한국전산구조공학회
2001년도 가을 학술발표회 논문집

연직하중을 받는 케이블의 형상결정을 위한 반복계산법의 개발

A Study on an Iteration Method for the Determination the Initial shape of the Cable

계만수* 정진환** 조현영***
Gye, Man Shu Cheung, Jin Hwan Cho, Hyun Yung

ABSTRACT

In the design of cable structures it is necessary to know the initial shape of the cable. The geometrical condition and the equilibrium equation of the cable are needed. Because the equilibrium equation is expressed by the simultaneous equations of second order, it is almost impossible to solve with elimination method. To solve it, we must use iteration method.

In this study, the algorithm which can reduce the number of iteration and calculate shape of the cable is developed and compared with measured data through the laboratory test and the results represent good agreements.

1. 서 론

케이블구조물의 응력을 계산하려면 케이블의 형상을 알아야 하는데, 케이블의 형상은 하중의 크기와 하중을 매다는 위치에 따라서 달라진다. 따라서 주어진 하중의 위치와 크기에 따라서 전체 형상을 먼저 결정하여야 한다. 케이블의 자중을 무시할 수 있을 때 케이블의 형상은 직선으로 연결되었다고 가정할 수 있다. (Fig.1 참조)

하중의 수평간격 $d_1, d_2, \cdots, d_{n+1}$과 한 개의 Sag S_i (예컨대 S_1)를 주면 나머지 케이블의 Sag S_j(단 $j \neq i$)는 케이블의 일반원리를 이용하여 간단히 구할 수 있고, 따라서 케이블의 형상이 결정될 수 있다. 그러나 실무적으로는 하중을 케이블 길이방향 위치 $L_1, L_2, \cdots, L_{n+1}$에 매달고 케이블의 두 지점 $A(0,0)$ 및 $B(D,h)$에 걸쳤을 때 케이블의 일반원리를 적용하여 형상을 결정할 수가 없다. 왜냐하면 케이블 Sag S_i와 하중의 수평간격 d_i가 미지이기 때문이다.

이 경우, 케이블의 형상은 케이블 일반원리로 표현되는 평형방정식과 기하학 적합조건을 나타내는 형상방정식으로 결정되는데, 그 중 형상방정식은 연립2차 방정식으로 주어지므로 그 해법이 일차 연립방정식 만으로 구성되는 경우처럼 소거법 등으로는 풀 수 없고, 시산법(iteration method)에 의존하는 수밖에 없다.

본 연구에서는 반복계산의 회수를 되도록 줄일 수 있고 수렴이 확실시되는 한가지 기계적 반복계산 알고리즘을 제안하려는 것이다.

* 부산대학교 박사과정
** 정회원 · 부산대학교 토목공학과 교수
*** 부산대학교 명예교수

2. 평형방정식(케이블의 일반원리)

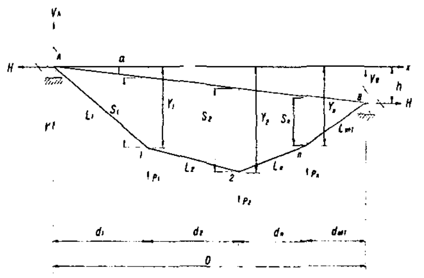

Fig.1 Straight cable structure

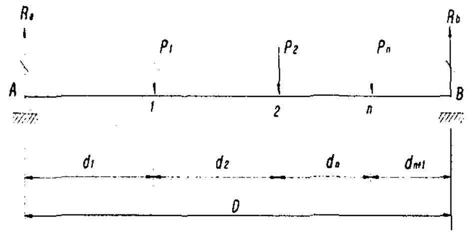

Fig.2 Conjugate beam

Fig.1과 같은 케이블구조물을 생각한다. 케이블의 일반원리에 의하면 케이블 한 점에 대한 모멘트 평형방정식은 Fig.1의 Conjugate beam(Fig.2를 참조)의 같은 수평거리에 있는 대응한 점의 휨 모멘트가 케이블의 수평반력 H와 케이블 Sag S_i의 곱과 같다는 원리로 주어진다[1][2]. 즉

$$M_i = H \cdot S_i \quad 단\ i = 1, 2, 3, \cdots, n \tag{1a}$$

여기서

M_i : 점 i 에서의 Conjugate beam의 휨 모멘트.

H : 수평반력 또는 케이블 인장력의 수평분력.

S_i : 점 i 에서의 케이블의 Sag.

식(1a)에서 어느 한 개의 Sag S_j의 값을 먼저 정해주면 식

$$H = \frac{M_j}{S_j} \tag{1b}$$

로 케이블 장력의 수평분력이 정해지고 이 값을 이용하여 다음 식과 같이 모든 Sag S_i를 구할 수 다.

$$S_i = \frac{M_i}{H} \quad 단\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{1c}$$

(1a)식에서 Conjugate beam의 휨모멘트는 Fig.2에서 단순보의 휨모멘트를 계산하는 것이므로 더 언급할 것이 못된다. 반복계산 과정을 각 절점 i에서의 전단력 Q_i들을 활용하면 편리하다. 즉

$$\begin{aligned} M_1 &= R_a d_1 \\ M_2 &= M_1 + Q_1 d_2 \\ &\vdots \\ M_m &= M_{m-1} + Q_{m-1} d_m \end{aligned} \tag{2}$$

단, R_a는 Conjugate beam의 A지점의 수직반력이고 $Q_{m-1} = R_a - \sum_{i=1}^{m-1} P_i$ 이다.

여기서 미지 간격 d_i 의 합계는 케이블의 지지점 A , B의 수평거리이다. 즉,

$$\sum d_i = D \ , \quad i = 1, 2, \cdots, n+1 \tag{3}$$

3. 케이블의 형상방정식 (기하학적 적합조건)

식(1c)에서 정해진 S_i 값들로서 하중작용점의 수직좌표 Y_i가

$$Y_i = S_i + \sum_{k=1}^{i} d_k \tan \alpha \tag{4a}$$

$$단, \ \tan \alpha = \frac{h}{D}$$

로 구해진다.(Fig.1 참조)

이 값들을 이용하면 케이블의 형상조건은 케이블의 구간 길이 L_i는 하중간격 d_i 및 L_i 그리고 양끝의 Y 좌표의 차 $(Y_i - Y_{i-1})$에 의하여 다음과 같이 계산된다. (Fig.1 참조)

$$L_i^2 = d_i^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2 \ , \ i = 1, 2, \cdots, n+1 \tag{4b}$$

4. 케이블의 형상결정

결국 연직하중을 받는 케이블의 형상결정문제는 예컨대 Fig.1의 경우, 식(1c)에서 $i = 1, 2, \cdots, n$ 및 식(4b)에서 $i = 1, 2, \cdots, n+1$로 하여 도합 $2n+1$개의 식에서부터 $d_1 \sim d_{n+1}$ 및 $Y_1 \sim Y_n$로 구성되는 $2n+1$개의 미지수를 결정하는 문제가 된다.

이런 경우의 현실적 해결방법은 규모가 단순하고 하중이 복잡하지 않다면 상사법칙이 성립되는 모형을 만들어서 실측하는 것이 가장 간단한 방법이 되겠다.

또 한가지 방법은 식(1c) 및 식(4b)의 연립방정식을 시산적 되풀이계산법으로 근사 해를 구하는 것이다. 만약 근사 해의 정도(accuracy)가 반복계산(iteration)의 회수에 따라서 정답으로 수렴함을 확인할 수 있다면 사실상의 해석 해를 얻었다고 할 수 있다.

아래에 제안하는 반복계산법은 여러 번의 시행착오 끝에 정립된 것이며 1회의 시산은 다음과 같은 여섯 단계로 구성된다.

① 주어진 지간 D를 적절히 나누어 하중의 수평거리 d_i들을 가정한다.

② 식(2)에서 M_i들을 구한 다음 식(1c)에서 S_i들을 구하고, 식(4a)에서 절점의 수직좌표 Y_i를 결정한다.

③ 구해진 Y_i 및 가정한 d_i의 값들을 식(4b)의 형상조건에 대입하여 L_i의 근사 값 l_i들을 결정한다. 즉

$$l_i = (d_i^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2)^{\frac{1}{2}} \ , 단 \ i = 2, 3, \cdots, n+1 \tag{5}$$

④ $\sum l_i = \sum L_i$되도록 Y_i를 조정한 후 식(5)으로 l_i 들을 구한다. 이 때 Y_i의 조정은 제안된 조정공식을 이용한다.(식(18) 참조)

⑤ 4번째 단계에서 구해진 l_i들을 L_i의 값과 일치하지 안는다. 이는 식(5)으로 계산된 l_i들이 정답이 아니기 때문이다. 먼저 d_i의 값을 다음 식으로 수정한다.

$$\text{수정 } d_i = L_i \times \frac{\text{가정 } d_i}{l_i} \quad \text{단 } i = 1, 2, \cdots, n+1 \tag{6}$$

⑥ 다섯째 단계에서 구해진 d_i들을 모두 합하면, 주어진 D값과 일치하지 않으므로 이를 재조정한다. 즉

$$\text{재수정 } d_i = d_i \times \frac{D}{\sum d_i} \quad \text{단 } i = 1, 2, \cdots, n+1 \tag{7}$$

여기서 다시 1단계로 되돌아가서 이 과정을 반복한다.

5. 케이블 Sag S_i의 변화에 따른 케이블 전체길이의 변화

네 번째 단계에서 한 Y_i의 조정량 δY_i를 주면 케이블의 길이 l_i가 변화하고, 이때 $\sum l_i = L$ 되도록 하는 조정량 δY_i를 구하는 근사 공식을 만들어 보자.

하중 P_i와 그들의 수평간격 d_i가 불변이라 할 때, 식(1a)에서 좌변의 M_i의 값은 불변이다. 수직방향으로 Sag 높이가 S_i에서 $S_i + \delta S_i$으로 변화가 있을 때 수평력이 H에서 $H + \delta H$으로 변한다고 하면 식(1a)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$(H + \delta H) \cdot (S_i + \delta S_i) = M_i + \delta M_i \tag{8}$$

하중간격 d_i가 불변이므로 M_i가 불변이며 $\delta M_i = 0$되고 고차항을 무시하면 다음 식이 성립된다.

$$\delta H \cdot S_i + H \cdot \delta S_i = 0$$

$$\therefore \frac{\delta H}{H} = -\frac{\delta S_i}{S_i} = k \tag{9}$$

라 두면

$$\delta S_i = -k S_i \tag{10}$$

식(9)에서 특정 δS_j를 가정하면 기타 δS_i는 식(10)으로 즉시 계산된다.

한편 형상조건식(5)으로부터 미분하면 다음 식이 얻어진다.

$$l_i \delta l_i = (Y_i - Y_{i-1}) \cdot (\delta Y_i - \delta Y_{i-1}) \tag{11}$$

이때 d_i는 이미 어떤 상수로 가정했기 때문에 미분하면 영이 된다.

그리고 식(4a)으로부터

$$Y_i - Y_{i-1} = S_i - S_{i-1} + d_i \tan \alpha \tag{12}$$

식(12)를 미분하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\delta Y_i - \delta Y_{i-1} = \delta S_i - \delta S_{i-1} \tag{13}$$

식(13)을 식(11)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$l_i \delta l_i = (Y_i - Y_{i-1}) \cdot (\delta S_i - \delta S_{i-1}) \tag{14}$$

식(10)으로부터 다음 식을 얻는다.

$$\delta S_i - \delta S_{i-1} = -k(S_i - S_{i-1}) \tag{15}$$

식(15)를 식(14)에 대입하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum \delta l_i = k \sum \frac{(Y_i - Y_{i-1}) \cdot (S_i - S_{i-1})}{l_i} \tag{16}$$

한편

$$\sum \delta l_i = \delta(\sum l_i) = \sum l_i - L \tag{17}$$

이기 때문에, 식(16)과 식(17)으로부터

$$k = \frac{\delta \sum l_i}{\sum \frac{\nabla Y_i \cdot \nabla S_i}{l_i}} \tag{18}$$

단, $\nabla Y_i = Y_i - Y_{i-1}$

$\nabla S_i = S_i - S_{i-1}$

$\delta \sum l_i = \sum l_i - L$

식들을 얻을 수 있다.

수정계수 k를 알면 식(9)로부터 계산된 케이블 全長이 주어진 케이블 全長($L = \sum L_i$)과 일치되도록 하는 S_i의 수정량 δS_i 가 구해지고, 따라서 수정된 S_i의 값은 다음 식으로서 주어진다.

$$\text{수정 } S_i = S_i + \delta S_i = S_i - kS_i = (1-k)S_i \tag{19}$$

따라서 수정된 Y_i를 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$\text{수정 } Y_i = \text{수정 } S_i + \sum_{k=1}^{i} d_k \tan \alpha \tag{20}$$

이상의 과정을 요약하면 다음과 같다.

케이블의 구간길이 L_i와 하중 P_i가 주어지고 또 兩端의 매다는 위치를 줄 때, 케이블의 형상결정문제는 크게 보아서 두 단계로 나누어 생각할 수 있다.

① d_i들을 적절히 가정한 다음 이를 不變으로 할 때 Y_i들을 평형조건 식으로부터 구한 다음 케이블의 全長이 주어진 길이 $L(=\sum L_i)$와 일치하도록 이들을 조정한다.

② 구간길이 l_i가 $l_i \cong L_i$ 되도록 d_i들을 조정하되 $\sum d_i = D$ 되도록 조정한다.

위의 두 가지 단계를 구체적으로 처리한 것이 앞에서 서술한 여섯 가지 단계에 해당한다.

6. 케이블 신장량을 고려할 때의 케이블 길이의 조정공식

① 선형 탄성의 경우

선형탄성일 때의 케이블 길이 l_i의 신장량 Δl_i는 후크의 법칙으로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Delta l_i = \frac{T_i}{EA} l_i \tag{21}$$

단, T_i : 케이블선단 l_i의 장력

E : 케이블의 탄성계수

A : 케이블의 면적

l_i : i번째 케이블의 길이

케이블의 탄성계수 E는 케이블인장 시험의 $P-\delta$곡선에서 얻을 수 있고, 케이블 장력 T_i은 힘의 평형조건으로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$T_i = \frac{H}{\cos\theta_i} \tag{22}$$

단 H 는 케이블의 수평장력이고, $\cos\theta_i = d_i / l_i$이다.

② 비선형 탄성의 경우

초기길이가 L_0인 케이블의 인장시험에서 얻은 $P-\delta$곡선(하중 점간은 직선으로 간주하였다.)을 이용하여 같은 단면을 지닌 임의의 초기길이 l_i를 가진 케이블의 $P-\Delta l_i$ 곡선을 얻을 수 있다. 즉 두 케이블에 대하여 동일한 P_x를 작용시킬 때

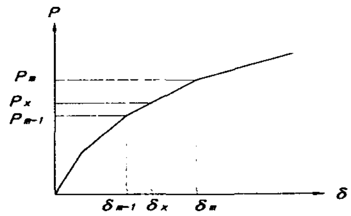

Fig.3 $P-\delta$ 곡선(initial length L_0)

$$\sigma_x = E_x \cdot \varepsilon_x \ , \ \varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L}, \ \sigma_x = \frac{P_x}{A}$$

$$\therefore \ \frac{P_x}{E_x A} = \frac{\delta_x}{L}, \ \frac{\delta_x}{L_0} = \frac{\Delta l_i}{l_i} \tag{23}$$

케이블 인장력이 T_i일 때의 δ_x는 초기길이가 L_0인 케이블의 인장시험 $P-\delta$곡선을 이용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.(Fig.3 참조)

$$k_m = \frac{P_m - P_{m-1}}{\delta_m - \delta_{m-1}}$$

$$\delta_x = \delta_{m-1} + \frac{T_i - P_{m-1}}{k_m} \quad (\text{단 } P_{m-1} \le T_i \le P_m) \tag{24}$$

식(23)와 식(24)을 이용하여 임의의 초기길이 l_i를 가진 케이블이 인장력 T_i를 받을 때의 케이블 신장량을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Delta l_i = \frac{l_i}{L_0}\left(\delta_{m-1} + \frac{T_i - P_{m-1}}{k_m}\right) \quad (\text{단 } P_{m-1} \le T_i \le P_m) \tag{25}$$

다시 정리하여 말하자면 탄성변형을 고려한 케이블의 형상결정문제는 크게 보아서 다음 세 단계로 나누어 생각할 수 있다.

① 4절에서 반복계산 알고리즘으로 l_i가 L_i로 수렴할 때까지 계산한다.

② 반복 계산에서 얻은 케이블 장력으로 케이블의 신장량 Δl_i을 계산한다.

③ 수정된 $l_i (= l_i + \Delta l_i)$을 4절의 알고리즘에 대입하여 수렴조건에 만족될 때까지 ①부터 ③의 과정을 반복한다. 단 수렴조건은 $m+1$번째 반복계산에서 얻은 장력 T_i^{m+1} (또는 Δl_i^{m+1})과 m번째 반복계산에서 얻은 장력 T_i^m (또는 Δl_i^m)의 차가 미리 정해진 값 이하가 되게 하는 것이다.

7. 計算例

Fig.4와 같은 수평 케이블 구조의 형상을 계산하여 보자. 여기서 하중 $P_1 = 10\ Ton, P_2 = 10\ Ton, P_3 = 20\ Ton$ 및 케이블의 길이방향 간격은 $L_1 = 10m,\ L_2 = 10m,\ L_3 = 20m,\ L_4 = 10m$가 그림과 같이 주어지고 $D = 40\,m$ 의 지점에서 걸었을 때, 하중점의 수평간격 d_1, d_2, d_3, d_4와 케이블의 처짐 y_1, y_2, y_3을 구한다.

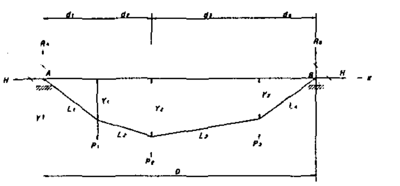

Fig.4 Numerical Example-1

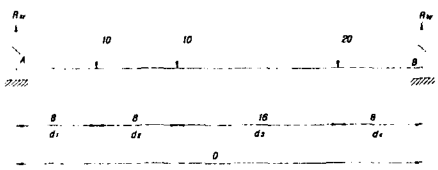

Fig.5 Conjugate Beam

5회까지의 계산은 표-1과 표-2에 정리하였다.

표-1 계산예제 결과정리-1

반복회수	절 점 좌 표									
	지점 A		1		2		3		지점 B	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1	0	0	6.446	8.940	15.104	12.913	34.289	10.926	40	0
2	0	0	6.306	7.834	15.113	12.332	34.663	8.953	40	0
3	0	0	6.285	7.782	15.138	12.373	34.749	8.630	40	0
4	0	0	6.283	7.778	15.149	12.389	34.770	8.552	40	0
5	0	0	6.283	7.778	15.152	12.394	34.775	8.533	40	0

표-2 계산예제 결과정리-2

반복회수	선 단 길 이								
	L1 (= 10)		L2 (= 10)		L3 (= 20)		L4 (= 10)		최대오차
	길이	오차(%)	길이	오차(%)	길이	오차(%)	길이	오차(%)	(%)
1	11.997	19.967	8.932	-10.676	16.123	-19.386	13.542	35.42	35.42
2	10.146	1.455	9.756	-2.435	19.481	-2.594	10.619	6.188	6.188
3	10.0.6	0.163	9.932	-0.680	19.904	-0.479	10.147	1.475	1.475
4	10.000	0.000	9.982	-0.182	19.982	-0.088	10.036	0.359	0.359
5	9.999	-0.009	9.995	-0.048	19.997	-0.015	10.009	0.088	0.088

8. 실 험

본 알고리즘의 정확도를 알기 위해서 실내실험을 실시하였다. 측정장치는 화상측정장치(Fig.6를 참조)를 사용하였다.

Fig6. 측정장치

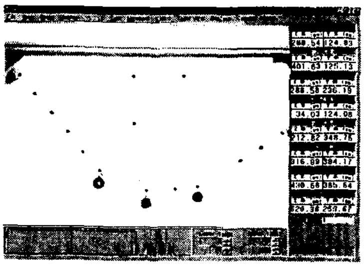

Fig.7 측정프로그램

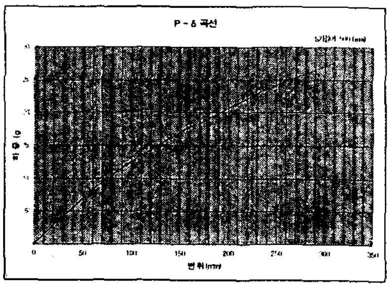

Fig.8 고무줄의 P-δ곡선

케이블로는 고무줄을 사용하였고 초기길이가 500㎜일 때의 P-δ곡선은 Fig.8과 같다.
측정결과와 4번 반복계산한 계산결과의 비교는 표-3에 정리하였다.

표-3 측정결과와 계산결과의 비교

항 목	절 점 좌 표									
	점A		1		2		3		점B	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
측정결과	0	0	27.2	34.6	46.0	45.2	77.8	42.2	103.0	23.0
계산결과	0	0	27.265	34.823	45.712	45.758	77.413	42.854	103.000	23.000
오차(%)	0	0	0.239	0.645	-0.626	1.234	-0.497	1.550	0.000	0.000

9. 결 론

본 알고리즘으로 케이블형상을 결정할 때 복잡한 유한요소의 해석이 필요 없이 단순한 수치적 계산만으로 그리고 적은 반복계산의 회수로 정도가 만족스러운 해를 얻을 수 있었다.

그리고 비선형 탄성재료의 P-δ곡선을 이용하여 비선형 탄성재료로 된 케이블의 형상결정에도 본 알고리즘의 만족스러운 정확성을 가지고 있다는 것을 실내실험을 통하여 검증하였다.

실제 케이블구조의 설계에서 설계자에게는 간편하고 정확한 알고리즘이라고 할 수 있다.

참고 문헌

1. J.L. Meriam, L.G. Kraige, *Engineering Mechanics*, Volume One, Third Edition, John Wiley & Song, Inc., 1993, pp.301~307.
2. 梁昌鉉, **構造力學**, 改訂版, 淸文閣, 1999, pp.116~119.