

최적 측정위치 선택 방법들의 비교 연구

Comparison of Methods for Optimal Sensor Locations

강태우*
Kang, Taewoo

권순정†
Kwon, Soonjung

신수봉‡
Shin, Soobong

ABSTRACT

In a structural inverse problem with a limitation to the number of measuring degrees of freedom, the selection of optimal sensor locations (OSL) is critical for a good result. The current research proposes and a new OSL method and compares it with a widely used OSL method. The proposed method utilizes the sensitivity of eigenvectors with respect to the structural parameters. A simulation study for a tower structure is carried out. The structural parameters are estimated by a SI method. The influences of OSL on SI results are investigated.

1. 서 론

토목구조물의 동적 진동 시스템에서 최적센서위치문제(OSL: Optimal Sensor Location)는 최소한의 측정센서 및 데이터 채널을 사용하여 최소한의 데이터처리를 통하여 오차를 포함한 측정 데이터로부터 보다 정확한 구조물 변수를 획득하는 문제이며, 나아가 효과적으로 구조물의 특성을 결정하여 우수한 구조물을 사용하여 그 구조물의 향후 관리를 보다 효과적으로 수행하는데 주안점을 두고 있다.

최적 센서위치 결정에 대한 연구는 미국 NASA의 Langley Research Center⁽¹⁾⁽²⁾, 워싱턴대학교⁽³⁾, 위스콘신대학교⁽⁴⁾⁽⁵⁾, 영국의 Aston대학교⁽⁶⁾ 등에서 활발히 연구를 수행하고 있으며, 그 적용 분야는 상대적으로 구조물의 중량에 따라 비용이 커지는 항공우주공학에서 중량을 줄이기 위한 방법으로 각종 센서의 위치를 제한하기 위해 활발히 연구되고 있으며⁽²⁾, 최근 들어서는 특히 구조물의 유지보수에 대한 관심이 커지면서 토목분야에서도 활발한 연구가 필요해지고 있다.

* 동아대학교 토목공학과 석사과정

† 동아대학교 토목공학과 박사과정

‡ 정회원, 동아대학교 토목공학과 조교수

1978년 Shah와 Udwadia에 의해 시스템 변수의 유한차원에서의 노이즈와 한정된 샘플에서의 시스템 시간응답의 관찰 사이의 선형 관계에 대한 연구로부터 시작하여, 1985년 Rodriguez 이후 최적선택과정의 이론적 배경에 실마리가 되는 사실들이 규명되었다. 1994년 Udwadia는 그의 논문에서 Fisher Information Matrix(FIM)의 특성치가 최대가 될 때, 최소의 분산을 가지므로 가장 적절한 센서 위치를 식별할 수 있다고 밝혔다.⁽⁷⁾ Kammer는 우주구조물과 궤도상의 모드식별과의 상관관계에서 센서부착위치를 결정하는데 관심을 가지고 연구했다. 그의 논문에서 센서부착위치를 결정하는데 있어, 유효독립(effective independence) 방법을 통해서 목적인 모드를 포함하는 독립정보(independent information)가 상당한 기여를 하지 않는 위치를 제거해 나가는 과정을 반복해서 센서부착 위치를 선정하였다.⁽⁴⁾ Penny는 최적센서위치를 결정하는 방법으로 Guyan Reduction 방법과 FIM 기법을 근거로 하여 연구한 결과, Guyan Reduction Method와 유효독립분포(EIDV : Effective Independence Distribution Vector)를 병행하는 것이 좋은 결과를 가져온다고 밝히고 있다.⁽⁶⁾

본 논문에서는 EIDV의 방법과 모드 민감도를 이용한 방법에 의해 최적의 측정위치로 선택된 지점에서의 데이터와 이의 추세분석에 의해 확장된 데이터로 역해석을 수행했다. 역해석을 위한 수치예제에서는 tower구조물에 대한 측정오차를 고려한 시뮬레이션 데이터를 사용했다. 수치예제를 통하여 EIDV방법과 제안된 방법을 비교·검토하였으며, 제안된 방법의 효율성을 검증하였다.

2. 주파수 영역(Frequency Domain)에서의 최적 측정위치 선택 방법

2.1. 유효독립분포에 의한 방법 (EIDV: Effective Independence Distribution Vector)

이 방법은 Kammer가 기초로 하고 Penny에 의해 제안된 방법으로, 가능한 많은 정보와 가능한 선형독립인 모드형상을 만드는 측정위치를 선택한다. 즉 정형화된 동적특성치(normalized eigenvector)의 조합으로 된 행렬을 이용해서, 각 모드에서 최소의 영향을 가지는 지점을 하나씩 제거한다. 각 모드마다 다른 형상을 가지므로, 이런 점을 고려해서 최소의 영향을 가지는 지점을 찾아야 하는데 Penny는 다음의 순서에 의한 방법을 제안했다.

측정 불가능한 좌표를 제거하는 유효독립과정을 통해 이를 Fisher Information Matrix(FIM) A 로 표시하면,

$$A = \phi_c^T \phi_c \quad (1)$$

여기서, ϕ_c = 측정 불가능한 자유도를 제거한 상태의 모드형상(eigenvector) 행렬이다.

결정적으로 제거될 최소 동적 영향 지점을 찾는 것은 식(2)에서 정의되는 행렬 E 에 의한다.

$$E = \phi_c A^{-1} \phi_c^T \quad (2)$$

E 행렬의 대각선 요소(diagonal element)를 유효독립분포벡터 e_i 로 표시하고, 이 e_i 중 최소값을 가지는 점을 제거한다. 이후 다시 이 과정을 반복하면, 남겨지는 지점들이 최적의 측정지점이 되는 것으로 정의한다.

2.2. 시스템 변수에 대한 모드 형상의 민감도에 의한 방법 (MSIV: Modal Sensitivity Information Vector)

이 방법은 시스템 변수의 변화가 모드형상에 미치는 변화량을 이용하는 방법이다. 이 민감도를 고려 대상 모드에 대해 각각 구해서 이를 그 요소로 하는 행렬의 유효독립과정을 거치면 EIDV 방법에서의 마찬가지로 유효독립분포 \mathbf{e}_d 가 생성된다. 이 벡터 \mathbf{e}_d 의 값 중에서 최소인 요소를 제거하고 EIDV에서의 같은 방법으로 계속 수행하면 남겨지는 지점이 최적의 측정위치가 되는 것으로 정의한다. EIDV방법에서는 단지 모드형상만을 이용한 유효독립의 과정을 수행하지만, MSIV는 시스템 변수에 대한 모드 형상의 민감도를 이용한 방법이므로 실질적으로 보다 합당한 방법이라 볼 수 있다.

고유값(eigenvalue)이 중근이 되는 경우를 고려하지 않는다면 모드 민감도를 구하는 방정식은 다음 식(3)과 같으며, 고유값의 중근을 고려할 경우에는 소개된 방법들에 의해 동적특성치(eigenvector & eigenvalue)의 민감도를 구할 수 있다.⁽⁸⁾

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M} & -\mathbf{M}\phi_m \\ -\phi_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \phi_m \\ 0.5 \phi_m^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \phi_m \end{Bmatrix} \quad (3)$$

계수행렬의 차수는 $(N+1) \times (N+1)$, m = 모드번호, j = 시스템변수 번호, N = 총 자유도의 개수이다. 식(3)에서 다음 항들을 식(4)와 같이 정의하면 변수에 대한 동적특성치의 민감도는 식(5)와 같이 표현할 수 있게 된다.

$$\mathbf{G}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M} & -\mathbf{M}\phi_m \\ -\phi_m^T & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_K = \begin{Bmatrix} - \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \phi_m \\ 0.5 \phi_m^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \phi_m \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_j} \end{Bmatrix}^T = \mathbf{G}_K^{-1} \mathbf{p}_K \quad (5)$$

여기서, $\frac{\partial \phi_m}{\partial p_j}$ 만을 이용해서 최적측정위치를 결정하는데 이용하며, 이를 EIDV방법에 적용하면 다음 식(6), 식(7)의 과정과 같이 전개된다.

$$\Phi_m = \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial p_1}, \frac{\partial \phi_m}{\partial p_2}, \frac{\partial \phi_m}{\partial p_3}, \dots, \frac{\partial \phi_m}{\partial p_{np}} \right]^T_{(N \times np)} \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_m = \Phi_m (\Phi_m^T \Phi_m)^{-1} \Phi_m^T, \quad (\mathbf{e}_d)_m = \text{diag}(\mathbf{E}_m), \quad \mathbf{e}_{\text{sum}} = \sum_{m=1}^{nm} (\mathbf{e}_d)_m \quad (7)$$

여기서, nm = 전체 고유치의 개수, np = 전체 시스템 변수의 개수, 벡터 \mathbf{e}_{sum} = 모든 시스템 변수에 대한 고유모드의 민감도를 각 자유도에 대한 값으로 표시한 것이다. 해당 자유도에 대한 벡터 \mathbf{e}_d 항의 값이 클수록 최적측정위치가 되는 것이다.

3. 역해석 알고리즘

비감쇠 선형 동적 시스템의 지배방정식은 다음 식(8)과 같다.

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \omega_j^2 \mathbf{M} \phi_j \quad (8)$$

여기서, $\mathbf{K}(N_d \times N_d)$, $\mathbf{M}(N_d \times N_d)$ = 강성도행렬과 질량행렬, N_d = 총 자유도의 수, j = 모드번호이다.

만약 제한된 자유도에서만 동적 변위의 측정이 가능하다면, 동적 변위 벡터 ϕ_j 는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\phi_j = \begin{Bmatrix} \phi_{mj}^T \\ \phi_{uj}^T \end{Bmatrix}^T \quad (9)$$

여기서, $\phi_{mj}(N_m \times 1)$, $\phi_{uj}(N_u \times 1)$ = 각각 측정된 자유도와 측정되지 않은 자유도이고, N_m = 측정자유도의 수, N_u = 비측정 자유도의 수이다. ($N_d = N_m + N_u$)

측정된 자유도는 또한 다음 식(10)으로 표현할 수 있다.

$$\phi_{mj} = \mathbf{B} \phi_j = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{K}}_j^{-1}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{f}}_j = \omega_j^2 \mathbf{B} \tilde{\mathbf{K}}_j^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{M}_m \phi_{mj} \quad (10)$$

여기서, $\mathbf{B}(N_m \times N_d)$ = 0과 1로 구성된 선택행렬이며, 유사강도행렬(pseudo-stiffness matrix) $\tilde{\mathbf{K}}_j(\mathbf{x})$ 와 유사힘벡터(pseudo-force vector) $\tilde{\mathbf{f}}_j$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{\mathbf{K}}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}) - \omega_j^2 \begin{bmatrix} \mathbf{O}_m & \mathbf{M}_u \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_j = \omega_j^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{O}_u \end{bmatrix} \Psi_j = \omega_j^2 \mathbf{M}_m \phi_{mj} \quad (11)$$

여기서, $\mathbf{M}_m(N_d \times N_m)$, $\mathbf{M}_u(N_d \times N_u)$, $\mathbf{O}_m(N_d \times N_m)$, $\mathbf{O}_u(N_d \times N_u)$ = 측정 자유도와 비측정 자유도에서의 질량 행렬 (mass matrix)와 영행렬(zero matrix)이다.

위의 식들을 이용하여 역해석의 문제를 다음과 같이 최적화 문제로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_p}} J(\mathbf{x}) = J_o(\mathbf{x}) + J_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{nmm} \|\mathbf{e}_j(\mathbf{x})\|^2 + \frac{\beta}{2} \|\Delta \mathbf{K}(\mathbf{x})\|_F^2 \\ & \text{subject to } \mathbf{x}_{lo} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{up} \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)에서 $\mathbf{e}_j(\mathbf{x})(N_m \times N_d) = [\omega_j^2 \mathbf{B} \tilde{\mathbf{K}}_j^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{M}_m - \mathbf{I}_m] \phi_{mj}$, $\|\Delta \mathbf{K}(\mathbf{x})\|_F^2 = \|\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x}_o)\|_F^2$, nmm = 측정된 모드의 수, $\mathbf{x}_{up}(N_p \times 1)$, $\mathbf{x}_{lo}(N_p \times 1)$ = \mathbf{x} 의 상한값과 하한값, $\mathbf{I}_m = (N_m \times N_m)$ 크기의 단위행렬이다.

4. 수치 해석 예

4.1 모델링

해석에 사용되는 모델은 그림 1에서 보는 바와 같이 다(多)단면 1차원 tower 구조물이다. 총 10개의 보 부재로 나누어 해석했고, 각 부재의 단면값은 각각의 최대단면적과 최소단면적의 산술평균값을 사용하였다. 축방향 변형은 무시했으며, 탄성계수는 30000이다.

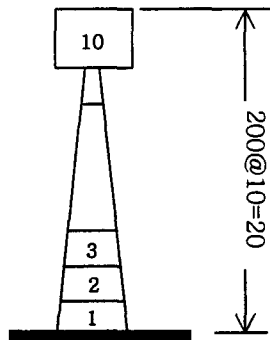


그림 1. 해석모델

표 1. 재료 특성

부재번호	평균단면적	부재길이	휨강도($\times 10^4$)
10	400	200	4000
9	100	200	25000
8	150	200	56250
7	200	200	10000
6	250	200	15625
5	300	200	22500
4	350	200	30625
3	400	200	40000
2	450	200	50625
1	500	200	62500

4.2 최적 측정위치 선택

두 번째 모드까지를 측정대상으로 하므로, 측정위치 선택에서도 이와 동일하게 두 번째 모드까지를 고려했다. 그림 2에서 최적 측정위치로 4개의 자유도(EIDV \rightarrow 7, 8, 10, 11; MSIV \rightarrow 7, 9, 10, 11)가 각각 선택되었다.

역해석은 선택된 자유도에서 측정된 값을 직접 이용하는 방법과 선택된 자유도에서의 추세분석에 의한 데이터확장으로 획득된 값을 이용하는 두 가지의 방법으로 실행되었으며, 각 OS�방법에 의해 선택된 자유도에서의 데이터를 추세분석으로 확장한 진동형상의 비교는 그림 3과 같다.

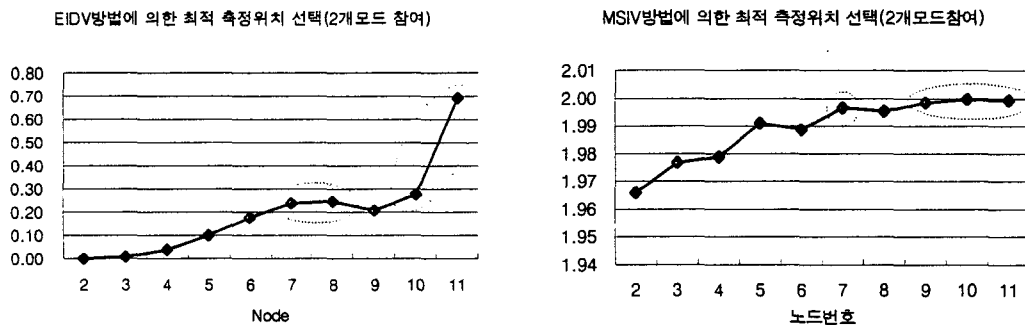


그림 2. 최적 측정위치의 선택

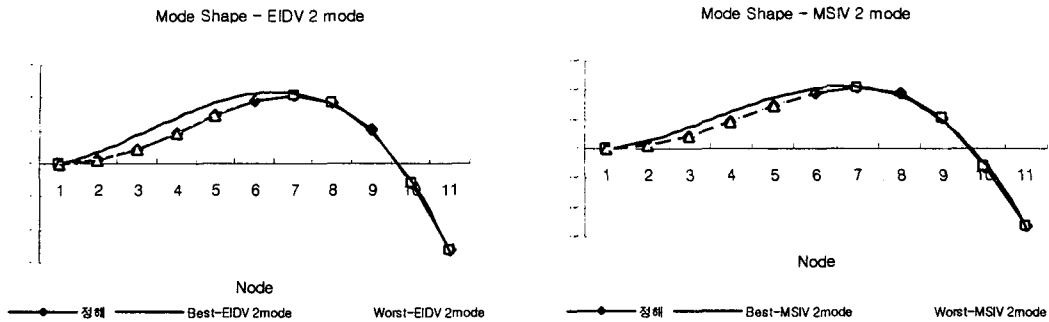


그림 3. 각 OSL 방법에 의한 데이터 확장

추세분석에 의한 데이터 확장의 정확도를 확인하기 위해 MAC(Modal Assurance Criteria)를 계산하여 표 2에 정리하였다. 이 MAC 값은 “1”에 근접할수록 모드형상이 서로 가깝다는 것을 의미하며, OSL에 의해 선택된 자유도의 데이터를 확장한 경우가 훨씬 MAC값이 1에 접근하고 있음을 확인할 수 있다. 특히, 그림 3에서 보듯이 2번째 모드의 확장은 OSL 방법에 의해 선택된 자유도를 사용하는 것이 필요하다는 것을 알 수 있다. 사용한 MAC의 정의는 식(13)과 같다.

$$MAC = \frac{\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2} \quad (13)$$

표 2. 추세 분석에 의한 데이터 확장의 정확성(MAC)

방법	EIDV(best)	EIDV(worst)	MSIV(best)	MSIV(worst)
1 st Mode	9.9971547e-01	9.9931023e-01	9.9765904e-01	9.9934880e-01
2 nd Mode	9.7740604e-01	2.2812659e-01	9.8826321e-01	3.2583381e-01

4.3 선택된 자유도에 의한 역해석

OSL 방법에 의한 측정자유도의 선택이 역해석의 정확성에 미치는 영향을 확인하기 위하여, 전체 10개의 시스템 변수를 1번부터 5번까지(Group 1)와 6번부터 10번까지(Group 2)의 부채를 각각의 변수 그룹으로 지정했다. 시뮬레이션 횟수는 30회이며, 오차는 최대 진폭의 20%를 절대오차로 사용했다. 또한 선택된 자유도의 평가를 위해 최악으로 선택된 4개의 자유도(EIDV 2~5번, MSIV 2,3,4,6번 자유도)를 고려했다.

우선 선택된 자유도에서의 값을 이용한 방법으로 역해석을 실행하였으며, 시스템 변수의 초기치를 정해의 10~80% 사이에서 다양하게 변화시키며 역해석 결과를 그림 4에서 비교하였다. 그림 4에서 각 축의 좌표는 추정된 변수값을 각 변수의 정해 값으로 나눈 것을 표시한 것이다.

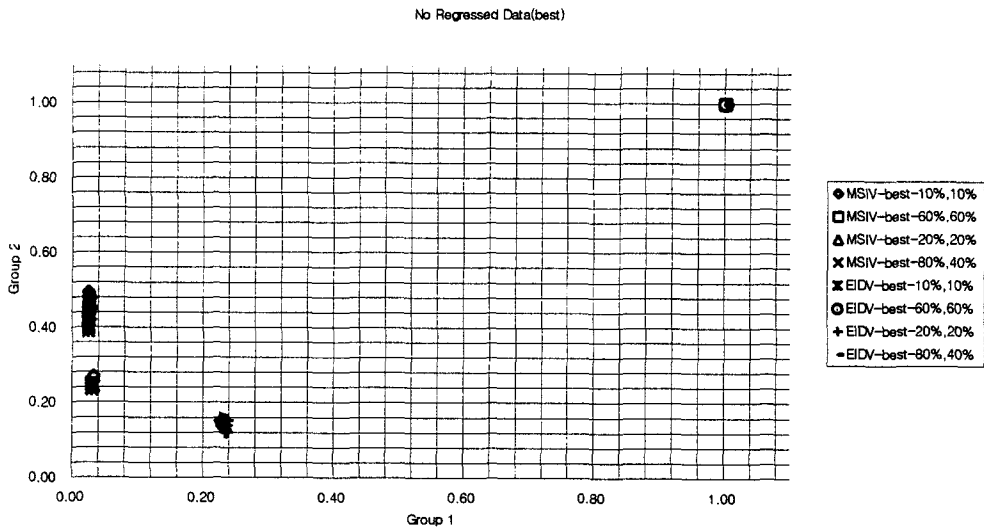


그림 4. 초기치 변화에 따른 선택된 자유도에서의 역해석 결과 비교

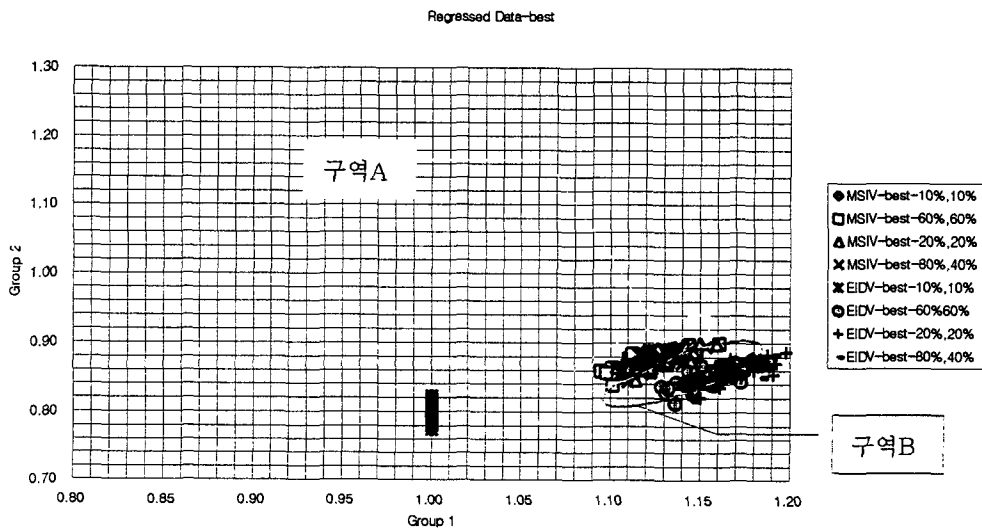


그림 5. 초기치의 변화에 따른 확장데이터를 이용한 역해석의 결과

그림 4는 최적으로 선택된 측정위치에서도 초기치가 정해에서 떨어져 있는 경우에는 추정치가 정해에서 멀어지는 경우가 있다는 것을 보여준다. 초기치를 정해의 20%로 입력한 경우에는 EIDV의 경우만 정해를 찾지 못하고 MSIV는 정확한 해를 도출했다.

다음으로 추세분석에 의한 데이터 확장으로 획득한 데이터를 이용해서 역해석을 수행하였으며, 그 결과를 그림 5에 정리하였다. 초기치의 선택은 그림 4와 동일한 조건으로 설정하여 역해석을 수행하였다. 그 결과 확장데이터를 이용한 경우에 대부분 초기 입력값이 변하더라도 MSIV와 EIDV 모두 최적의 선택위치에는 정해(1,1)에 가까운 결과를 보임을 알 수 있다. 또한, MSIV 결과 (A구역)가 EIDV에 의한 결과 (B구역) 보다 정해에 더 가까이 근접함을 식별할 수 있다. 즉, MSIV가 EIDV보다 신뢰성 있는 결과를 도출함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 EIDV와 MSIV 두 방법에 의해 최적의 측정위치를 결정하고, 이를 이용해 직접 역해석을 하는 경우와, 데이터확장을 해서 역해석을 하는 두 경우를 고려하여 그 결과를 비교하였다. 직접 역해석을 하는 경우는 결과가 초기치에 크게 영향을 받았으나 초기치가 정해에 어느 정도 접근한 후에는 최종 결과가 정해에 접근하여 구해졌다. 반면에 확장데이터를 사용한 경우에는 초기치의 영향은 비교적 적었으나 확장한 데이터 자체에 내포된 진동형상의 오차로 인하여 최종 결과가 정해에서 일관되게 떨어져 있음을 확인할 수 있었다. 그러나, 역해석 과정에 상관없이 OSL 방법들에 의해 좋지 못한 측정위치로 결정된 자유도의 측정자료를 사용하는 경우에는 전혀 만족스럽지 못한 역해석 결과가 얻어졌다.

본 연구에서 제안한 구조변수에 대한 *eigenvector*의 민감도를 이용한 MSIV방법은 실행한 수치예제의 결과를 통하여 기존에 널리 사용되고 있는 EDIV방법 보다 오차에 대한 분산도 적었으며 결과도 평균적으로 정해에 보다 접근하고 있음을 확인할 수 있었다. 또한, EDIV방법보다 초기치에 대한 영향이 보다 적었다.

참고문헌

1. K.B. Lim, "Method for Optimal Actuator and Sensor Placement for Large Flexible Structures", AIAA, 15, 49~57, 1992
2. Jer-Nan Juang, "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction", Journal of Guidance, Control and Dynamics, 8(5), 620~627, 1984
3. Emerson Tongco, "Optimal Sensor Placement for Large Flexible Space Structures", Journal of Guidance, Control and Dynamics, 19(4), 961~963, 1991
4. Daniel C. Kammer, "Sensor Placement for On-Orbit Modal Identification and Correlation of Large Space Structures", Journal of Guidance, Control and Dynamics, 14(2), 251~259, 1991
5. Wendy L. Poston, "Maximizing the Determinant of the Information Matrix with the Effective Independence Method", Journal of Guidance, Control and Dynamics, 15(6), P1513~1515, 1992
6. J.E.T. Penny, "Automatic Choice of Measurement Locations for Dynamic Testing", AIAA, 32(2), 407~414, 1994
7. Firdaus E. Udwadia, "Methodology for Optimum Sensor Locations For Parameter Identification In Dynamic Systemes", Journal of Engineering Mechanics, 120(2), 368~390, 1994
8. 조흥기, "감쇠 시스템의 고유진동수와 모드의 개선된 민감도 기법", 대한토목학회논문집, 20(6-A), 997~1004, 2000