

기저함수 감소기법을 이용한 프리스트레스트 콘크리트 박스거더교의 최적설계 알고리즘

Optimum Design Algorithms for PSC Box-Girder Bridges Using a Reduced Basis Technique

조효남* 민대홍** 김환기***
Cho, Hyo-Nam Min, Dae-Hong Kim, Hoan-Kee

ABSTRACT

An optimization algorithm for the optimum design of prestressed concrete (PSC) box girder bridges is proposed in this paper. In order to optimize the tendon profile efficiently, a reduced basis technique is introduced. The optimization algorithm which includes the tendon profile, tendon size and concrete dimensions optimization problem of the PSC box girder bridges is verified on the Genetic algorithm (GA) from the numerical examples. it may be positively stated that the optimum design of the PSC box girder bridges based on the new approach proposed in this study will lead to more rational and economical design compared with the currently available designs.

핵심용어 : 기저함수 감소기법, 유전자 알고리즘, 프리스트레스트 박스거더
KEYWORD : A Reduced Basis Technique, Genetic Algorithm, PSC Box Girders

1. 서 론

실제 PSC 박스거더교량의 경우 텐던의 형상은 상당히 복잡하고 까다로우며, 실제 설계에서 기본적인 개념만 제시하고 있을 뿐 구체적인 최적형상에 관한 어떤 특별한 식도 없을뿐만 아니라 일부 식은 시공성을 고려할 수가 없는 이론적인 식에 불과하여 상당부분 경험이 많은 설계자의 직관에 의해 배치를 하게 된다. 일반적으로 PSC 교량을 최적화하기 위해선 텐던의 형상과 콘크리트 단면을 설계변수로 정하여 최적화를 수행하여야 하지만, 텐던의 형상을 최적화하기 위해선 텐던이 지나가는 형상을 표현하기 위한 무수히 많은 설계변수가 소요된다. 또한 이에 따른 구조해석의 수가 기하급수적으로 증가하기 때문에 실용적이지 못하여 이론적인 연구의 한계를 넘지 못하고 있다. 기존의 PSC 교량의 최적설계에 관한 연구를 보면, Gahtani(1993)¹⁾는 서로 다른 단면을 갖는 PSC 교량에 대한 연구를 하였고, Utrilla(1997)²⁾는 PSC 슬래브 교량에 대한 연구를, 그리고 Kirsch(1997)³⁾는 PSC 교량에 적합한 다단계 최적설계 알고리즘을 제안하였는데, 이러한 연구들은 단면 최적화에만 국한되었거나, PSC 교량의 구조거동에 가장 큰 영향을 끼치는 텐던형상을 현실적으로 고려하지 못한 알고리즘들로 이러한 최적설계 알고리즘의 대부분은 설계실무자에 의해 PSC 교량의 구조거동을 미리 계산하여 텐던을 일일이 직접 배치하거나, 이론적으로만 가능한 형태로 배치하여 최적설계를 하는 등, 실

* 정회원 · 한양대학교 토목 · 환경공학과 교수

** 학생회원 · 한양대학교 토목 · 환경공학과 박사수료

*** 한양대학교 토목 · 환경공학과 석사과정

문제를 최적설계하기엔 적합하지 못한 이론적인 연구에 불과하였다. 따라서 본 연구에서는 기저함수 감소기법을 이용하여 보다 합리적이고 경제적인 최적설계를 수행할 수 있는 알고리즘을 제안하였으며, 이론적인 식과 일반 설계실무에서 사용하는 방법들로 이루어진 각 기저함수에 대한 최적설계 결과와 기저함수 감소기법을 이용한 최적설계 결과와의 비교를 통해 이를 검증하였다. 또한, 본 연구에서 제안한 최적화문제는 텐던의 형상을 포함한 최적화 문제로, 전역최적화문제(Global optimization problem)에 주로 쓰이는 유전자 알고리즘(GA : Genetic Algorithm)을 이용하여 정식화하였다. 본 연구에서 제안한 최적설계 알고리즘을 검증하기 위한 수치예제로 수치적인 노력을 줄이기 위해 가상의 3경간 연속 PSC 박스거더교를 선정하여 최적설계를 수행하였으며, 이러한 최적설계 알고리즘에 대한 연구 결과로부터 본 연구에서 제안한 PSC 박스거더교의 텐던형상과 텐던량 그리고 PSC 박스거더단면에 대한 최적설계알고리즘의 효율성과 합리성 그리고 경제성을 확인할 수 있었다.

2. 최적설계 문제의 정식화

2.1 설계변수

본 연구에서는 기저함수 감소기법을 이용한 PSC 박스거더교량의 효율적이고 합리적인 최적화 문제를 위해 PSC 박스거더교량의 높이(X_1), 각 단면에 대한 상부플랜지, 웹 그리고 하부플랜지 두께($X_i, i=2,3,\dots,10$)와 텐던량(X_{11}) 그리고 각 기저함수에 대한 가중치($W_i : i$ -th weight factor, $i=1,2,\dots,5$)를 그림 1~3 과 같이 설계변수로 두어 최적설계를 수행하였는데, 본 논문에서는 텐던형상을 기저함수로 사용하였으며 여기에 쓰인 각 기저함수는 이론적인 방법을 이용한 형상, 마찰손실을 줄이기 위해 완화곡선을 2차 함수로 가정한 텐던형상, 변곡점 부근에서 곡률의 변화를 최소화하기 위해 3차 함수로 가정한 텐던형상, 기존문헌[1]에 의한 방법으로 변곡점의 위치를 고려한 3차 함수로 이루어진 형상 그리고 변곡점의 좌표에 변화를 주기 위해 형성한 함수로 일반적으로 이론적인 방법과 실무에서 사용하는 방법으로 결정된 텐던형상들로 구성하였으며 그림 2와 같이 나타내었다. 이는 각각의 경계조건에 따라 그림 3과 같이 2·3차 곡선의 형태들로 구성되어진다

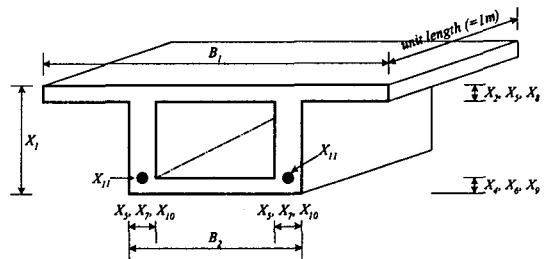


그림 1 콘크리트박스거더 횡단면

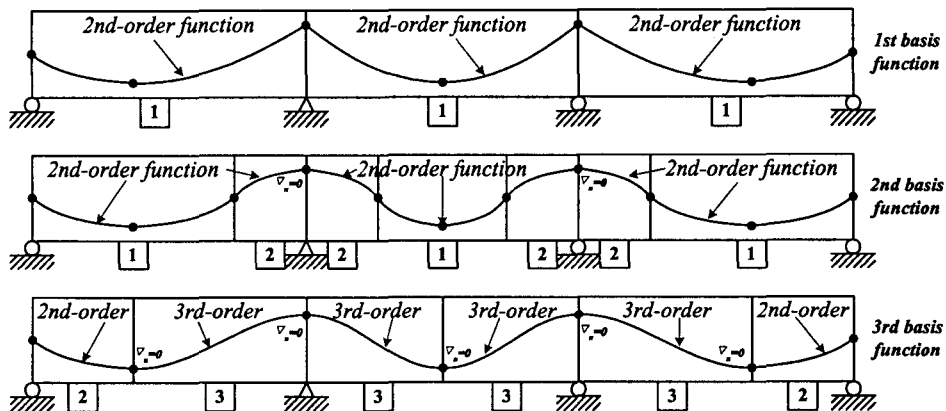


그림 2 기저함수(계속)

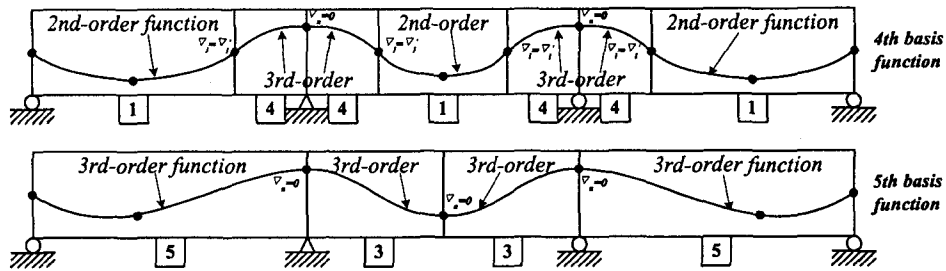


그림 2 기저함수

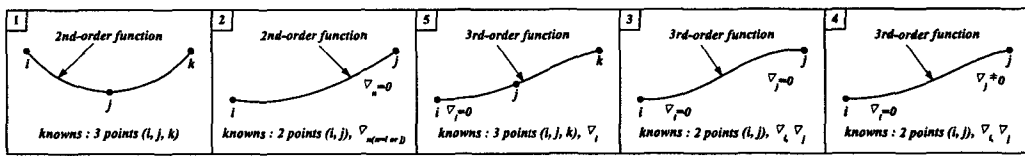


그림 3 경계조건에 따른 함수

2.2 목적함수

본 최적설계 문제에서의 목적함수는 PSC 박스거더의 제작비용함수로 선정하였으며, 특히 텐던의 제작비용은 텐던과 정착부 그리고 그 외의 제작비용을 포함한 비용으로 다음 식 1과 같이 정식화하였다.

$$F(X) = \sum_{i=1}^3 C_c^i V_c^i L_c^i + C_{ps} W_{ps} \quad (1)$$

여기서, i =콘크리트박스거더의 변단면 개수; V_c^i = i -th 단면의 콘크리트의 부피(m^3); W_{ps} =사용한 텐던의 총중량(ton); L_c^i = 각단면의 지간장(m); C_c^i = i -th 단면의 콘크리트의 단위 부피당 비용(75,000원/ m^3); C_{ps} =텐던의 단위 중량당 비용(1,870,000원/ton)

2.3 제약조건

기저함수 감소기법을 이용한 PSC 박스거더교의 최적설계 문제에서의 제약조건은 도로교 설계기준(건설교통부,2000)⁴⁾과 도로설계 실무편람(도로공사,1996)⁵⁾을 참조하여 다음 표 1과 같이 정식화하였다.

표 1 제약조건

설계	제약 조건	기호설명
최대 압축응력	$G_1 = f_c / f_{ca} - 1 \leq 0$	f_c = 압축응력, f_{ca} = 허용 압축응력
최대 인장응력	$G_2 = f_t / f_{ta} - 1 \leq 0$	f_t = 인장응력, f_{ta} = 허용 인장응력
단면 최소두께	$G_3 = t_i / t_{im} - 1 \leq 0$	t_i = 사용 단면 치수, t_{im} = 최소 단면 치수

3. 최적화 기법

3.1 기저함수 감소기법

본 연구에서 텐던형상을 최적화하기 위해 사용된 기저함수 감소기법(reduced basis technique)은 기존의 경험과 지식을 바탕으로 이루어진 설계자료를 활용하여 적은 수의 설계변수 즉 각각의 기저함수에 대한 가중치를 최적화 하여 보다 개선된 설계 결과를 얻는 방법이다. 이러한 설계결과들은 그 설계조건에 대해 상당히 합리적이고 타당한 값들로서 최적값에 근접한 근접 최적해(near optimum)라고 할 수 있다.

Y^1, Y^2, \dots, Y^B 는 설계값들을 저장하고 있는 벡터로써 각 요소는 상당히 많은 설계변수를 저장하고 있다. 이러한 벡터들은 식 2와 같이 선형조합으로 표현이 가능하고, 이에 대한 가장 적합한 조합 벡터들을 구함으로써 최적값을 구하게 된다.

$$Y = Y^c + \sum_{i=1}^B X_i Y^i \quad (2)$$

여기서, B = 기저함수의 개수; Y^c = 일반적으로 더해지는 상수 벡터; X_i = 가중치 벡터(weight factor vector), $X_i = [a_i, \dots, a_B]^T$; Y^i = i-th 기저함수 벡터

기저함수 감소기법은 Y^i 의 설계변수가 X_i 의 설계변수의 개수 보다 많을 경우 상당히 효과적이고 효율적인 방법으로써, 기저함수인 Y^i 가 근접최적해로 이루어져 있을 경우 이 방법을 사용하면, 그 조합벡터인 Y 의 설계값은 진정한 최적값(true optimum)을 갖게 된다.⁶⁾

3.2 유전자 알고리즘(GA : Genetic Algorithm)

GA는 자연도태와 생태계의 유전법칙인 적자생존의 법칙에 기본원리를 둔 확률적인 탐색 알고리즘이다. 일반적으로 GA는 그림 4에서 나타낸 바와 같이 복제(reproduction), 교배(crossover), 그리고 돌연변이(mutation)라는 일련의 과정을 통해 개체를 번식해 간다. 주변환경에 잘 적응한 개체는 그렇지 못한 개체보다 더 많은 자손을 남기게 된다. 세대가 지남에 따라 많은 수의 우성인자가 해공간에 존재하게 된다. 결국, 우성개체가 주변환경을 지배하게 되며 우성형질은 유전되어 진화하게 된다.⁷⁾

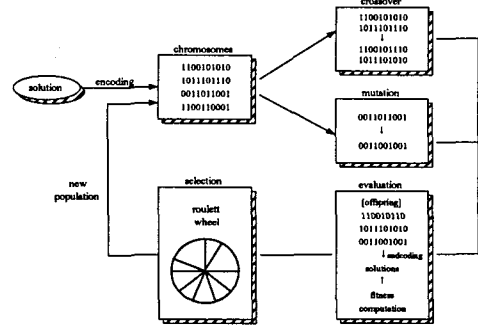


그림 4 유전자 알고리즘의 개념도

GA에서는 설계 제약조건을 모두 만족하면서 목적함수를 최소로 하는 개체를 판별하고 선택하기 위해서 적합도함수를

이용한다. 따라서, 적합도함수는 식 3과 같으며 식 4에 나타낸 바와 같이 $F(X)$ 는 목적함수와 벌칙함수로 구성된다. GA는 적합도함수의 최대화가 알고리즘의 기본개념이므로 목적함수를 최소화하고 제약조건을 모두 만족하기 위해서는 식 3과 같이 정식화하였으며, 벌칙함수는 식 5에 나타낸바와 같이 제약조건함수가 위배될 경우 적합도함수를 감소시키므로 적합도함수가 최대가 되기 위해서는 모든 제약조건이 만족된 상태에서 목적함수가 최소가 되도록 유도한다.

$$F(X)'' = \frac{c}{F(X)} \quad (3)$$

$$F(X)' = F(X) + penalty \quad (4)$$

$$penalty = \begin{cases} 0 & \text{if } X \text{ is feasible} \\ \sum_{i=1}^m r g_i^2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

여기서, m = 제약조건 수; r = 벌칙함수의 계수; g_i = i-th 제약조건; $F(X)$ =식 1에서 나타낸 목적함수

4. 최적설계 알고리즘

본 연구에서는 PSC 박스거더교의 텐던형상과 텐던량 그리고 각 단면에 대한 단면치수를 고려한 최적설계를 보다 효율적이고 합리적으로 수행하는 기저함수 감소기법을 이용한 최적설계 알고리즘을 그림 5와 같이 제안하였다. 여기에 사용된 최적화 방법으로는 전역최적화 기법인(Global optimization method) 유전자 알고리즘(GA)를 사용하여 정식화하였으며, 이때 사용한 선별방법으로는 토너먼트 선별방법을 사용하였으며, 최적해로의 수렴성이 좋은 일양교차(uniform crossover)방법을 사용하였다. 또한, 최적설계시 요구되는 유전자 알고리즘 파라미터들은 표 2에 나타낸 바와 같다.

표 2 유전자 알고리즘 파라미터

Item	Parameters
generation	2000
population	10
crossover probability	0.50
mutation probability	0.02
coefficient of penalty function	$r = 10000$

본 연구에 사용된 GA 프로그램은 쉘어웨어프로그램 (Carrol, 1998)을 사용하였으며, PSC 박스거더교의 구조해석을 위해 사용되는 구조해석프로그램으로는 등가하중법(Equivalent Method)을 이용한 유한요소 구조해석(FEM) 프로그램을 개발하여 사용하였다.

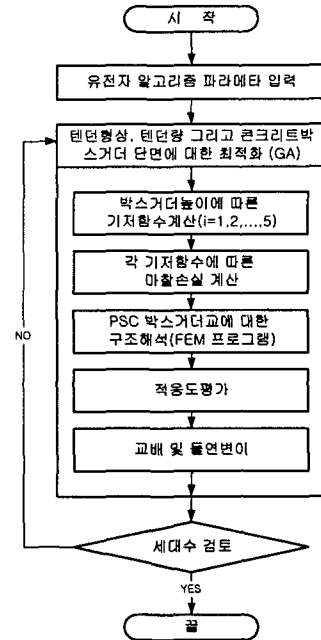


그림 5 GA를 이용한 최적설계 알고리즘

5. 적용에 및 고찰

5.1 대상구조물

본 연구에서는 수치적인 노력을 줄이기 위해 다음 그림 6과 같은 가상의 3경간 연속 PSC 박스거더 (3@30=90m)의 예제를 선정하였으며, 대상구조물의 일반사항은 표 3에 나타내었다. 또한 그림 7에 나타낸 바와 같은 시공전, 시공후 측경간·중앙경간 정모멘트 최대 그리고 부모멘트가 최대일 경우의 모든 하중케이스를 포함하는 경우에 대해 각 기저함수들을 이용한 최적설계결과와 기저함수 감소기법을 이용한 최적설계 결과들을 비교하였다.

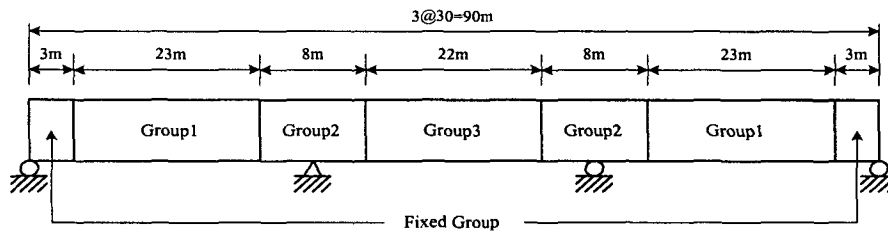


그림 6 대상구조물의 종단면도

표 3 대상구조물의 제원

분 류	제 원	분 류	제 원
지간장	3 @ 30 = 90m	폭	8 m
사용재료	$f_{ck} = 400 \text{ kgf/cm}^2$	하중	DL 하중 ($W_1 = 20t, P_1 = 50t$)
PS 강재의 종류	KSD7002, $f_{py} = 16000(\text{kgf/cm}^2)$	마찰 계수	$\mu = 0.25 (/rad), k = 0.0049 (/m)$

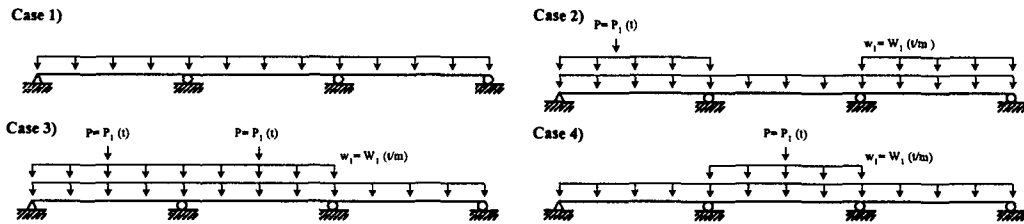


그림 7 하중상태(load condition)

5.2 결과 및 분석

본 논문에서 제안한 최적설계 알고리즘을 검증하기 위한 수치해석결과는 표 4에 다음과 같이 나타내었다. 우선 각 단면그룹에 따른 PSC 박스거더교량의 최적설계단면을 보면, 그룹 1에서는 웨브의 두께가 설계하한

표 4 최적설계결과

구분		하중조건						
		기저함수1	기저함수2	기저함수3	기저함수4	기저함수5	조합함수	
최적설계 결과	가중치	1	1	-	-	-	-	0.151
		2	-	1	-	-	-	0.100
		3	-	-	1	-	-	0.378
		4	-	-	-	1	-	0.021
		5	-	-	-	-	1	0.348
	높이(m)		4.69	4.60	5.58	5.89	5.09	5.16
	그룹1	상부플랜지두께(m)	0.42	0.42	0.36	0.34	0.42	0.41
		웨브두께(m)	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
		하부플랜지두께(m)	0.37	0.40	0.23	0.20	0.22	0.22
	그룹2	상부플랜지두께(m)	0.43	0.43	0.26	0.32	0.28	0.26
		웨브두께(m)	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
		하부플랜지두께(m)	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
	그룹3	상부플랜지두께(m)	0.20	0.21	0.21	0.21	0.22	0.23
		웨브두께(m)	0.34	0.30	0.36	0.32	0.30	0.32
		하부플랜지두께(m)	0.20	0.20	0.20	0.21	0.26	0.20
텐던량(cm)		3.422e-1	2.845	4.888e-2	5.084e-1	2.268	1.671	
목적함수(만원)		4031.58	4054.66	3848.50	3896.36	3874.54	3816.55	

치인 0.3m로 수렴하는 반면, 상부플랜지와 하부플랜지의 두께는 각 기저함수에 따라 변함을 알 수 있었다. 또한 단면그룹 2에서는 웨브와 하부플랜지 두께가 설계 하한치인 0.3m와 0.2m로 수렴함을 알 수 있었다. 하지만 단면그룹 3에서는 각각의 텐던형상에 따라 단면치수가 약간의 차이를 보이면서 수렴함을 알 수 있었다. 이러한 결과들은 PSC 박스거더교량의 텐던 형상이 콘크리트 단면 설계에 민감하다는 것을 나타내는 것이다. 또한 기저함수 1에 의한 결과를 보면 단면그룹 3은 설계변수가 설계하한치 근처에 수렴하는 반면 단면그룹 1과 단면그룹 2의 상부플랜지 두께를 보면 0.42m와 0.43m로 설계하한치인 0.2m와 큰 차이를 보이며 수렴을 하는데, 이러한 결과는 기저함수 1에 의한 텐던형상이 단면그룹 3보다 단면그룹 1과 2에 대해서 더 지배적으로 작용한다는 것을 알 수 있었다. 마찬가지로 기저함수 1과 2 그리고 5에 의한 최적설계결과들을 보면 각각의 텐던형상에 대해 지배적으로 작용하는 단면그룹과 그렇지 않은 단면그룹이 있다는 것을 알 수 있었다.

각 기저함수에 따른 최적설계 결과와 기저함수 감소기법을 사용한 경우의 설계비용을 보면 기저함수 감소기법을 사용한 경우 3816.55만원으로 각 기저함수에 따른 설계비용과 약 0.84~6.2%정도 더 경제적인 설계결과를 나타내며, 이는 박스거더의 높이가 높을수록 그리고 텐던량이 적게 사용될수록 경제적인 설계결과를 가져온다는 것을 알 수 있었다. 따라서, 기저함수 감소기법을 사용하면 PSC 박스거더의 높이와 텐던량을 합리적으로 조절하여 경제적인 설계를 유도함을 알 수 있었다.

그림 8은 각 기저함수 및 기저함수 감소기법을 이용한 조합함수의 텐던형상을 나타낸 그래프이다. 기저함수 감소기법에 의한 최적의 텐던형상은 기저함수 3과 가장 비슷해 보이며, 표 4에 나타나 있는 가중치를 보면 기저함수 3과 5의 가중치가 가장 큰 걸로 보아 조합함수는 기저함수 3과 5에 가장 많은 영향을 받은 것으로 보인다. 또한 기저함수 3과 5에 의한 최적설계결과를 보면, 각각 3848.50, 3874.54만원으로 기저함수 감소기법을 이용한 최적설계비용 다음으로 가장 경제적인 설계비용임을 알 수 있었다. 특히, 기저함수 3은 참고문헌[1]에 나와 있는 텐던형상을 최적화하기 위해 사용한 방법으로 본 논문에서 사용한 기저함수 감소기법이 기존의 연구¹⁾에서 사용한 텐던최적화보다 적은 설계변수를 사용하면서 더욱 경제적인 설계를 유도하므로 보다 효율적이고 경제적인 방법임을 알 수 있다.

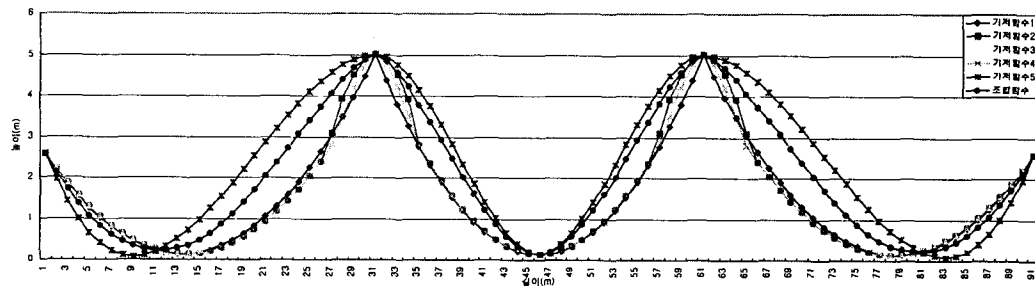


그림 8 각 기저함수 및 조합함수에 따른 텐던형상

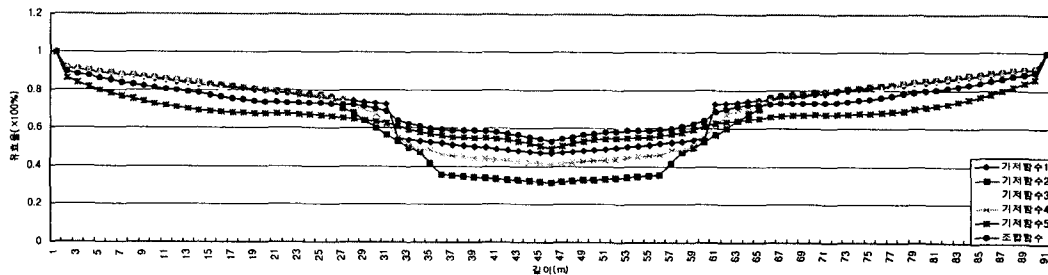


그림 9 각 기저함수 및 조합함수에 따른 유효율

또한 그림 9를 보면 각 기저함수 및 조합함수에 따른 프리스트레싱력의 유효율을 나타낸 그래프로 표 4에 나타낸 각 기저함수의 최적설계 비용과 손실율과의 관계를 살펴보면, 전지간에 걸친 유효율이 클수록 경제적인 설계를 얻을 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 텐던형상과 텐던량 그리고 PSC 박스거더단면에 대한 최적설계를 효율적이고 합리적으로 수행할 수 있는 최적설계 알고리즘을 제안하고 이를 적용예를 통하여 검증하였다. 이에 대한 결론은 다음과 같다.

- 1) PSC 박스거더교량의 최적설계시 텐던형상은 구조물 성능 및 경제성에 미치는 영향이 클 뿐만 아니라 시공성을 고려해야 하는 복잡한 설계절차를 가지고 있어 기저함수 감소기법과 같은 실용적인 방법을 통하여 효과적으로 최적해를 구할 수 있고 차선책으로는 3차 곡선식을 구조거동에 적합하게 조합한 형상을 사용할 수 있다.
- 2) 텐던형상을 최적화하기 위해 기존의 자료를 사용하는 기저함수 감소기법은 텐던의 형상을 각 단면별로 표현했던 기존의 연구결과와 비교하여 보다 적은 텐던형상에 관한 설계변수를 사용하고도 보다 경제적인 근접 최적설계를 수행할 수 있는 매우 합리적인 방법이다.
- 3) PSC 박스거더교량의 텐던형상은 텐던의 마찰손실이 전 지간에 걸쳐 적게되는 경향으로 설계가 유도되고 콘크리트 단면의 높이와 텐던량이 지배적인 인자이다. 따라서 실무 설계에서 이에 대한 구조안전성 및 경제성에 대한 검토가 필수적이다.
- 4) 본 연구에서 제안하는 최적설계 방법은 텐던형상과 텐던량 그리고 PSC 박스거더단면을 포함하는 최적설계를 보다 실질적이고 효율적으로 수행할 수 있도록 기저함수 감소기법을 사용한 최적설계 알고리즘이며 이와 같은 알고리즘은 실질적인 소프트웨어 개발에 있어 근접최적해를 실용적으로 찾을 수 있는 핵심적인 기술이다.

감사의 글

본 연구는 학술진흥재단 “두뇌한국21(BK21)”의 연구비 지원에 의하여 연구되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- 1) A. S. Al-Gahtani, S. S. Al-Saadoun & E. A. Abul-Feilat(1995), “Design Optimization of Continuous partially prestressed concrete beams”, *Computer & Structures*, Volume 35, No. 2, Pages 365~370.
- 2) M. A. Utrilla and A. Samartin(1997), “Optimized design of the prestress in continuous bridge decks”, *Computers & Structures*, Volume 64, Issues 1-4, 8 July, Pages 719-728
- 3) U. Kirsch(1997), “Two-level optimization of prestressed structures”, *Engineering Structures*, Volume 19, Issue 4, April, Pages 309-317
- 4) 한국도로교통협회(2000), *도로교 설계기준*
- 5) 한국도로공사(1996), *도로설계 실무편람*
- 6) G. N. Vanderplaats(1985), “ADS: A FORTRAN Program for Automated Design Synthesis, Engineering Design Optimization”, Inc., Santa Barbara, California.
- 7) David E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-wesley, Inc., 1989