

강성계수의 전달을 이용한 골조구조물의 정적해석 Static Analysis of Frame Structures Using Transfer of Stiffness Coefficient

문 덕 홍* 최 명 수** 정 하 용***
Moon, Deok-Hong Choi, Myung-Soo Jung, Ha-Yong

ABSTRACT

In static analysis of a variety of structures, the matrix method of structural analysis is the most widely used and powerful analysis method. However, this method has drawback requiring high-performance computers with many memory units and fast processing units in the case of analyzing complex and large structures accurately. Therefore, it's very difficult to analyze these structures accurately in personal computers. For overcoming the drawback of the matrix method of structural analysis, authors suggest transfer stiffness coefficient method(TSCM). The TSCM is very suitable to a personal computer because the concept of the TSCM is based on the transfer of the stiffness coefficient for an analytical structure.

In this paper, the static analysis algorithm for frame structures is formulated by the TSCM. We confirm the validity of the proposed method through the compare of computation results by the TSCM and the NASTRAN.

1. 서 론

최근 산업의 발달과 더불어 구조물의 형태는 점점 복잡하고 거대해지고 있고, 이들 구조물에 대한 정적 및 동적해석은 구조물의 설계시에 중요한 역할을 차지한다. 단순한 형상과 재질을 갖는 구조물을 해석하는 경우에는 정확한 해석해를 비교적 쉽게 구할 수 있지만, 복잡한 기하학적 형상과 재료 성질을 갖는 구조물인 경우에는 해석해를 구하기가 일반적으로 어려우므로, 매트릭스 구조해석법(matrix method of structural analysis)과 같은 수치해석기법을 이용하여 구조물을 해석하는 것이 대부분이다.^{(1),(2)}

매트릭스 구조해석법은 1940년대부터 개발되기 시작하여, 현재 컴퓨터의 발달 및 대중화와 더불어 구조해석분야에서 폭 넓게 이용되고 있다. 그러나 이 방법은 구조물을 해석할 경우에는 일반적으로 근사화된 수치해를 제공하므로, 복잡하고 거대한 구조물을 대상으로 계산 정밀도가 높은 수치해를 구하기 위해서는 일반적으로 모델링시에 해석대상 구조물에 대한 요소의 분할수를 크게 증가시켜야 한다. 그 결과 대형 연립방정식을 풀어야 원하는 해를 얻을 수 있고, 이 과정에서 큰 기억용량과 빠른 계산처리 능력을 갖춘 컴퓨터가 요구된다. 따라서 퍼스널 컴퓨터 상에서 매트릭스 구조해석법을 이용하여 복잡하고 거대한 구조물을 정확히 해석하기에는 곤란할 경우가 많다.

이러한 매트릭스 구조해석법의 취약점을 극복하기 위한 일환으로 전달행렬법(transfer matrix method)^{(3),(4)},

* 정회원 · 부경대학교 기계공학부 교수
** 정회원 · 부경대학교 기계공학부 전임강사
*** 부경대학교 기계공학부 조교

부분구조해석(substructure analysis)⁽⁵⁾ 등이 제안된 바 있다. 전달행렬법은 매트릭스 구조해석법에 비해 상대적으로 적은 기억용량으로도 복잡한 구조물을 해석할 수 있으므로, 비교적 낮은 성능의 퍼스널 컴퓨터에 적합한 해석기법이다. 그러나 전달행렬법은 구조물이 힌지(hinge)로 연결되어있는 경우 그리고 구조물의 중간에 강지지(剛支持)로 변위 일부가 구속되는 경우에는 본래의 전달행렬법과는 전혀 다른 복잡한 알고리즘을 사용하지 않으면 해석을 수행할 수 없는 단점이 있다. 퍼스널 컴퓨터 상에서 복잡한 구조물의 진동해석을 안정적으로 수행하기 위하여 저자들은 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)을 개발하여 그 유효성을 제안한 바 있다.^{(6)~(9)}

본 연구에서는 다양한 골조구조물의 정적해석을 전달강성계수법으로 수행하기 위한 해석 알고리즘을 정식화한다. 그리고 문형 구조물(portal structure)을 대상으로 수치계산을 수행한 후, 범용 유한요소해석 프로그램인 NASTRAN⁽¹⁰⁾의 계산 결과와의 비교를 통하여 제안된 방법의 신뢰성 및 유용성을 확인한다.

2. 강성계수의 전달을 이용한 골조구조물의 정적해석

2.1 모델링

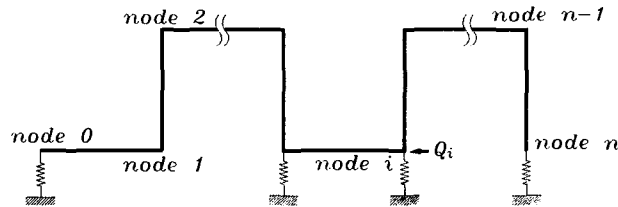


Fig.1 Analytical model

다수의 부재(member)와 기초지지 스프링 그리고 굴곡부(crooked part)로 구성되는 다양한 골조형 구조물의 정적해석 알고리즘을 정식화하기 위하여 Fig.1과 같은 평면 골조형 구조물을 해석모델로 채택하였다.

본 연구에서 절점(node)이란 구조물의 좌단과 우단, 부재의 분할점 그리고 좌표변환이 요구되는 굴곡부를 뜻하며, 구조물의 좌단에서 우단으로 각 절점을 절점 0, 절점 1, ..., 절점 n이라고 한다. 구조물 좌우의 경계 조건은 절점 0과 절점 n의 기초지지 스프링으로 고려한다. 평면 골조구조물을 해석대상으로 채택할 경우, 각 절점의 변위벡터 (\mathbf{d})는 종변위 x , 횡변위 y 그리고 각변위 θ 로 구성되고, 힘벡터 (\mathbf{f})는 축력 F_x , 전단력 F_y , 그리고 모멘트 M 으로 구성된다.

2.2 절점강성계수행렬과 힘보정벡터의 정의

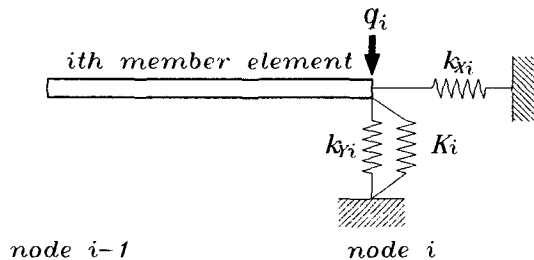


Fig.2 Subsystem

Fig.1과 같은 해석모델은 Fig.2와 Fig.3에 나타난 부분계와 굴곡부의 연속으로 볼 수 있고, i 번째 부분계는 일정단면을 갖는 직선 부재요소와 기초지지 스프링요소로 구성된다. 기초지지 스프링요소는 기초(base)와 부재요소 사이의 병진 스프링과 회전 스프링으로 구성된다.

전달과정을 쉽게 설명하기 위하여, 절점을 해석적으로 절점의 좌측과 우측으로 나누어 생각한다. 즉, i 번째 부재요소의 우측을 절점 i 의 좌측이라 하고, $i+1$ 번째 부재요소의 좌측을 절점 i 의 우측이라 한다. 절점 i 좌우측의 힘벡터와 변위벡터 사이의 관계를 절점강성계수행렬 S 및 힘보정벡터 e 를 이용하여 다음식과 같이 정의한다.

$$\bar{f}_i^i = \bar{S}_i \bar{d}_i^i + \bar{e}_i^i \quad (1)$$

$$f_i^i = S_i d_i^i + e_i^i \quad (2)$$

$$f_i^{i+1} = S_i^{i+1} d_i^{i+1} + e_i^{i+1} \quad (3)$$

본 연구에서 하첨자 i 는 i 번째 절점 또는 i 번째 부재에 관한 물리량을 뜻하고, 상첨자 i 는 상태량을 정의할 때 사용된 좌표계가 i 번째 부재요소의 국부좌표계(local coordinate system)와 동일함을 나타낸다. 그리고 기호 f , d , S , e 위에 $-$ 가 붙은 것은 절점 좌측에 관한 물리량을 나타내고, 동일 기호 위에 $-$ 가 없는 것은 절점 우측에 관한 물리량을 나타낸다.

2.3 좌표변환

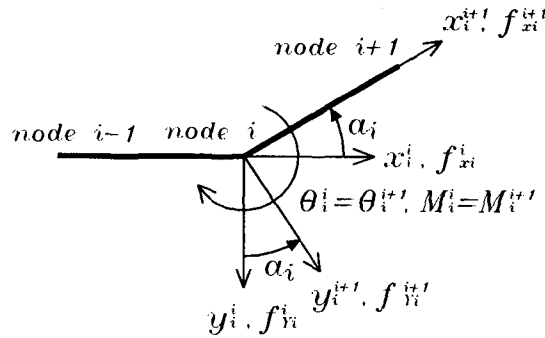


Fig.3 Positive direction of state variables for member elements.

국부좌표계 i 와 $i+1$ 로 나타낸 절점 i 의 힘벡터와 변위벡터의 정방향은 Fig.3과 같다. $i+1$ 번째 부재요소가 i 번째 부재요소로부터 반시계방향으로 α_i 만큼 기울어져 있다면, 변위벡터와 힘벡터의 좌표변환식은 다음과 같다.

$$d_i^{i+1} = R(\alpha_i) d_i^i \quad f_i^{i+1} = R(\alpha_i) f_i^i \quad (4)$$

여기서 $R(\alpha_i)$ 는

$$\mathbf{R}(a_i) = \begin{bmatrix} \cos(a_i) & -\sin(a_i) & 0 \\ \sin(a_i) & \cos(a_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

이고, 좌표변환행렬 $\mathbf{R}(a_i)$ 은 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$\mathbf{R}(-a_i) = \mathbf{R}(a_i)^T = \mathbf{R}(a_i)^{-1} \quad (6)$$

여기서 상첨자 T는 행렬의 전치(transpose)를 뜻하고, -1은 역행렬을 나타낸다.

2.4 절점강성계수행렬과 힘보정벡터의 전달식

절점 i-1의 우측과 절점 i의 좌측의 변위벡터 $\mathbf{d} = \{x, y, \theta\}^T$ 와 힘벡터 $\mathbf{f} = \{F_x, F_y, M_z\}^T$ 사이의 관계식은 식(7)과 같이 나타낼 수 있고,

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_i \\ \mathbf{f}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_i \\ \mathbf{d}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

식(7)에서 부재요소가 일정단면을 갖는 경우, 3×3의 필드강성행렬 \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_i , \mathbf{D}_i 는 다음과 같다.

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{2EI}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

여기서 l 은 부재요소의 길이, A 는 단면적, I 는 단면2차모멘트, E 는 종탄성계수이다.

절점 i-1 우측의 절점강성계수행렬 \mathbf{S}_{i-1}^i 과 힘보정벡터 \mathbf{e}_{i-1}^i 를 이미 알고 있다면, 절점 i 좌측의 절점강성계수행렬 $\bar{\mathbf{S}}_i^i$, 힘보정벡터 $\bar{\mathbf{e}}_i^i$ 를 식(1), (7) 그리고 식(3)의 i대신에 i-1을 대입한 식으로부터, 식(9)와 같이 구할 수 있다. 즉, 식(9)는 i번째 부분계에서 절점 i-1 우측과 절점 i 좌측사이의 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 필드(field) 전달식이 된다.

$$\bar{\mathbf{S}}_i^i = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i, \quad \bar{\mathbf{e}}_i^i = -\mathbf{B}_i \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{e}_{i-1}^i \quad (9)$$

여기서 \mathbf{V}_i 와 \mathbf{H}_i 는 다음과 같다.

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{C}_i, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{S}_{i-1}^i - \mathbf{D}_i \quad (10)$$

i 번째 부분계에서, 절점 i 에 외력 \mathbf{q}_i^i 가 작용할 경우, 절점 i 에서 힘의 평형식은 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_i^i = \bar{\mathbf{f}}_i^i + \mathbf{P}_i^i \mathbf{d}_i^i - \mathbf{q}_i^i \quad (11)$$

여기서 대각행렬인 포인트 강성행렬 \mathbf{P}_i^i 와 외력벡터 \mathbf{q}_i^i 는

$$\mathbf{P}_i^i = \text{diag} [k_x, k_y, K]_i^i, \quad \mathbf{q}_i^i = \{Q_x, Q_y, Q_\theta\}_i^i \quad (12)$$

이고, k_x 와 k_y 는 각각 X 축 방향과 Y 축 방향의 병진스프링의 스프링상수이고, K 는 회전스프링의 스프링상수이다. Q_x 와 Q_y 는 X 축 방향과 Y 축방향의 외력, 그리고 Q_θ 는 외력 모멘트이다.

식(1), (2), (11) 그리고 절점에서 변위벡터의 연속조건 ($\mathbf{d}_i^i = \bar{\mathbf{d}}_i^i$)으로부터, 절점 i 우측의 절점강성계수행렬 \mathbf{S}_i^i 와 힘보정벡터 \mathbf{e}_i^i 는 식(13)과 같이 구할 수 있다. 즉, 식(13)은 절점 i 좌측과 절점 i 우측사이의 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 포인트(point) 전달식이 된다.

$$\mathbf{S}_i^i = \bar{\mathbf{S}}_i^i + \mathbf{P}_i^i, \quad \mathbf{e}_i^i = \bar{\mathbf{e}}_i^i - \mathbf{q}_i^i \quad (13)$$

따라서 식(9)와 (13)으로부터 i 번째 부분계에서, 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 필드-포인트 전달식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i^i = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{P}_i^i, \quad \mathbf{e}_i^i = -\mathbf{B}_i \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{e}_{i-1}^i - \mathbf{q}_i^i \quad (14)$$

절점 i 에 굴곡부가 있다면, 계속적인 전달과정을 수행하기 위하여 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터를 해당 국부좌표계로 좌표변환해야 한다. 이는 식(2), (3), (4) 그리고 식(6)으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i^{i+1} = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{S}_i^i \mathbf{R}(\alpha_i)^T, \quad \mathbf{e}_i^{i+1} = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{e}_i^i \quad (15)$$

첫 번째 부분계에 대하여 필드-포인트 전달식인 식(14)를 적용하기 위해서는 절점 0의 \mathbf{S}_0^0 , \mathbf{e}_0^0 를 미리 알고 있어야 한다. 모델링에서 구조물의 좌단의 경계조건을 절점 0의 기초지지 스프링으로 고려하였으므로, 절점 0 좌측의 힘벡터 \mathbf{f}_0^0 를 영벡터로 간주한다. 따라서 절점 0에서의 힘의 평형식과 식(3)에 $i=0$ 을 대입한 식으로부터 절점 0의 절점강성계수행렬 \mathbf{S}_0^0 와 힘보정벡터 \mathbf{e}_0^0 를 식(16)과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_0^0 = \mathbf{P}_0^0, \quad \mathbf{e}_0^0 = -\mathbf{q}_0^0 \quad (16)$$

따라서 식(16)을 시작으로 식(14)와 식(15)를 해석대상 골조구조물에 연속적으로 적용하면, 각 절점의 절점 강성계수행렬 및 힘보정벡터를 구할 수 있고, 최종적으로 구조물 우단(끝단)의 절점강성계수행렬 S_n^n 과 힘보정벡터 e_n^n 을 구할 수 있다.

2.5 변위벡터의 계산

모델링에서 구조물 우단의 경계조건을 절점 n 의 기초지지 스프링으로 고려하였으므로, 절점 n 의 우측은 해석적으로 경계조건이 자유($f_n^n = 0$)인 것으로 간주 할 수 있다. 따라서 $f_n^n = 0$ 와 식(2)에 $i=n$ 을 대입한 식으로부터 우단의 변위벡터 d_n^n 을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$d_n^n = - (S_n^n)^{-1} e_n^n \quad (17)$$

식(7)과 (10) 그리고 식(3)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$d_{i-1}^i = - V_i \bar{d}_i^i - H_i^{-1} e_{i-1}^i \quad (18)$$

따라서 식(17)을 시작으로 변위벡터의 연속조건($d_i^i = \bar{d}_i^i$)과 식(18) 그리고 좌표변환식인 식(4)로부터, 모든 절점의 변위벡터를 우단에서 좌단으로 순차적으로 계산할 수 있다. 절점 좌우의 힘벡터는 절점의 변위벡터를 먼저 계산한 후, 식(1), (2), (4)로부터 구할 수 있다.

2.6 다양한 연결부에 대한 모델링 및 전달식



Fig.4 Equivalent springs of connection part

탄성 스프링과 힌지 등 다양한 연결부를 갖는 골조구조물의 정적해석을 수행하기 위하여, 각 연결부별로 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식을 유도한다.

인접한 두 부재요소가 탄성 스프링으로 연결된 경우, 또는 복잡한 연결부를 등가화하여 Fig.4와 같은 등가 스프링으로 모델링할 경우가 있다. Fig.4와 같은 등가 포인트요소 i 의 좌측(절점 i 의 좌측)과 우측(절점 i 의 우측)의 힘의 평형식은

$$f_i^i = \bar{f}_i^i = \hat{P}_i^i (d_i^i - \bar{d}_i^i) \quad (19)$$

가 되고, 여기서 등가 포인트 강성행렬 \hat{P}_i^i 는 식(12)와 같이 X 축과 Y 축 방향의 병진 스프링 및 회전 스프링의 스프링상수($\hat{k}_{x_i}, \hat{k}_{y_i}, \hat{K}_i$)로 구성되는 대각행렬이 된다.

등가 포인트요소 i 의 좌측에서 우측으로의 전달식은 식(1), (2) 그리고 식(19)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i^i = \{ (\bar{\mathbf{S}}_i)^{-1} + (\hat{\mathbf{P}}_i)^{-1} \}^{-1}, \quad \mathbf{e}_i^i = \{ (\bar{\mathbf{S}}_i)^{-1} + (\hat{\mathbf{P}}_i)^{-1} \}^{-1} (\bar{\mathbf{S}}_i)^{-1} \bar{\mathbf{e}}_i^i \quad (20)$$

힌지와 같이 연결부의 변위벡터 중 일부가 불연속인 경우에도 연결조건에 상당하는 등가 포인트 강성행렬 $\hat{\mathbf{P}}_i^i$ 를 만든 후, 식(20)을 그대로 사용하면 된다. 예를 들면, 부재요소 i 와 부재요소 $i+1$ 의 연결부에서 변위벡터가 X, Y 축 방향으로 연속이고 Z 축의 회전방향으로는 불연속인 경우, $\hat{\mathbf{P}}_i^i$ 는 병진 스프링상수 $\hat{k}_{xi}, \hat{k}_{yi}$ 에 ∞ 에 가까운 아주 큰 값을, 회전 스프링상수 \hat{K}_i 에 0에 가까운 아주 작은 값을 대입한다. 중간연결부가 힌지인 경우 회전스프링상수의 값에 0을 대입하지 않은 이유는 0을 대입하면 식(20)에서 행렬 $\hat{\mathbf{P}}_i^i$ 의 역행렬을 계산할 수 없기 때문이다.

3. 수치계산 결과 및 검토

2장에서 정식화한 방법으로 평면 골조구조물에 대한 정적해석 프로그램을 만든 후, 문형 구조물을 대상으로 수치계산을 수행하였다. 그리고 제안된 방법의 신뢰성 및 유용성을 확인하기 위하여 범용 유한요소해석 소프트웨어인 NASTRAN의 계산 결과와 비교하였다.

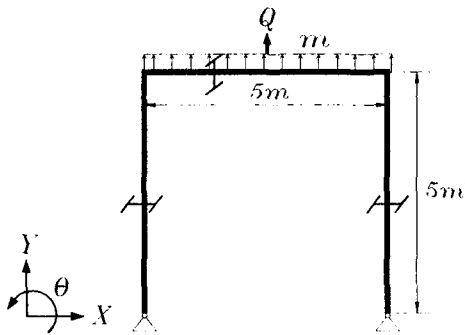


Fig.5 Computation model I

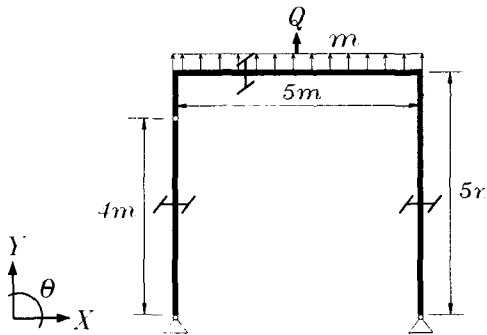


Fig.6 Computation model II

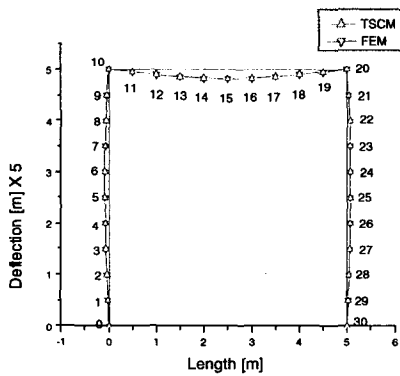


Fig.7 Deflection of model I

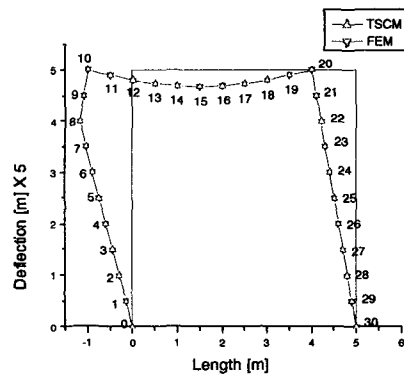


Fig.8 Deflection of model II

Fig.5의 계산모델 I은 일반적인 문형 구조물이고, 부재의 길이가 각각 5m이고, 종탄성계수 2.06×10^{11} N/m²이며, 단면2차모멘트는 2.56208×10^6 m⁴, 분포하중 $m = -1000$ N/m, 집중하중 $Q = -10000$ N이다. 시작단과 끝단의 경계조건은 모두 단순지지이다. 구조물을 30개의 부재요소로 분할하였고, 전달강성계수법에서는 분포하중을 등가절점력⁽¹¹⁾으로 변환하여 계산하였다. Fig. 7은 전달강성계수법(TSCM)과 NASTRAN으로 계산모델 I에 대한 처짐을 계산한 결과이다. 전달강성계수법과 NASTRAN의 계산 결과가 잘 일치함을 알 수 있었다.

Fig. 6의 계산모델 II는 계산모델 I의 첫 번째 부재가 두 개의 부재로 분할되고, 두 부재는 힌지로 연결되어 있는 문형구조물이다. 계산모델 I과 동일한 경계조건과 하중조건에 대하여 전달강성계수법과 NASTRAN으로 정적해석을 수행하였고, 그 결과 계산모델 II의 처짐은 Fig.8과 같았다. 전달강성계수법과 NASTRAN의 계산 결과가 잘 일치하였다.

4. 결 론

골조구조물의 정적해석 알고리즘을 강성계수의 전달에 기본개념을 두고 있는 전달강성계수법으로 정식화하였다. 문형구조물 같은 골조구조물을 대상으로 전달강성계수법과 상용 구조해석 소프트웨어인 NASTRAN으로 정적해석을 수행하였고, 그 계산 결과가 잘 일치함을 확인하였다. 따라서 전달강성계수법이 기존의 매트릭스 구조해석법보다 상대적으로 적은 계산 메모리를 사용하면서도 신뢰성있는 계산 결과를 구해줄 수 있음을 알 수 있었다. 그리고 골조구조물에 힌지와 같은 연결부가 존재하는 경우에도 전달강성계수법은 연결부를 간단히 스프링으로 모델링하여 처리할 수 있으므로 기존의 전달행렬법보다 편리하게 정적해석을 수행할 수 있었다. 따라서 퍼스널 컴퓨터상에서 구조물의 정적해석을 수행할 경우 전달강성계수법이 효과적인 해석 기법임을 제안한다.

참고 문헌

1. Harold C. Martin, *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966
2. Robert E. Sennett, *Matrix Analysis of Structures*, Prentice Hall, New Jersey, 1994
3. 成岡昌夫, 遠田良善, 伝達マトリックス法, 日本剛構造協會, 1970
4. 中井 博, 傳達マトリックス法による鋼橋の解析, 森北出版, 1992
5. J. S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968, pp.231~263
6. D. H. Moon and M. S. Choi, "Vibration Analysis for Frame Structures Using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.234, No.5, 2000, pp.725~736
7. 문덕홍, 최명수, "강성계수의 전달을 이용한 다양한 연결부를 갖는 구조물의 진동해석", 대한기계학회 논문집 A권, 제23권, 제2호, 1999, pp.344~356
8. 문덕홍, 최명수, "전달강성계수법에 의한 격자형 구조물의 강제진동 해석", 한국소음진동공학회지, 제8권, 제5호, 1998, pp.945~956
9. 문덕홍, 최명수, 강화중, "전달강성계수법에 의한 격자형 구조물의 자유진동 해석", 한국소음진동공학회지, 제8권, 제2호, 1998, pp.361~368
10. *MSC/NASTRAN for Windows User's Guide*, MacNeal-Schwendler Corporation, USA, 1997
11. Daryl L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method (2nd edition)*, PWS Publishing Company, USA, 1993, pp.624~626