

곡면 구조물 통합 설계를 위한 쉘 해석과 곡면 모델링의 연동 개요

The outline of a Link between Shell Analysis and Surface Modeling for Surface Structural Integrated Design

노 회 열* 조 맹 효**
Roh, Hee-Yuel Cho, Maenghyo

ABSTRACT

In the present study, we propose the framework which directly links shell finite element to the surface geometric modeling. For the development of a robust shell element, partial mixed variational functional is provided. The NURBS is used to generate the general free form of parameterized shell surfaces. Employment of NURBS makes shell finite element handle the arbitrary geometry of the smooth shell surfaces. The proposed shell finite element model linked with NURBS surface representation provides efficiency for design and analysis and can be directly extended to surface shape optimization problems in future work.

1. 서 론

쉘 유한요소는 지난 30여년간 활발히 개발되어 왔고 아직도 많은 연구가 이루어지고 있는 분야이다. 쉘은 곡률을 가지는 얇은 구조물로서 형상이 복잡하여 해석적인 방법으로는 쉘 문제를 접근하기가 까다롭다. 유한요소법은 다양한 기하학적 형상, 경계조건, 하중조건에 대해서 강력하게 적용할 수 있는 도구이므로 쉘 문제의 수치해석에 적합하다. 쉘 요소의 기울기의 연속조건을 만족시켜야 하는 번거로움 때문에 고전 쉘 이론에 근거한 유한요소는 널리 쓰이지 않고 있고, 변위의 연속 조건만 만족시키면 되는 Mindlin/Reissner 타입의 쉘 요소는 잠김(locking)현상이라는 수치 문제로 그 적용이 제한적이다. 최근 20여년간의 쉘 요소 개발에 대한 연구는 locking을 방지하고 안정적인 선형/비선형 쉘요소를 개발하는데 초점이 맞추어져 왔다.

또한 Ahmad⁽¹⁾등이 degenerated shell 요소를 제안한 이래 곡률을 따르는 일반 곡선 좌표계를 사용하지 않고 직교 좌표계를 사용하여 쉘을 해석하는 것이 가능해졌으므로 그 편이성 때문에 degenerated shell 요소의 개발이 그 주종을 이루고 있다. 그러나 degenerated shell 요소는 요소 내에서의 기하학적인 쉘의 형상을 근사를 통해 보간 하므로 비록 많은 수의 요소를 사용하게 되면 그 해석에서 오차가 줄어들게 되나 실제 복잡한 형상의 쉘을 효율적으로 해석하는데는 그 한계가 있다. 그러므로 정확한 기하학적인 형상을 고려한 쉘 이론에 근거한 유한요소의 개발이 Simo^{(2),(3)}등에 의해 수행되었다.

한편 CAD 시스템에 사용되는 기하학적인 모델링(CAGD:Computer Aided Geometric Design)은 최근에는 NURBS(Non Uniform Rational B-Spline) 방법을 널리 사용하고 있다. 일반적으로 NURBS 방법을 사용하면

* 서울대학교 기계항공공학부 박사과정

** 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수

곡면은 2개의 매개변수로 나타낼 수 있다. 따라서 CAD 시스템에서 얻은 쉘 형상의 기하학적인 모델링을 쉘 구조물의 유한요소해석과 연결하기를 원한다면 쉘 유한요소 해석 처리순서 안에 NURBS 방법을 삽입하여 하나의 해석 프로그램을 만들면 효율적일 것이다. 일반 좌표계에 기초한 쉘 유한요소는 이러한 목적에 적합한 요소이다. 또한 모든 기하학적인 계산은 NURBS 방법을 통해 얻은 국지 접선 표면에서 이루어진다.

쉘 형상을 나타내는데 2가지 방법이 있는데, 그 중의 첫 번째는 정확한 해석적인 표현식을 사용하는 것이다. 이 경우에는 쉘 형상을 정확한 표현식을 사용하기 때문에 쉘을 해석하는데 있어서 기하학적인 오차가 전혀 없는 장점이 있다. 그러나 복잡한 곡면 구조를 설계 할 때는 해석적으로 주어지는 정확한 곡면 표현식을 미리 알 수 없다는 한계가 있다. 두 번째는 추출된 점들로부터 곡면을 나타내는 것이다. 이 기하학적 모델링은 일반적으로 CAD 시스템에서 사용되고 있는 방법이다. 이러한 형상은 감절점 요소에서 사용하는 등매개변수 보간법에서 도출 되는 쉘 형상의 근사식에서는 기대할 수 없는 결과이다. 따라서 NURBS의 형상 표현과 연동하는 쉘 유한요소는 이러한 기하학적인 관점에서 이점을 가진다.

쉘 유한요소를 실제적으로 적용할 때는 통상적으로, CAD의 기하학적인 모델링에서 얻은 쉘의 절점 자료가 유한요소 해석 프로그램의 입력자료로 전환된다. 이러한 구조는 종종 CAD 시스템과 유한요소 해석 모듈 간의 상호 연동에 문제를 야기한다. 게다가 해석을 위한 쉘 표면을 나타내기 위해 사용된 보간 함수는 등매개변수 다항함수이기 때문에 CAD의 기하학적인 모델링만큼 정확하지 못하다. 심지어 격자를 세분화할 때, 세분화된 격자점들은 CAD 시스템과 유한요소해석 시스템의 상호 연동에서 반복적으로 얻어져야한다. 이러한 과정에서 CAD 시스템은 상호 연동을 위해 불필요한 작업을 계속적으로 반복한다. 또한 유한요소해석 시스템은 부정확한 쉘의 곡면을 나타내게 된다. 따라서 추출된 격자점들을 보간해서 쉘의 곡면을 근사화하는 것보다는 CAD 시스템에 의해 생성된 기하학적인 정보를 직접 이용하는 것이 더 효율적이며 정확하다.

최근 M.Ortiz와 P.Schroder^{(4),(5)} 등은 subdivision surface를 이용한 연동에 관한 연구를 진행 중이다. 그들은 box spline을 이용하고 subdivision의 Loop scheme을 이용하여 삼각형 격자를 구성해서 얇은 쉘의 통합 설계에 관한 연구를 최근 수행하고 있다. 그러나 연구가 얇은 쉘로 국한되어 있어 본 연구와 같이 moderate thick shell은 다루지 못하는 단점이 있고 단지 삼각 격자 만을 이용하고 있어 요소 성능이 우수하지 못하여 상대적으로 FE 해석에서 많은 전산 자원을 요구한다.

본 연구에서는 쉘의 기하학적 모델링과 쉘의 유한요소 해석을 연동할 수 있는 프레임워크를 소개하고 이 프레임워크를 이용한 쉘 해석 결과를 제시하는데 있다.

먼저, CAE에서는 일반 곡선 좌표계에 기초한 쉘 이론으로부터 1차 전단 변형 쉘 유한요소를 사용한다. 수치적으로 문제를 야기하는 전단변형 잠김(transverse shear locking) 현상과 멤브레인 잠김(membrane locking) 현상을 저감하기 위해서 선별적으로 변형도 가정법을 사용하여 안정적이며 고성능을 가지는 쉘 유한요소를 개발하여 사용한다. 일반 곡선 좌표계에서 기초한 쉘 유한요소는 2개의 매개변수로 일반 곡면을 표시하기 때문에 CAD에서 주어지는 곡면 표현식과 동일하여 직접 연동이 가능하다. 즉 곡면을 묘사하기 위해 동일한 표현식을 CAD와 CAE(Computer-Aided Engineering)에서 사용하게 된다. 그러므로 쉘의 구조 해석을 위해 곡면을 다시 근사하는 번거로움과 곡면의 재 근사에서 나타나는 기하 오차(geometric error)는 발생하지 않는다. 다음으로 본 연구에서는 효과적으로 쉘의 기하학적인 곡면 모델링과 쉘의 해석을 연동하기 위해 B-spline에 기초한 곡면 생성 프로그램을 구성하고 곡면 표현식을 이용하여 쉘의 구조 해석에 필요한 기하학적 정보를 추출한다.

한편, 쉘 곡면 형상 최적화는 실제적으로 공학 설계에서 중요한 문제이며 자동차, 항공기, 선박 등의 부품 구조 형상의 설계에 적용되고 있다. 그러나 CAD와 CAE의 현재 상용 소프트웨어간의 연계가 유기적이지 못

하고 CAD의 결과를 CAE의 입력자료로 사용하는 순차적인 연계 구조를 가지고 있어서 주로 모델링과 해석의 연동은 데이터베이스를 기저로 이루어진다. 따라서 최적설계의 문제와 같이 반복적인 기하학적 모델링과 그에 따른 해석이 필요한 경우에는 효율적이지 못하며 최적해를 도출하기에는 현실적으로 어렵다. 그러나 본 연구에서 제시하는 방법에 입각하면 효과적으로 최적 형상을 도출할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 기하학적 설계와 구조해석의 프레임 워크

그림 1은 본 연구에서 구성되는 셸 유한요소 해석 프로그램과 CAD 시스템의 연동 프레임 워크를 나타낸다. 그림에서 보는 바와 같이 기하학적 모델링은 CAD 시스템에서 사용하는 NURBS 방법을 사용한다. 그리고 셸 유한요소 해석 프로그램은 CAD 시스템과 동일한 매개변수를 사용하는 일반 좌표계에 기초한 셸 유한요소를 사용한다. 구체적인 연구 방법은 다음의 각 부분에서 살펴본다.

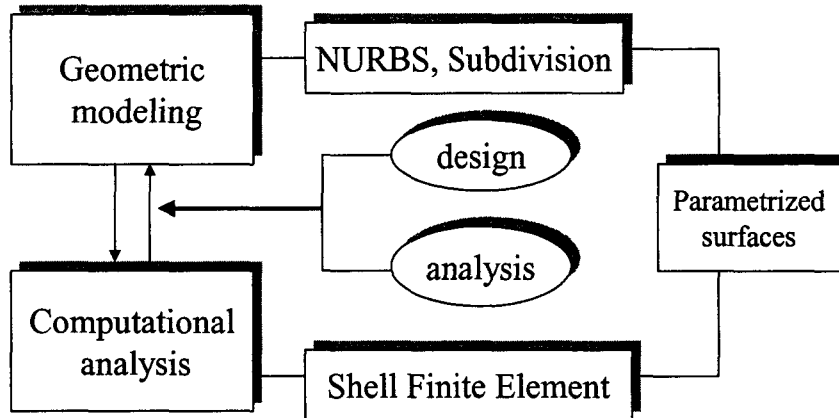


그림 1 기하학적 설계와 구조해석의 프레임 워크

2.1. 일반적인 셸 이론과 유한요소화

본 연구에서는 Koiter/Sanders⁽⁶⁾의 개념을 이용한 1차 전단변형 이론에 기초하여 유한요소화에 사용되는 변형률을 가정하였다. 일반 곡선좌표계와 텐서에 기초한 셸 이론에서는 일반적으로 변형률 텐서를 다음과 같이 나타낸다.

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g'_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$$

$$\gamma_{\alpha} = 2E_{\alpha 3} = (g'_{\alpha 3} - g_{\alpha 3}) \quad (1)$$

변형률 텐서를 변형전의 표면 텐서로 나타내기 위해서는 먼저 변형후의 물리량을 변형전의 물리량으로 표현해야한다. 그림 2는 매개변수 면과 물리적인 셸의 중앙면의 관계를 나타낸다. 셸의 중앙면은 사상함수 $\vec{\phi}$ 에 의해 사상된다. 사상된 점과 세 개의 기저 벡터는 셸 중앙면의 국지 곡면 좌표계를 구성한다. 그림 3은 본 연구에서 사용되는 변형전과 변형후의 셸의 기하학적인 형상을 나타낸다.

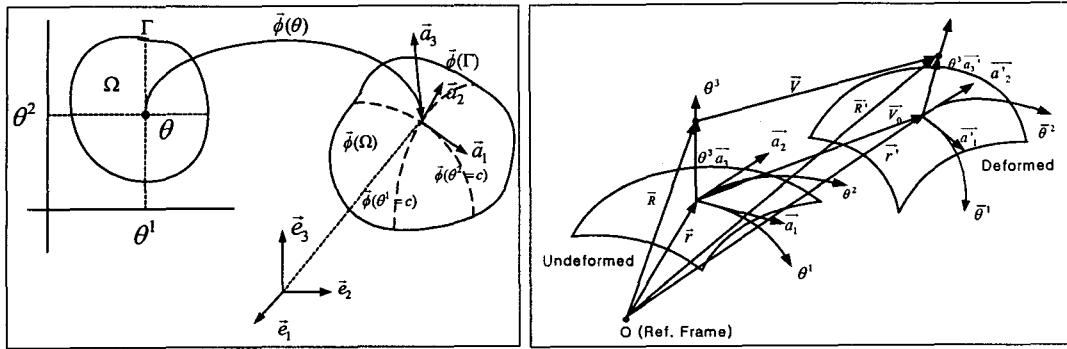


그림 2 셸 중앙면의 정의 그림 3 변형전과 변형후의 셸의 기하학적 형상

본 연구에서는 셸의 잠김 현상과 격자의 뒤틀림 문제를 효율적으로 다루기 위해 Hellinger-Reissner의 부분 혼합 변분법에 거품함수를 도입하여 셸의 변형에 관한 유한 요소 모델을 정식화하였다. 일반적으로 셸의 두께가 얇아지면 멤브레인과 전단변형 잠김 현상이 나타난다. 이러한 잠김 현상을 해결하기 위해 가정된 변형률 방법이 사용되어왔다. 본 연구에서는 계산상의 효율을 높이기 위해 Hellinger-Reissner 변분법을 전체 변형률에 적용하지 않고 잠김 현상을 일으키는 멤브레인 부분과 전단 변형 부분에 적용한다. 또한 거품 함수를 도입하여 격자 뒤틀림에 민감하지 않게끔 한다. 일반적으로 거품 함수는 요소의 경계와 절점에서는 값을 갖지 않는다. 따라서 절점의 수를 증가하지 않으면서도 향상된 성능을 얻을 수 있다. 4절점 요소에 대해서는 거품함수가 9절점 요소의 요소 중앙 절점의 형상 함수와 같다. 9절점 요소에 대해서는 가능한 거품함수가 3개 존재한다. 그중 좌표계의 불변성을 제공하는 대칭 거품함수만을 사용한다.

2.2. 기하학적 모델링

앞 절에서 개발될 셸 유한요소와 CAD에서의 기하학적 곡면 모델링의 연동을 위해서는 NURBS 곡면 형상을 구성해야한다. 본 절에서는 그 방법에 대해 간략히 설명한다. 자세한 내용은 참고 문헌에서 찾을 수 있다.^{(7),(8)}

그림4는 몇 개의 입력 자료 점들 잇는 곡선을 비 균일 B-spline 함수를 사용해서 나타낸 것이다. 그림에서 보듯이 간격 벡터는 주어지는 입력 자료 점들로부터 얻어진다.

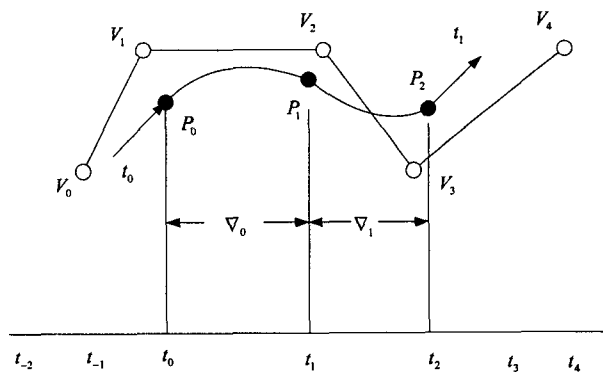


그림 4 비균일 3차 B-spline 곡선의 형상
B-spline 곡면은 B-spline 곡선의 확장된 개념으로 생각하면 쉽게 얻을 수 있다. 즉 B-spline 곡면은

B-spline 곡선의 텐서 곱으로 정의 할 수 있다. 그림 5는 곡면을 만들기 위해 사용된 쌍 3차 비 균일 B-spline 형상을 보여준다.

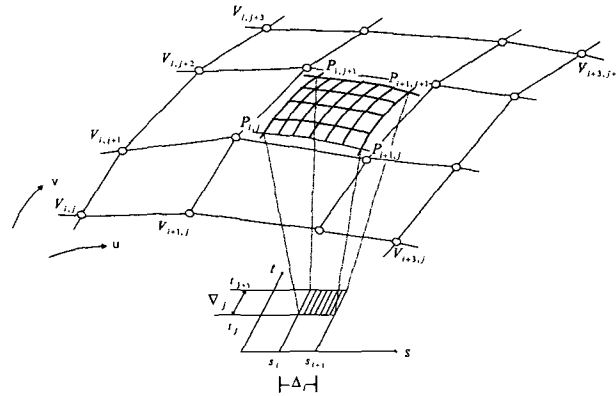


그림 5 쌍 3차 비균일 B-Spline 곡면의 기하학적 형상

앞 절에서 언급한 쉘 유한요소는 2개의 매개변수로 나타내어지며, 또한 각각의 기저 벡터의 공변 미분을 필요로한다. 따라서 이러한 요구 때문에 등매개변수를 보간해서 곡면을 나타내는 방법은 사용할 수 없다. 하지만 CAD 시스템에서 사용하는 NURBS 방법은 곡면의 모든 점에서 각 매개변수의 방향으로 수평 벡터를 구할 수 있을 뿐만 아니라 수직 벡터도 구할 수 있다. 따라서 CAD 시스템의 곡면 모델링을 이용하면 쉘 유한 요소에서 필요로 하는 곡면 위에서의 접선 벡터, 수직 벡터, 공변 미분 값들은 자동으로 정확히 알 수 있다. 결국 쉘 유한 요소와 NURBS는 2개의 매개변수를 공유하면서 코어 메모리를 공유하여 쉘 유한 요소에 필요한 정보를 자동으로 입력자료의 변환 없이 서로 전달 할 수 있다. B-spline 곡면 생성기와 연동 해석 과정의 추진 체계를 그림으로 나타내면 그림 6과 같다.

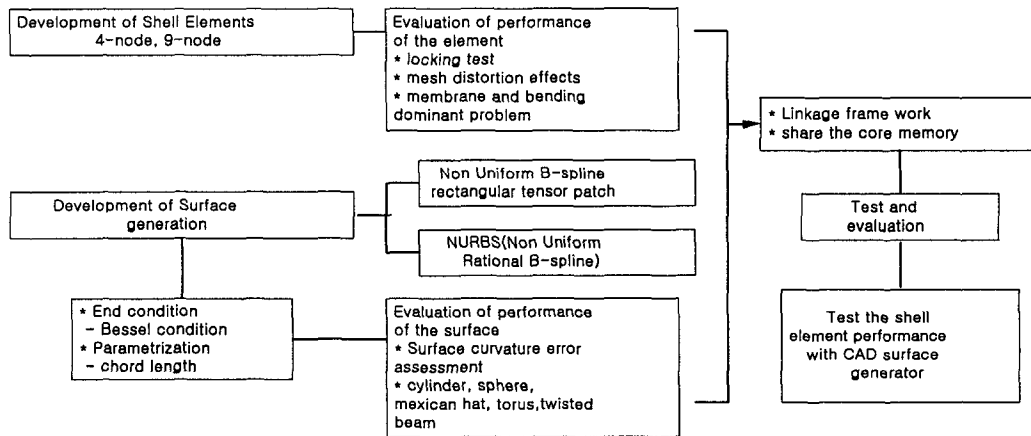


그림 6 B-spline 곡면 생성기와 구조해석 연동 체계

3. 해석 결과

개발된 셀 유한요소와 기하학적 모델 연동의 성능을 평가하는 것은 매우 중요하다. 현재까지 보고된 다양한 benchmark 문제들에 대해 성능평가가 필요하며 대표적인 아래의 문제들에 대해 성능을 시험한다.

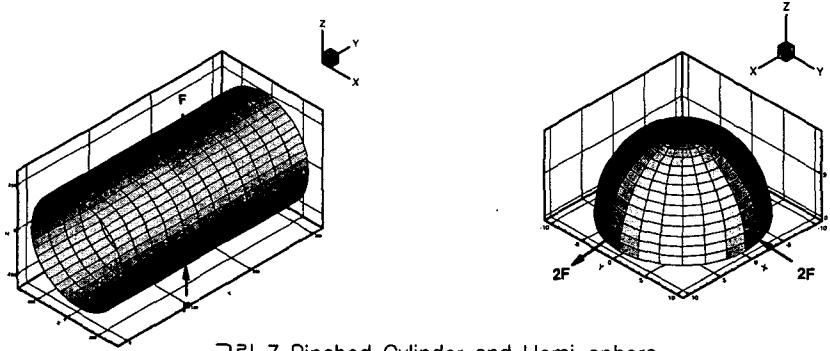


그림 7 Pinched Cylinder and Hemi-sphere

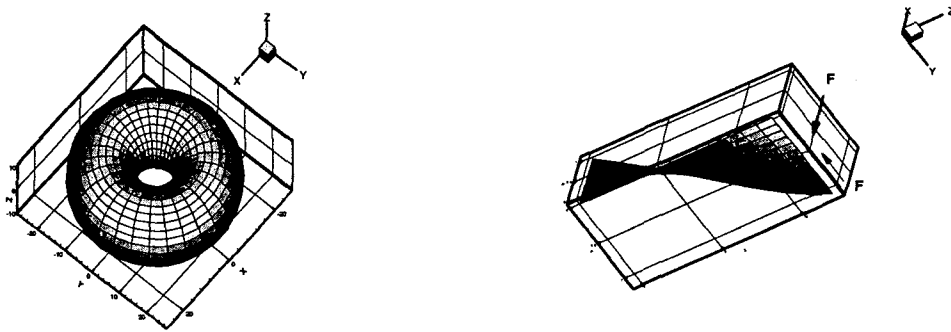


그림 8 Torus and Twisted Ribbon

이러한 모델들을 B-spline 방법을 이용하여 기하학적 모델링 하면 다음의 그림으로 나타낼 수 있다. 그림에서 별표는 기하학적 모델링에 사용되는 곡면 조정점들이다.

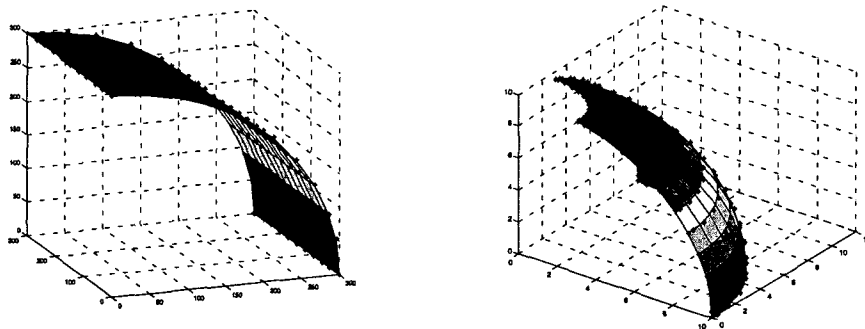


그림 9 B-spline을 이용한 곡면의 모델링

3.1. 정확한 형상을 갖는 셀의 해석 결과

원통형 셀에 집중하중이 가해지는 문제

그림 10은 원통형 셀에 집중하중이 가해지는 문제로 4 node 거품함수를 사용한 결과와 9 node 거품함수를 사용한 결과를 나타낸다. 9 node 거품함수는 메쉬 수가 작을 때에도 매우 정확한 값을 나타내는 것을 볼 수 있다. 그림 11은 6×6 요소를 갖는 일정한 요소와 뒤틀린 요소의 성능을 비교한 그림이다. 원주를 따른 모든 곳에서 거의 같은 값을 갖는 것을 알 수 있다. 따라서 본 유한요소는 메쉬의 뒤틀림에 민감하지 않음을 알 수 있다.

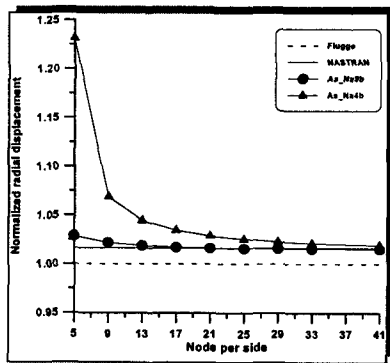


그림 10 요소 증가에 따른 해의 수렴성

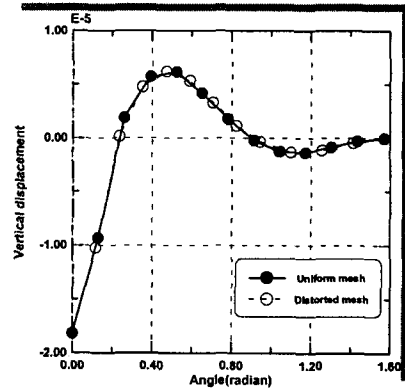


그림 11 일정한 요소와 뒤틀린 요소의 변위 비교

구형 셀에 집중하중이 가해지는 문제

그림 12와 13은 본 연구결과와 이전의 연구결과를 비교한 그림이다. 두 그림에서 볼 수 있듯이 본 연구에서 개발한 셀 요소는 기존의 셀 유한 요소에 비해 요소의 수가 작은 경우에도 그 수렴성이 뛰어나는 뿐만 아니라, 두께비가 작아질 때에도 잠김 현상에 대해 덜 민감하다는 것을 알 수 있다.

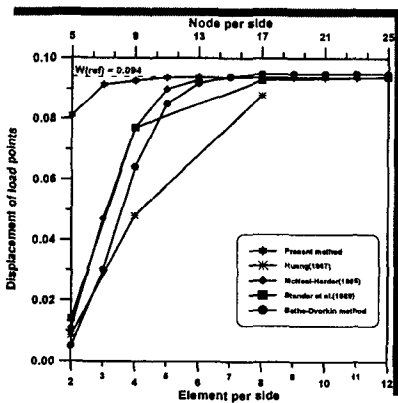


그림 12 요소 증가에 따른 해의 수렴성

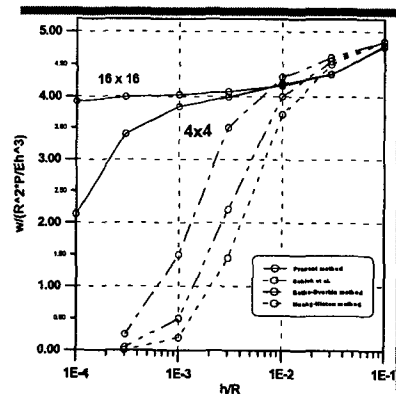


그림 13 두께 변화에 따른 변위 수렴성

4. 결 론

본 연구에서는 쉘의 기하학적 모델링과 쉘의 유한요소 해석을 연동할 수 있는 프레임워크를 소개하고 해석 결과를 제시하였다. CAE에서는 일반 곡선 좌표계에 기초한 쉘 이론으로부터 1차 전단 변형 쉘 유한요소를 개발하였다. 개발된 쉘 유한요소는 2개의 매개변수로 일반 곡면을 표시하기 때문에 CAD에서 주어지는 곡면 표현식과 동일하여 직접 연동이 가능하여 곡면을 묘사하기 위해 동일한 표현식을 CAD와 CAE(Computer-Aided Engineering)에서 사용하게 된다. 그러므로 쉘의 구조 해석을 위해 곡면을 다시 근사하는 번거로움과 곡면의 재 근사에서 나타나는 기하 오차(geometric error)는 발생하지 않는다. 다음으로 곡면 모델링에 B-spline에 기초한 곡면 생성 프로그램을 구성하였고 곡면 표현식을 이용하여 쉘의 구조 해석에 필요한 기하학적 정보를 추출하였다. 본 연구에서 제시하는 쉘 해석 기법과 곡면 모델링의 연동법은 곡면 구조물의 통합 설계에 매우 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 판단되며 형상 설계에 관한 연구가 현재 진행 중이다.

참고 문헌

1. Ahmad,S.,Iron,B., and Zienkiewicz,O., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements," *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, Vol.2, 1970, pp.419-451
2. Simo,J.C.and Fox,D.D., "On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parameterization," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.72, 1989, pp.267-304
3. Simo,J.C.and Fox,D.D.,and Rifai,S., "On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II: The Linear Theory ; Computational Aspects," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.73, 1989, pp.53-92
4. Cirak,F.,Ortiz,M.,and Schroder,P., "Subdivision surfaces : a new paradigm for thin-shell finite-element analysis," *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol 47, 2000, pp.2039-2072
5. Cirak,F.,Ortiz,M., "Fully C¹-conforming subdivision elements for finite deformation thin-shell analysis," *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol 51, 2001, pp.813-833
6. Buidiansky.B, Sanders,J.L. Jr. "On the best First-Order Linear Shell Theory", *Prog. Appl. Mech* Vol 20, 1963, pp.129-140
7. Farin,G. *Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide*. New York: Academic Press, 1993.
8. DeBoor,C. "On calculating with B-Splines," *Journal of Approximation Theory*, Vol.6, No.1, 1972, pp.50-62