

## 구조해석에서 수치미분의 적용

### Application of Numerical Differentiation in Structural Analysis

○김 영 일\* · 신 성 철\* · 이 태 은\*\* · 이 병 구\*\*\*

Kim, Young Il · Shin, Seong Cheol · Lee, Tae Eun · Lee, Byoung Koo

---

#### ABSTRACT

This paper deals with the application of numerical differentiation in the structural analysis. In the structural analysis, the derivative values of the given function are sometimes used in calculation of structural behaviors. For calculating the derivative values, both the time and labor are needed when the structures consist of non-linear geometries such as arches or curved beams. From this viewpoint, the numerical differentiation scheme is applied into the structural analysis. The numerical results obtained from the numerical differentiation are agreed very well with those obtained from the exact derivatives by analytical method. It is expected that the numerical differentiation can be utilized practically in the structural analysis.

---

#### 1. 서 론

최근 구조해석 기술의 발달로 구조물의 기하학적 형상이 매우 복잡해지는 경향이 있다<sup>[1]</sup>. 구조물의 기하학적 형상은 구조물의 선형 정의 및 변단면 정의를 모두 포함한다. 이러한 구조물의 기하학적 형상은 구조해석에서 가장 기본이 되는 입력변수들이다. 따라서 구조해석에서 구조물의 선형 또는 변단면에 대한 수학적 해석 값들 예를 들어 구조물의 선형 또는 변단면의 미분 값들은 구조해석에서 매우 중요한 역할을 한다.

구조해석에서 구조물의 선형 또는 변단면이 복잡한 경우에 이들의 미분 값들을 산출하는 것은 매우 힘들고 많은 노력을 필요로 한다. 구조해석에서 수치적분기법은 많은 연구 논문들에서 그 적용성이 연구되어 왔지만<sup>[2]</sup> 수치미분기법을 구조해석에 응용한 예는 찾아볼 수 없었다. 이러한 관점에서 이 논문은 구조해석에 수치미분기법을 응용하는 데에 연구 목적이 있다.

---

\* 원광대학교 대학원 석사과정

\*\* 원광대학교 대학원 박사과정

\*\*\* 원광대학교 토목환경공학과 교수

## 2. 수치미분기법

수치미분기법<sup>[3-4]</sup>들에는 여러 가지 방법들이 있으나, 일반적으로 가장 많이 사용되고 있는 방법은 Taylor 급수법(Taylor Series Method)이 대표적이다. 본 연구에서 수치미분법으로 채택한 Taylor 급수법을 간단히 설명하면 다음과 같다. 그림 1은 수치미분을 하려는 함수  $y=f(x)$ 를 직교 좌표계에 나타낸 것이며, 이 함수의 1계, 2계, 3계의 미분 값들을 구하고자 하는 것이 본 절의 목표이다. Taylor 급수법에서 미분 값을 계산하기 위한 방법들에는 전진법, 후진법, 중앙법 등이 있으나 본 연구에서는 전진법을 사용하기로 한다.

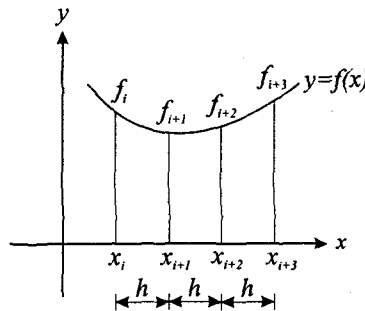


그림 1. 전진 3차다항식

그림 1에서  $f_{i+1}$ ,  $f_{i+2}$ ,  $f_{i+3}$ 의 함수값들을  $x_i$ 에서의 1계, 2계, 3계 미분 값들  $f_i^{(1)}$ ,  $f_i^{(2)}$ ,  $f_i^{(3)}$ 을 이용하여 Taylor급수로 나타내면 다음과 같다.

$$f_{i+1} = f_i + hf_i^{(1)} + \frac{h^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{h^3}{6} f_i^{(3)} + \dots \quad (2.1)$$

$$f_{i+2} = f_i + 2hf_i^{(1)} + \frac{(2h)^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{(2h)^3}{6} f_i^{(3)} + \dots \quad (2.2)$$

$$f_{i+3} = f_i + 3hf_i^{(1)} + \frac{(3h)^2}{2} f_i^{(2)} + \frac{(3h)^3}{6} f_i^{(3)} + \dots \quad (2.3)$$

위의 식에서  $h$ 는 그림 1에서 보인바와 같이  $h = x_{i+1} - x_i = x_{i+2} - x_{i+1} = \dots$ 으로 등간격이다.

식 (2.1), 식 (2.2) 및 식 (2.3)을  $f_i^{(1)}$ ,  $f_i^{(2)}$ ,  $f_i^{(3)}$ 에 대해서 풀면 다음과 같다.

$$f_i^{(1)} \cong \frac{1}{6h} (-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}) \quad (2.4)$$

$$f_i^{(2)} \cong \frac{1}{h^2} (2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}) \quad (2.5)$$

$$f_i^{(3)} \cong \frac{1}{h^3} (-f_i + 3f_{i+1} - 3f_{i+2} + f_{i+3}) \quad (2.6)$$

위의 식들을 이용하면 주어진 함수의 1계, 2계, 3계의 미분 값들을 계산할 수 있다.

4계 이상의 미분 값을 계산하기 위해서는 4계 이상의 미분 값들을 Taylor급수에서 나타내고 이들을 미지수로 하여 연립방정식을 풀면 고계미분 값들을 얻을 수 있다.

표 1은 전진 미분법의 1계, 2계, 3계 미분 값들을 2차~6차 다항식으로 계산하기 위한 각 미분 값들의 계수를 수록한 표이며 앞에서 유도한 3차 다항식의 계수들은 \*로 표시한 계수들에서 확인할 수 있다.

표 1. 미분 값을 계산하기 위한 계수

미분 값	⊙ : 미분 값이 계산될 기본좌표, $h$ : 간격, ○ : 계수	다항식
1계 미분	$\frac{1}{2h} (\ominus - \ominus - \ominus)$	2차
	$\frac{1}{6h} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus)^*$	3차
	$\frac{1}{12h} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus)$	4차
	$\frac{1}{60h} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus)$	5차
	$\frac{1}{60h} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus)$	6차
2계 미분	$\frac{1}{h^2} (\ominus - \ominus - \ominus)$	2차
	$\frac{1}{h^2} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus)^*$	3차
	$\frac{1}{12h^2} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus)$	4차
	$\frac{1}{60h^2} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus)$	5차
	$\frac{1}{180h^2} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus)$	6차
3계 미분	$\frac{1}{h^3} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus)^*$	3차
	$\frac{1}{2h^3} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus)$	4차
	$\frac{1}{4h^3} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus)$	5차
	$\frac{1}{8h^3} (\ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus - \ominus)$	6차

\* 앞의 예(전진 3차다항식 미분 값)에서 구한 계수들

### 3. 수치 예제

본 연구에서 수치미분의 결과를 이용한 구조물해석의 정확성을 검증하기 위하여 문헌<sup>[5]</sup>의 아치의 자유진동 문제를 택하였다. 그림 2는 문헌<sup>[5]</sup>에서 지간길이  $l$ , 수평높이  $h$ ,  $y = y(x)$ 의 임의 선형을 갖는 아치의 기하학적 형상을 나타낸 것이다. 부재의 양단부는 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있고  $(x, y)$ 는 부재의 좌단을 원점으로 하는 직교 좌표계이다.  $\rho$  및  $\phi$ 는 아치의 곡률반경 및  $x$ 축과 곡률중심방향이 이루는 각도이다.  $w, v$  및  $\psi$ 는 아치 중심방향의 변위, 접선방향의 변위 및 휨에 의한 단면 회전각이다. 이러한 아치의 자유진동을 지배하는 상미분방정식은 다음과 같다.

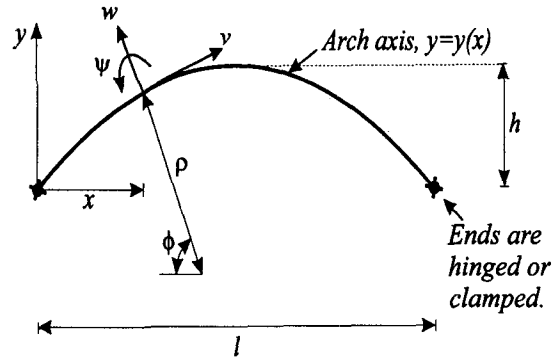


그림 2. 아치의 기하학적 형상

$$\delta'''' = a_1 \delta'''' + (a_2 + a_3 s^{-4} C_i^2) \delta'' + (a_1 - a_4 s^{-4} C_i^2) \delta' + (a_5 + a_6 s^{-4} C_i^2) \delta + (1 - s^{-4} C_i^2) a_3 u + a_4 s^{-4} C_i^2 u \quad (3.1)$$

$$u'' = a_7 \delta'' + (s^{-4} C_i^2 - 1) \delta' + a_8 \delta + a_9 u' + (a_3 - 1) s^{-4} C_i^2 u \quad (3.2)$$

위의 식에서 사용한 무차원 변수들은 다음과 같다.

$$C_i = \omega_i (l^2 / r) \sqrt{m / EA}, \quad f = h / l, \quad s = l / r \quad (3.3-5)$$

$$\xi = x / l, \quad \eta = y / l, \quad \delta = w / l, \quad u = v / l, \quad \zeta = \rho / l \quad (3.6-10)$$

여기서,  $C_i$ 는 무차원 고유진동수이고,  $f$ 는 수평높이대 지간길이비,  $s$ 는 세장비,  $(\xi, \eta)$ 는 무차원 직교 좌표계,  $\delta, u$  및  $\zeta$ 는  $w, v$  및  $\rho$ 를 지간길이  $l$ 로 정규화한 것이다. 미분방정식 식 (3.1), (3.2)에 포함되어 있는 계수는 다음과 같다.

$$a_1 = 5 \frac{\zeta'}{\zeta}, \quad a_2 = 2 \frac{\zeta''}{\zeta} - 8 \frac{\zeta'^2}{\zeta^2} - 2, \quad a_3 = -s^2 \zeta^2, \quad a_4 = -s^2 2 \zeta \zeta' \quad (3.11-14)$$

$$a_5 = 2 \frac{\zeta''}{\zeta} - 8 \frac{\zeta'^2}{\zeta^2} - s^2 \zeta^2 - 1, \quad a_6 = s^4 \zeta^4 \quad (3.15-16)$$

$$a_7 = \frac{\zeta'}{s^2 \zeta^3}, \quad a_8 = \frac{\zeta'}{\zeta} \left( 1 + \frac{1}{s^2 \zeta^2} \right), \quad a_9 = \frac{\zeta'}{\zeta} \quad (3.17-19)$$

미분방정식 식 (3.1), (3.2)를 수치해석하기 위해서는 경계조건이 필요하며, 먼저 회전단에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$u = 0, \quad \delta = 0, \quad \delta'' = 0 \quad (3.20)$$

고정단에서 경계조건은 다음과 같다.

$$u = 0, \delta = 0, \delta' = 0 \quad (3.21)$$

식 (3.11)~(3.19)에서 정의된 계수들을 계산하기 위해서는 먼저 아치의 선형  $y = y(x)$ 가 정의되어야 하는데 이를 무차원식 식 (3.6), (3.7)을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\eta = \eta(\xi) \quad (3.22)$$

식 (3.11)~(3.19)의 계수들을 계산하는데 필요한  $\phi$ ,  $\zeta$ ,  $\zeta'$  및  $\zeta''$ 를 대수적으로 구하면 다음과 같다.

$$\phi = \pi/2 - \tan^{-1}(d\eta/d\xi), \quad \zeta = [1 + (d\eta/d\xi)^2]^{3/2} / |d^2\eta/d\xi^2| \quad (3.23-3.24)$$

$$\zeta' = (d\zeta/d\xi)(d\xi/d\phi), \quad \zeta'' = (d\zeta'/d\xi)(d\xi/d\phi) \quad (3.25-3.26)$$

위의 식들을 실제 아치문제에 적용하기 위하여 포물선 아치를 선택하였으며, 지간길이가  $l$ 이고 높이가  $h$ 인 포물선의 선형식은 다음과 같다.

$$y = -(4h/l^2)x(x-l), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.27)$$

식 (3.22)를 무차원식 식 (3.4), (3.6) 및 (3.7)을 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\eta = -4\xi(\xi-1)f, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.28)$$

식 (3.28)을 식 (3.23)~(3.26)에 대입하고 정리하면 포물선 아치의 자유진동해석에서 필요한  $\phi$ ,  $\zeta$ ,  $\zeta'$  및  $\zeta''$ 값들을 다음 식들과 같이 얻을 수 있다.

$$\phi = (\pi/2) - \tan^{-1}[-4(2\xi-1)f], \quad \zeta = (1/8f)[1+16f^2(2\xi-1)^2]^{3/2} \quad (3.29-30)$$

$$\zeta' = \frac{3}{2}(2\xi-1)[1+16f^2(2\xi-1)^2][1+16f^2(2\xi-1)^2]^{3/2} \quad (3.31)$$

$$\zeta'' = (3/8f)[1+64f^2(2\xi-1)^2][1+16f^2(2\xi-1)^2]^{3/2} \quad (3.32)$$

수치미분 결과의 타당성을 검증하기 위하여 위의 식들을 이용하여 대수적으로 구한 결과와 수치미분법으로 구한 결과들의 변수값들을 비교하였다. 먼저, 표 2는  $f=0.25$ ,  $s=200$ ,  $\xi=0.4$ ,  $\eta=0.24$ 일 때 아치의 고유진동수를 계산하기 위한 각종 변수값들을 비교한 표이다. 이 표에서 알 수 있듯이 수치미분을 이용한 변수값들은 대수적 방법으로 구한 변수값들과 일치하는 것을 알 수 있다.

한편, 표 3은  $f=0.25$ ,  $s=200$ 일 때 각각의 단부조건에 따른 무차원 고유진동수의 해석결과를 본 연구의 수치미분에 의한 결과와 문헌<sup>[5]</sup>의 결과를 비교하여 나타낸 것이다. 이 표에 보인바와 같이 두 결과들은 서로 매우 우수하게 일치하고 있어 본 연구에서와 같이 구조해석에서 수치미분을 이용하는 경우에도 매우 타당한 해석 결과를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

표 2. 대수적 방법과 수치미분방법을 이용한 변수값들의 비교

변수값	대수적 방법에 의한 값	수치미분에 의한 값	오차(%)
$\phi$	1.373400767	1.373400767	0.00
$\xi$	0.5302980349	0.5302980349	0.00
$\xi'$	-0.3181788494	-0.3181788654	0.00
$\xi''$	-1.8454372069	-1.8454663485	0.00
$a_4$	6749.1847426758	6749.1850832657	0.00
$a_5$	-11245.5602324295	-11245.5601226687	0.00
$a_8$	-0.0000533398	-0.0000533398	0.00

표 3. 무차원 고유진동수의 문헌<sup>[6]</sup>의 결과와 수치미분을 이용한 결과의 비교

단부조건	자료출처	무차원 고유진동수, $C_i$			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
회전-회전	문헌 <sup>[6]</sup>	26.70	64.74	117.66	183.43
	본 연구	26.70	64.74	117.66	183.40
회전-고정	문헌 <sup>[6]</sup>	33.13	74.57	131.80	200.02
	본 연구	33.13	74.57	131.80	199.95
고정-고정	문헌 <sup>[6]</sup>	40.90	85.22	146.97	203.72
	본 연구	40.90	85.22	147.09	209.74

#### 4. 결 론

이 논문은 구조해석에서 수치미분기법의 응용에 관한 연구이다. 구조해석에서 구조물의 선형 또는 변단면이 복잡한 경우에 이들의 미분 값들을 산출하는 것은 매우 힘들고 많은 노력을 필요로 한다. 이에 본 연구에서는 수치미분기법을 수치예제의 미분방정식에 적용하여 결과를 산출하였다. 산출된 결과와 미분방정식에 의한 정확해를 비교한 결과가 아주 잘 일치하여 복잡한 미분 값의 산출에 수치미분이 효율적임을 알 수 있었다.

#### 참 고 문 헌

1. W.L. Li, "Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 237, 2000, pp.709-725
2. S.J. Oh, B.K. Lee and I.W. Lee, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37 No.6, 2000, pp.4871-4891
3. A.W. Al-Khafaji and J.R. Tooley, "Numerical Methods in Engineering Practice" *Holt, Rinehart and Winston, Inc.*, 1986, pp.335-370
4. S.C. Chapra and R.P. Canale, "Numerical Methods for Engineers" *McGraw-Hill Companies, Inc.*, 1998, pp.79-102
5. B.K Lee and J.F. Wilson, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, 1989, pp.75-89