M_2^e - w_2(x_B) M_4^e \quad (2.4b)$$

w 와 Φ 의 변수를 Lagrange 함수로 나타내어 식 (2.4)에 대입하면 다음과 같은 유한요소방정식을 얻을 수 있다.

$$0 = \sum_{j=1}^m K_{ij}^{11} w_j + \sum_{j=1}^m K_{ij}^{12} s_j - F_i^1 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (2.5a)$$

$$0 = \sum_{j=1}^m K_{ij}^{21} w_j + \sum_{j=1}^n K_{ij}^{22} s_j - F_i^2 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.5b)$$

식 (2.5)을 행렬로 나타내면 다음과 같다

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

보의 두께가 얇아질수록 휨에 의한 변형에너지가 발생하지 않고 처짐 값이 영(zero)이 되어 강성도(stiffness)가 과도하게 평가되는 전단구속 현상을 피하기 위하여 본 연구에서는 감차적분요소(reduced integration element)를 사용하였다.

3. 유한요소 정식화

3.1 변위장

그림 3.1과 같이 휨과 축방향거동을 동시에 고려한 Timoshenko보의 변위장은 식 (3.1)과 같이 나타낼 수 있다^[2].

$$\bar{u}(x, y) = u_0 - z\theta(x) \quad (3.1)$$

식 (3.1)에서 u_0 는 중립축에서의 축방향 변위이고, $\theta(x)$ 는 전단변형을 고려한 평면의 회전변위이다.

또한, 임의점 (x, z) 에서의 수직변위 \bar{w} 는 중립축에서의 수직변위로 주어진다.

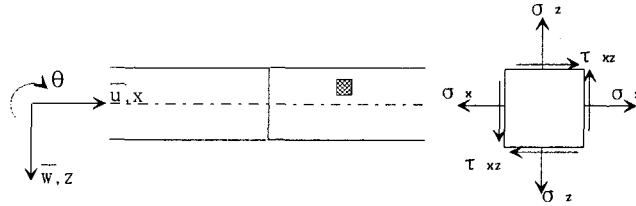


그림 3.1 Displacement field of Timoshenko beam

하중이 $x-z$ 평면에 작용하면 등방성 탄성재료의 적절한 응력-변형률 관계는 식 (3.2)과 같고 $\sigma_z = 0$ 이라 가정하면 $\epsilon_z = -\nu\epsilon_x$ 가 되며 축방향응력과 전단응력은 $\sigma_x = E\epsilon_x$ 과 $\tau_{xz} = -G\gamma_{xz}$ 가 된다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

미소변형이론을 적용하여 축방향 변형률과 전단변형률을 변위와의 관계로 나타내면 다음과 같다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} \quad (3.3a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = -\theta + \frac{dw}{dx} \quad (3.3b)$$

3.2 Hughes 요소에 의한 정식화

단면의 두께가 t 이고 폭이 b 인 부재가 분포하중 q 와 절점하중 Q_i 를 받을 때 가상변위의 정리에 의해 내력과 외력에 대한 보의 평형조건방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^l \int_{-l/2}^{l/2} \int_{b(-l/2)}^{b(l/2)} \left\{ \left(-\frac{d(\delta u_0)}{dx} - z \frac{d(\delta \theta)}{dx} \right) \sigma_x + \delta \beta \tau_{xz} \right\} dx dy dz - \int_0^l \delta w q dx - \sum_{i=1}^6 Q_i^e (\delta \Delta_i^e) = 0 \quad (3.4)$$

Hughes요소에서 절점의 변위를 $U = [u, w, \theta]^T$ 라 하고 형상함수 $N_i^{(e)}$ 를 사용하면 요소의 변형률-변위 관계는 다음과 같다.

$$\varepsilon_f^{(e)} = \left[0 \ 0 \ \frac{1}{l^{(e)}} \ 0 \ 0 \ -\frac{1}{l^{(e)}} \right] [U_i^e]^T = B_f^{(e)} \varphi^{(e)} \quad (3.5a)$$

$$\varepsilon_s^{(e)} = \left[0 \ -\frac{1}{l^{(e)}} \ -\frac{(x_2^{(e)} - x_1^{(e)})}{l^{(e)}} \ 0 \ \frac{1}{l^{(e)}} \ -\frac{(x_2^{(e)} - x_1^{(e)})}{l^{(e)}} \right] [U_i^e]^T = B_s^{(e)} \varphi^{(e)} \quad (3.5b)$$

$$\varepsilon_a^{(e)} = \left[-\frac{1}{l^{(e)}} \ 0 \ 0 \ \frac{1}{l^{(e)}} \ 0 \ 0 \right] [U_i^e]^T = B_a^{(e)} \varphi^{(e)} \quad (3.5c)$$

요소의 변형률-변위 관계에 의해 Hughes가 제안한 요소방정식의 해를 축력과 휨 및 전단강성도로 나타내면 다음과 같다.

$$[K_a + K_f + K_s] \phi - f = 0 \quad (3.6)$$

식 (3.6)에서 K_a, K_f, K_s 는 축력과 휨 및 전단에 대한 요소매트릭스, f 는 하중에 대한 벡터로서 식 (3.7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_f^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} [B_f^{(e)}]^T (EI)^{(e)} [B_f^{(e)}] dx \quad (3.7a)$$

$$K_s^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} [B_s^{(e)}]^T (GAK_s)^{(e)} [B_s^{(e)}] dx \quad (3.7b)$$

$$K_a^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} [B_a^{(e)}]^T (EA)^{(e)} [B_a^{(e)}] dx \quad (3.7c)$$

$$f^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} [0 \ N_1^{(e)} \ 0 \ 0 \ N_2^{(e)} \ 0]^T q dx + \sum_{i=1}^6 Q_i^e \Delta_i^e \quad (3.7d)$$

축력과 휨 및 전단에 의한 강성도행렬을 요소전체에 대한 강성도행렬로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[K_e] \phi - f = 0 \quad (3.8)$$

얇은 보에서 전단구속에 의해 과도한강성(over-stiff)의 해가 발생하지 않도록 하기 위해 Gauss-Legendre 감차적분을 사용하여 전단강성도를 유도하고 휨 및 축강성도와 조합하여 요소강성도 행렬을 유도하면 다음과 같다.

$$K_e = \left(\frac{EI}{l} \right)^e \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \gamma l & \frac{\gamma l}{2} & 0 & -\gamma l & 0 \\ 0 & \frac{\gamma l}{2} & \gamma \left(\frac{l^2}{4} + 1 \right) & 0 & -\frac{\gamma l}{2} & \gamma \left(\frac{l^2}{4} - 1 \right) \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma l & -\frac{\gamma l}{2} & 0 & \gamma l & -\frac{\gamma l}{2} \\ 0 & \frac{\gamma l}{2} & \gamma \left(\frac{l^2}{4} - 1 \right) & 0 & -\frac{\gamma l}{2} & \gamma \left(\frac{l^2}{4} + 1 \right) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

여기서, $\alpha = \frac{A}{I}$, $\gamma = K_s Gal$, l : 요소의 길이

그리고, 절점력 벡터는 Euler-Bernoulli의 3차 Hermitian 요소와 달리 등분포하중에 의한 절점모멘트는 고려하지 않고 절점에서 수직력만 작용하게 되며 다음과 같이 나타낸다.

$$f^{(e)} = \left[0 \quad \frac{(q\Delta)^{(e)}}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{(q\Delta)^{(e)}}{2} \quad 0 \right]^T + \sum_{i=1}^6 Q_i^{(e)} \Delta_i^{(e)} \quad (3.11)$$

3.3 탄-소성 휨거동

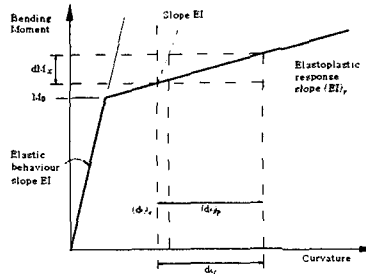


그림 3.2 Moment-curvature relationship for Timoshenko beam

그림 3.2는 탄-소성 거동을 하는 부재의 모멘트-곡률 관계를 나타낸 것으로 극한휨모멘트가 탄성을 거쳐 소성상태가 되는 단계에 이를 때까지 부재의 휨강성은 EI 로 탄성변형이 일어나게 되지만, 하중이 계속 증가하게 되면 접선휨강성 $(EI)_T$ 으로 선형 변형경화상태를 보인다. 초기항복이후의 상태에서 하중이 계속 증가하게 되면 곡률 $d\epsilon_f$ 의 변화에 의해서 휨모멘트가 점차 증가하여 탄성변형에 소성변형이 추가 발생하게 되므로 증분 변형을 $d\epsilon_f = (d\epsilon_f)_e + (d\epsilon_f)_p$ 로 나타낼 수 있다. 또한, 변형경화구간에서 매개변수 (H)는

$$H = \frac{dM}{(d\epsilon_f)_p} \text{로서 탄성부분을 제거한 후의 휨모멘트와 변형경화부분의 비율로 } H = \frac{(EI)_T}{1 - [(EI)_T/EI]} \text{로}$$

나타낼 수 있으며 증분 변형량으로 나타내면 식 (3.11), 모멘트-곡률 증분관계로 나타내면 식 (3.12)과 같이 나타낼 수 있다. 계속해서 하중이 증가하여 재료가 항복하는 동안 응력-변형률의 증분합의 관계는 식 (3.13)와 같으며 식 (3.14)에서 알 수 있는 것과 같이 모멘트-곡률 관계는 탄-소성 거동을 보이지만 전단력-전단변형률은 언제나 탄성거동을 보인다.

$$d\epsilon_f = \frac{dM}{EI} + \frac{dM}{H} = \frac{dM(H + EI)}{EIH} \quad (3.11)$$

$$dM = EI \left(1 - \frac{EI}{EI + H} \right) d\epsilon_f, \quad (3.12)$$

$$dQ = GAK_s d\epsilon_s \quad (3.13)$$

비선형 탄-소성해석 접근방법으로 요소의 두께방향에 대하여 임의의 두께를 갖는 여러 층(layer)으로 나누고 각 층에 대해 재료의 구성방정식을 구하여 응력을 평가함으로써 단면력을 구할 수 있는 층단면모델을 사용하였다. 층 단면모델은 응력의 향으로 나타내며 층의 중간부분의 응력상태는 전체층의 응력상태로 표현되고 축방향력 휨모멘트 및 전단력은 오직 층 두께의 증분에 의해 분할된 각 층에서 알 수 있으며 mid-ordinate 법칙을 사용하면 식 (3.14)와 같다. 축강성, 휨강성, 전단강성은 식 (3.15)을 사용한다. 만약, 층의 중간부에서 발생하는 응력이 층 재료의 항복응력에 도달하게 되면 전체가 소성으로 평가되고, 탄성계수

(E_i)의 값을 $E_i \left(1 - \frac{E_i}{E_i + H}\right)$ 값으로 계산한다.

$$P = EA\varepsilon_a, \quad M = EI \left(-\frac{d\theta}{dx}\right), \quad Q = GAK_s \varepsilon_s \quad (3.14)$$

$$EA = \sum E_i b_i t_i, \quad EI = \sum E_i b_i z_i^2 t_i, \quad GAK_s = K_s \sum G_i b_i t_i \quad (3.15)$$

4. 비선형 평형방정식

요소변위를 전체변위로 나타내기 위해 유한요소 망(mesh)을 형상함수 (N)와 절점 변위벡터 (φ)를 사용하여 나타내면 식 (4.1)과 같다. 전체 유한요소 망 안에 있는 중립축에서의 축방향 변형률과 임의점에서의 곡률 및 전단변형률을 가상일의 정리를 사용하여 가상 변위와 절점벡터로 나타내면 식 (4.2)과 같다

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{bmatrix} = N \varphi \quad (4.1)$$

$$\int_0^l [\delta \varphi]^T [B_0]^T \bar{P} dx + \int_0^l [\delta \varphi]^T [B_f]^T \bar{M} dx + \int_0^l [\delta \varphi]^T [B_s]^T \bar{Q} dx - \int_0^l [\delta \varphi]^T [\bar{N}]^T q dx - \sum_{i=1}^n Q_i^e (\delta \Delta_i^e) = 0 \quad (4.2)$$

식 (4.2)를 가상 변위의 항으로 나타내면 다음과 같다

$$[\delta \varphi]^T [P_a + P_f + P_s] - [\delta \varphi]^T f = 0 \quad (4.3)$$

여기서, $P_a = \int_0^l [B_0]^T \bar{P} dx$, $P_f = \int_0^l [B_f]^T \bar{M} dx$, $P_s = \int_0^l [B_s]^T \bar{Q} dx$

따라서 식 (4.3)은 다음과 같이 된다

$$[P_a + P_f + P_s] - f = 0 \quad (4.4)$$

5. 해석 프로그램 과정

프로그램의 해석은 다음과 같은 절차에 의해서 진행된다.

1. 하중계수에 의해 하중을 증가시킨다.

$f = f + \Delta f$, 그리고 반복횟수 $i = 0$, $\psi^{i+1} = \Delta f + \psi$ 로 진행한다.

2. 필요하다면 새로운 접선강도 매트릭스를 계산한다.

3. $\psi^i = K_T \Delta \varphi^i$ 를 계산한다.

4. $\varphi = \varphi + \Delta \varphi^i$ 를 계산한다.

5. 모든 요소에 대해 각 단면층의 $\sigma_0^{(e)}$, $\sigma_{xl}^{(e)}$, $\tau_{xz}^{(e)}$ 을 구하고, 여기에서 $\sigma_{xl}^{(e)}$ 값을 체크하여 소성거동의 영향에 의해 그 값을 수정한다. 응력의 합 \bar{P} 와 \bar{M} 과 \bar{Q} 을 계산한 다음 잔류력벡터 $[\psi^{(e)}]^{i+1} = p^{(e)} - f^{(e)}$ 를 구하고 $[\psi^{(e)}]^{i+1}$ 을 전체 구조물의 잔류력벡터 ψ^{i+1} 에 조립해 나간다.

6. $\Delta \psi^i$ 의 수렴여부를 검토한다.

7. 수렴을 하게 되면 $\psi = \psi^{i+1}$ 로 두고, 1번의 과정으로 반복하고, 그렇지 않은 경우 $i = i + 1$ 로 두고 2번

의 과정으로 반복한다.

6. 예제해석 및 고찰

6.1 수평하중을 받는 뼈대구조

그림 6.1과 같이 1경간 1층 뼈대구조모델이며 단면을 8층으로 나누고, 요소당 2절점으로 12요소로 분할하여 해석한 결과를 소변형이론을 기초로 한 Argyris의 결과^[3] 및 처짐각법에 의한 이론적인 해석 결과^[4]와 비교 검토하여 그림 6.2에 나타내었다. 다른 두 해석 결과와 마찬가지로 탄성부분에서는 잘 일치하고 소성상태로 항복하는 점은 이론적인 해석결과^[4]의 첫 번째 힌지 발생시의 하중-변위 값과 거의 일치하지만, 이후의 하중단계에서는 하중 값이 높게 나타남을 알 수 있었다.

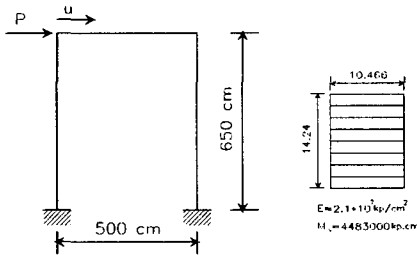


그림 6.1 One-bay frame model

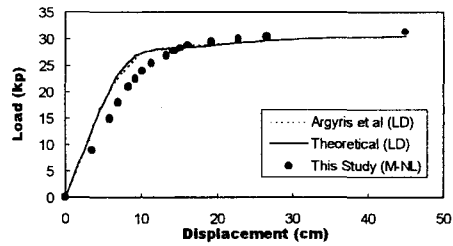


그림 6.2 Load-displacement relations

6.2 수직하중을 받는 경사 뼈대구조

그림 6.3은 경사진 지붕 뼈대구조의 모델과 단면을 나타낸 것으로 단면을 8층으로 나누고, 18개의 유한요소로 분할하여 해석하였다. 해석 결과를 Majid의 수치해석^[5] 및 김문영^[6]의 결과와 비교 검토하여 그림 6.4에 나타내었다. 대변형효과를 고려한 Majid의 수치해석결과는 김문영의 연구 결과와 잘 일치한다. 미소변형이론에 의한 본 연구의 결과를 다른 두 결과와 비교할 때 탄성부분에서는 잘 일치하지만, 소성이 진행되면서 다른 두 연구 결과보다 하중이 높게 나타나고 극한하중 값이 커지게 된다.

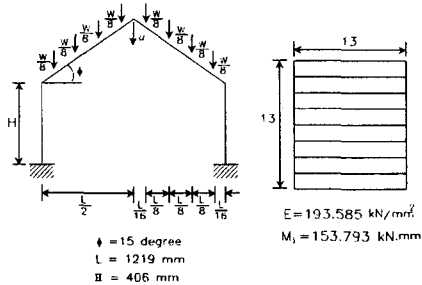


그림 6.3 Pitched roof frame model

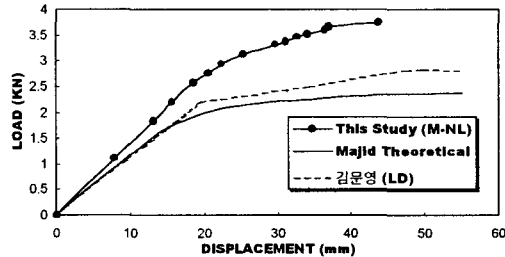


그림 6.4 Load-displacement relations

6.3 수평, 수직하중을 받는 I형 단면 뼈대구조

그림 6.5는 양단 고정 지지된 뼈대구조모델이며 단면을 8층으로 나누고, 18개의 요소로 분할하여 해석하였다. 탄-소성 해석 결과와 Schilling^[6]의 실험결과 및 처짐각법에 의한 이론적인 해석 결과^[4]를 그림 6.6에 나타내었다. 이론적인 해석결과의 극한하중은 32.1kips이고, 본 연구에서의 극한하중은 31.5kips으로 Schilling의 실험결과와 잘 일치한다. 그러나 탄성부분에서는 이론적인 해석결과와 약간의 차이를 보이고, 각 층으로

진행되는 소성거동이 잘 나타나지 않음을 보여주고 있다.

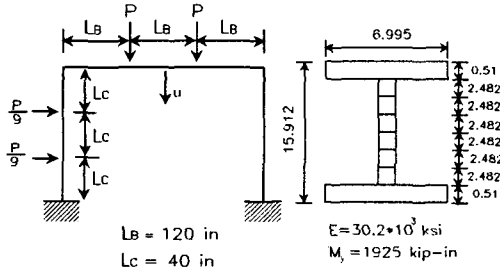


그림 6.5 I-shaped single-span frame model

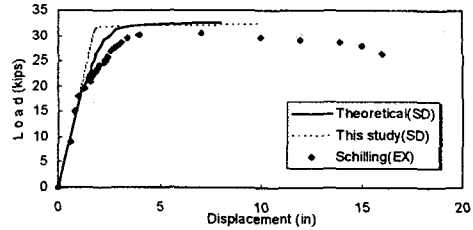


그림 6.6 Load-displacement relations

6. 결론

본 연구는 Timoshenko보 요소를 이용하여 평면뼈대구조에 대한 비선형거동을 해석하여 Argyris의 결과 및 Schilling의 실험결과, 처짐각법에 의한 이론적인 해석결과와 비교, 검토해 보았다. 본 연구의 결과를 요약 하면 다음과 같다.

- (1) 예제 해석 결과에서 알 수 있듯이 Timoshenko보 요소를 사용하여 단면을 8층으로 분할하여 해석한 결과 탄-소성거동을 잘 나타내고 있다. 특히 탄성부분에서는 잘 일치하지만 소성이 진행되면서 하중이 약간 높게 평가되는 것은 축력과 휨모멘트의 상호 작용인 Bowing효과를 고려하지 않았기 때문이다.
- (2) Argyris는 축력과 모멘트의 영향을 함께 고려한 한계항복함수를 사용하였지만, 본 연구에서는 다수 층의 일축 응력-변형도 관계로부터 소성거동이 표현되므로 소성이 진행되면서 하중이 크게 나타났다.
- (3) 본 연구에서 사용한 층 단면모델은 소성영역이 점차로 진행되는 탄-소성거동을 비교적 잘 나타내주고 있다.

앞으로 본 연구에 이어서 진행되는 분야는 축력과 모멘트의 복합적인 항복함수를 정의해주고, Moving coordinate를 이용한 기하비선형 해석 알고리즘을 확장과 철근콘크리트구조의 유한요소모델을 구축하고 실험을 통한 검증으로 이어질 것이다.

참고문헌

1. J. N. Reddy, 「An Introduction to the Finite Element Method」 McGraw-Hill, 1993.
2. D. R. J. Owen and E. Hinton, 「Finite Element in Plasticity Theory and Practice」, Pineridge Press, 1980.
3. Argyris, J. H., Boni, B., Hincleniang, W. and Kleiber, M., "Finite element analysis of two and three dimensional elasto-plastic frames the natural approach", *Compu Meth Appl. Eng.*, Vol. 35, 1982, pp. 221-248.
4. 김문영, 장승필, "전단변형을 고려한 평면뼈대 구조물의 기하학적인 비선형 해석", 대한토목학회 논문집, 제 10권 제 1호, 1990, pp. 27-36
5. Majid, K. I., 「Non-linear Structures」, John Wiley and Sons, New York, 1972.
6. Schilling, C. G., Schutz, F. W. and Beadle, L. S., "Behavior of welded single-span Frames Under Combined load", *Welding J. Res Supple.*, 35, 1956, pp.234-252