

R-adptivity 기법을 이용한 셸 곡면의 유한요소해석 Fimite Element Analysis for Shell Surface using R-adativity

전 성 기* 조 맹 효**
Jeon, Seong-Ki Cho, Maenghyo

ABSTRACT

The R-adaptivity method to the shell surface which is presented by the NURBS is proposed. The r-adaptivity method, given by Liao and Anderson[2], aggregate the grid in the region where is relatively high weight function without any grid-tanggling. In numerical examples, the strain energy error estimate of shell in the whole domain can be reduced effectively by using applied r-adaptivity method mesh.

1. 서 론

컴퓨터를 이용한 수치해석의 해는 신뢰성과 효율성이 주요한 관심사항이다. 신뢰성이란 해의 오차가 허용 오차 내에 있어야 한다는 것을 의미하고 효율성이란 적은 계산 비용으로 만족할만한 해를 구할 수 있음을 의미한다. 수치해석을 바탕으로 하는 유한요소법은 불가결한 오차를 수반하게 된다. 유한요소법에서의 주요한 오차 원인은 이산화(discretization)에 의한 오차, 수치계산상의 오차 그리고 구적법(quadrature)에 의한 오차 등이 있다. 이산화에 의한 오차는 연속적인 수학적 모델을 이산화된 형태의 유한한 자유도로 표현하는데서 나타나며, 구적법에 의한 오차는 Galerkin formulation에서 비롯되는 적분을 계산하는데 따른 오차이다. 체적 세분화(mesh refinement)는 적은 계산 비용으로 이산화에 의한 오차를 줄이는 방법으로 사용되어왔다. 지금까지 주로 사용한 체적 세분화 방법은 오차 해석을 통해 오차가 큰 요소의 길이를 줄이는 h-adaptivity 방법과 요소의 차수를 높이는 방법의 p-adaptivity 방법을 주로 사용해왔다. 그러나 이 방법들은 요소의 절점수, 요소수, 요소 차수가 증가하기 때문에 계산 비용이 증가하는 단점을 가지고 있다. 이러한 효율성의 단점을 가지고 있지 않는 체적 세분화 방법으로 r-adaptivity 방법이 있다. 즉 r-adaptivity 방법은 기존의 절점을 이동하는 방법으로 절점을 요소의 차수의 증가나 새로운 절점의 추가 필요성이 없다.[1]

본 연구에서는 cell volume deformation에 의한 절점 이동 방법을 셸 유한 요소 문제에 적용하였다. (degenerated) 셸 요소를 이용한 유한요소 해석에 있어서의 주요한 기하학적 오차는 곡률(curvature) 오차와 체눈(mesh distortion)의 찌그러짐에 의한 것이 일반적이다. 이러한 경우는 곡률 오차와 체눈의 찌그러짐에 의한 오차가 혼합적으로 작용하기 때문에 각각의 계산 오차를 선별하는 것은 쉽지 않다. 그러나 본 연구에서 사용된 셸 요소는 정확한 기하학적 표현을 기반으로 하는 셸 요소이기 때문에 곡률 오차는 발생하지 않는다. deformation cell-mapping을 통한 r-adaptivity 방법은 균일 체눈을 이용하여 변형을 에너지가 상대적으로

* 서울대학교 기계공학부 석사과정

** 서울대학교 기계항공공학부 부교수

큰 요소는 크기가 줄어들고 반대로 변형률 에너지가 상대적으로 작은 요소의 크기는 커짐으로써 변형률 에너지 오차를 경감시키고자 한다.

2. R-adaptivity Method

절점 생성에 있어서 고려해야할 사항은 변환이 일대일 대응이 성립하지 않을 때 절점이 겹치는 현상이 일어나는 것이다. Liao와 Anderson[2]이 제안한 cell volume deformation 방법은 절점 생성 변환에 제한을 가함으로써 변환이 일대일 대응이 되도록 하여 절점이 겹쳐지는 현상을 방지하였다. 본 연구에서 사용된 r-adaptivity의 수학적 근거는 다음과 같다.

$\Omega \subset R^n$ 는 $\partial\Omega$ 를 경계로 하는 영역이며 아래 식(1)를 만족하는 가중치(weighting) 함수 $f(x) > 0: \Omega \rightarrow R$ 를 원할함수(smooth function)라 한다.

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{f} - 1 \right) dx = 0 \quad (1)$$

여기서 dx 는 체적 요소(volume element)를 의미한다. 식(2)를 만족하는 일대일, onto 변환을 찾을 수 있다.

$$\begin{aligned} \det \nabla \phi(x) &= f(\phi(x)), & x \in \Omega, \\ \phi(x) &= x, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 x 는 초기 절점의 위치를 의미하며 ϕ 는 변환 후 절점의 위치를 의미한다. 함수 $f(\phi(x))$ 는 변환 Jacobian 또는 새로운 절점의 cell 크기를 뜻한다. 따라서 식(2)의 해는 새로운 절점 $\phi(x)$ 의 위치에 따른 cell 크기 분포를 나타낸다.

Liao와 Anderson[2]은 식(2)을 만족하는 $\phi(x)$ 를 다음과 같은 방법을 제안하였다.

Step 1. 선형화한 식(3)을 만족하는 벡터장 $v(x)$ 를 구성한다.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v(x) &= \frac{1}{f(x)} - 1, & x \in \Omega \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

Step 2. 식(3)의 해를 아래와 같이 구한다.

$n=2$ 일 때 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 인 영역에서 함수 $G(x)$ 를 식(4)와 같이 정의하면

$$G(x) = G(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} g(t, x_2) dt \quad (4)$$

여기서 $g = \frac{1}{f} - 1$ 이고 경계 $\partial\Omega$ 에서 $g=0$ 이므로 함수 $G(x)$ 는

$$G(0, x_2) = G(x_1, 0) = G(x_1, 1) = 0 \quad (5)$$

이 된다.
또한,

$$\int_{\Omega} f(x) dx_1 dx_2 = 1 \quad (6)$$

이므로

$$\int_0^1 G(1, x_2) dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \quad (7)$$

이 만족된다.

식 (8)을 만족하는 영역 $[0,1]$ 에서 C^1 함수 h 를 구성하면

$$h(0) = h'(0) = h'(1), h(1) = 1 \quad (8)$$

다음의 벡터장 $v(x)$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} g(t, x_2) dt - h(x_1) \int_0^1 g(t, x_2) dt \\ v_2(x_1, x_2) &= h'(x_1) \int_0^{x_2} \int_0^1 g(t, s) dt ds \end{aligned} \quad (9)$$

Step 3. 고정된 $x \in \Omega$ 에 대하여 변형 방정식(defomation equation)을 푼다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi(x, t) &= \eta(\phi(x, t), t), \quad 0 < t < 1, \\ \phi(x, 1) &= x \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 t 는 artificial time parameter이고 변형 벡터장 η 는 아래와 같이 정의한다.

$$\eta(y, t) = \frac{v(y)}{\{t + (1-t)g(y)\}} \quad (11)$$

step4. 식(2)를 만족하는 $\phi(x)$ 를 다음과 같이 놓는다.

$$\phi(x) = \phi(x, 0) \quad (12)$$

여기서 $\phi(x)$ 는 non-degenerative 절점 생성 변환을 의미한다.

3. 일차전단 변형 Naghdi 쉘 이론

일반적인 쉘 이론[3]을 기초로 하여 유한요소화에 사용되는 변형률을 가정하였다. 일반 텐서에 기초한 쉘 이론에서는 일반적으로 면내 변형률 텐서를 다음과 같이 나타낸다[4].

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\dot{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \quad (13)$$

변형률 텐서를 변형전의 표면 텐서로 나타내기 위해서는 먼저 변형후의 물리량을 변형전의 물리량으로 표현해야한다. 변형전의 위치 벡터 \vec{R} 는 변형후의 위치 벡터 \vec{r} 과 표면에 수직인 단위벡터 \vec{a}_3 으로 표현한다.

$$\vec{R} = \vec{r} + \theta^3 \vec{a}_3 \quad (14)$$

또한 공변 기저 벡터는

$$\begin{aligned} \vec{g}_\alpha &= \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}(\vec{r} + \theta^3 \vec{a}_3) \\ &= \vec{a}_\alpha - b_\alpha^\gamma \vec{a}_\gamma \theta^3 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $\vec{a}_\alpha = \vec{r}_{,\alpha}$ 와 b_α^γ 는 각각 표면 좌표 곡선의 접선 벡터와 혼합 곡률 텐서를 나타낸다. 표면 메트릭 텐서(metric tensor)의 공변 성분은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta, \quad a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta \\ b_{\alpha\beta} &= -\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta} \\ b_\beta^\alpha &= b_{\alpha\beta} a^{\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (16)$$

따라서 면내 변형률 텐서를 정리하면 다음과 같이 면내 성분을 가지는 텐서와 곡률 특성을 나타내는 텐서로 나누어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\dot{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(\dot{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) - (b_{\alpha\beta}^\cdot - b_{\alpha\beta})\theta^3 + \frac{1}{2}(b_{\alpha\mu}^\cdot b_\beta^\mu - b_{\alpha\mu} b_\beta^\mu)(\theta^3)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$E_{\alpha\beta}$ 를 두께에 대해 선형으로 가정하면 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$E_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \theta^3 \omega_{\alpha\beta} \quad (18)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}), \omega_{\alpha\beta} = - (b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$$

여기서 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 와 $\omega_{\alpha\beta}$ 는 멤브레인량과 굽힘량을 나타낸다. 또한 동일한 방법으로 전단변형량 γ_α 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\gamma_{\alpha=2E_\alpha} = (g'_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \quad (19)$$

일반적인 쉘 모델에서 전단변형량 γ_α 는 두께방향으로 일정하다고 가정한다. 식 (18) 과 (19)로부터 멤브레인량, 굽힘량, 전단변형량을 변위, 표면 메트릭, 곡률의 항으로 나타내면 다음과 같다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha||\beta} + u_{\beta||\alpha} - 2b_{\alpha\beta}w)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\psi_{\alpha||\beta} + \psi_{\beta||\alpha} - b_\alpha^\lambda (u_{\lambda||\beta} - b_{\lambda\beta}w) - b_\beta^\lambda (u_{\lambda||\alpha} - b_{\lambda\alpha}w)] \quad (20)$$

$$\gamma_\alpha = (w,_{,\alpha} + \psi_\alpha + b_\alpha^\lambda u_\lambda)$$

셸 유한요소에 대한 자세한 내용은 참고 문헌 [4]에 잘 나타나 있다.

4. NURBS Surface를 이용한 Shell 곡면 표현

Cox-de Boor의 B-스플라인 곡선을 다음과 같은 순환식 형태로 표현한다.

$$C(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) P_i \quad (21)$$

여기서 p 는 오더 즉, 곡선의 차수는 $p-1$ 이며, $n+1$ 은 조정점의 개수이다. 기저 함수 $N_{i,p}(t)$ 는 Cox-de Boor 순환식을 통해 다음과 같이 정의된다.

$$N_{i,p}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+p+1}-t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p}-t}{t_{i+p}-t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

B-스플라인의 확장 형태로서 B-스플라인 곡면은 B-스플라인의 텐서 곱으로 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n V_{i,j} M_{j,q} N_{i,p}(u) \quad (23)$$

$$(u_{p-1} \leq u \leq u_{m+1}, v_{q-1} \leq v \leq v_{q+1})$$

$N_{i,p}(u), M_{j,q}(v)$ 는 각각 u, v 방향의 오더가 p, q 인 B-스플라인 기저 함수이다.

NURBS 곡선은 B-스플라인 곡선의 유리형태(rational form)로 아래와 같이 정의된다.

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) w_i} = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(t) P_i \quad (24)$$

$$R_{i,p}(t) = \frac{N_{i,p}(t) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(t) w_j}$$

$R_{i,p}(t)$ 는 NURBS 곡선의 유리 기저 혼합 함수(rational base blending function)이고 w_i 는 조정점 p_i 의 가중치이다. $(p \times q)$ 의 차수를 갖는 NURBS 곡면은

$$R(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} P_{i,j} M_{j,q}(v) N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} M_{j,q}(v) N_{i,p}(u)} \quad (25)$$

으로 표현할 수 있다. 만약 모든 가중치 $w_{i,j}$ 가 동일하다면 식 (16)에 표현된 NURBS 곡면은 식(14)에서 정의된 B-스플라인 곡면이 된다.

5. 수치예제

NURBS 곡면으로 표현된 쉘 요소에 r-adaptivity를 적용한 몇 가지 예를 수행하였다. 그 예로서 원통형 쉘, 구형 쉘, 그리고 mexican hat을 모델 선정하였고 가중치 함수는 변형률 에너지 오차 (strain energy error)를 사용하였다. 그러나 일반적으로 변형률 에너지 오차는 식(1)를 만족하지 않기 때문에 다음과 같이 수정하여 가중치 함수로 사용하였다.

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - 1 = \frac{C(\text{국부 변형률 에너지 오차})}{\text{최대 변형률 에너지 오차}} \quad (26)$$

여기서 C 는 normalizing factor이다. 즉 변형률 에너지 오차가 작은 영역은 $g(x)$ 가 0에 가까워지고 반대로 변형률 에너지 오차가 큰 영역은 C 에 근접하게 되므로 절점은 에너지 오차가 큰 영역에 집중하게 된다.

5.1 원통형 셀

그림 1에서 볼 수 있듯이 양단이 다이아프램으로 고정된 원통형 셀의 양 중앙에 반경 방향 집중 하중이 가해지는 문제이다. 그림 1은 2장에서 설명한 r-adaptivity 방법을 적용하기 전과 후의 메쉬 형태를 나타내고 있으며 메쉬가 겹치는 현상이 없음을 알 수 있다. 그림 2은 균일 메쉬에서 변형률 에너지 오차의 contour를 나타내고 있으며 오른쪽 그림은 r-adaptivity를 적용하였을 때의 변형률 에너지 오차를 보여 주고 있다. 그림 2에서 알 수 있듯이 변형률 에너지 오차 추정치(estimator)가 크게 개선된 것을 알 수 있다.

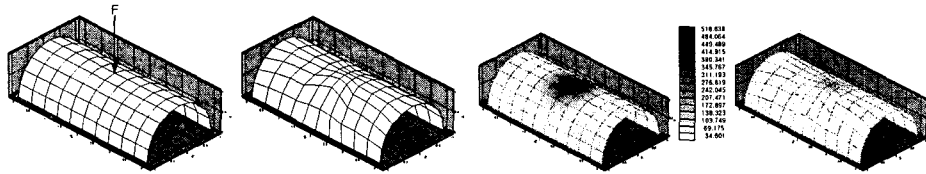


그림 1 원통형 셀의 절점분포 (r-adaptivity 적용 전과 후)

그림 2 원통형 셀의 변형률 에너지 오차 추정치 contour

5.2 구형 셀

그림 3은 구형 셀에 집중하중이 가해지는 모습과 상응하는 메쉬의 모양을 나타내고 있다. 구형 셀에 가해진 집중하중이 90° 간격의 방향이 반대인 크기가 동일한 하중이므로 r-adaptivity를 적용한 그림 3의 오른쪽 그림에서 절점이 45°에 대하여 동일한 양으로 움직였음을 나타낸다. 그림 4는 변형률 에너지 오차가 확연히 줄어드는 것을 보이고 있다.

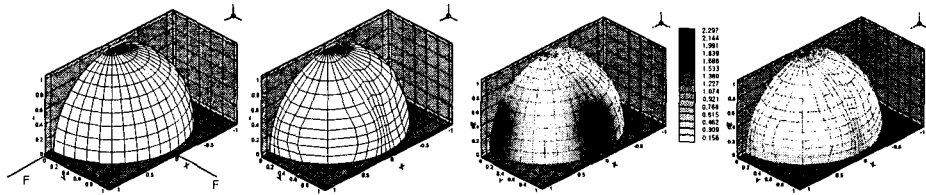


그림 3 구형 셀의 절점분포 (r-adaptivity 적용 전과 후)

그림 4 구형 셀의 변형률 에너지 오차 추정치 contour

5.3 mexican hat

mexican hat의 하중 조건은 구형 셀의 하중 조건과 동일하다(그림 5). 원통형 셀과 구형 셀의

예와 마찬가지로 r-adaptivity를 적용하면 집중 하중이 가해진 부분에 겹침 현상 없이 절점이 결집하게 되고 변형률 에너지 오차 추정치가 크게 향상되었다(그림 6).

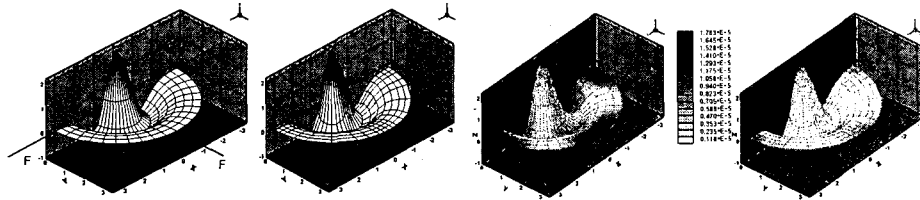


그림 5 mexican hat의 절점분포
(r-adaptivity 적용 전과 후)

그림 6 mexican hat의 변형률 에너지 오차
추정치 contour

6. 결 론

본 연구에서는 r-adaptivity 방법을 기하학적으로 정확히 표현된 쉘 요소에 적용하였다. 가중치 함수의 상대적 크기에 따라 절점을 겹침 현상이 없이 이동시켜 가중치 함수의 크기가 큰 영역에 절점이 집중되는 것을 보였다. 또한 앞에서 살펴본 바와 같이 초기의 균일한 메쉬를 사용하여 구한 해(변형률 에너지 오차)보다 r-adaptivity를 적용하여 구한 해가 훨씬 정확한 것을 알 수 있었다.

참고 문헌

1. George, P. L., "Automatic mesh generation: application to finite element methods", Chichester, New York, 1991
2. Goujun Liao and Dale Anderson, "A new approach to grid generation", *Applicable Analysis*, Vol. 44, 1991. pp.253-273
3. Naghdi, P. M., "Formulation of Elastic Shell Theory", *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 4, Edited by Sneddon. I. N.
4. Maenghoy Cho and Hee Yuel Roh, "General tensor-based Naghdi shell element with NURBS surface representation, AIAA/ASME/ASCE/AHS, 42th SDM Conference, Seattle, WA, AIAA Paper No. 2000-1399
5. DeBoor, C., "On calculation with B-spline", *Journal of Approximation Theory*, Vol.6, No.1, 1972, pp.50-62