

Pollution error를 이용한 개선된 요소생성 알고리즘

A Modified Mesh Generation Algorithm Using Pollution Error

유형선* 장준환**

Yoo, Hyeong Seon Jang, Jun-Hwan

ABSTRACT

In this paper, we study on a modified mesh generation method based on the pollution error estimate. This method is designed for the control of the pollution error in any patch of elements of interest. It is a well-known fact that the pollution error estimates are much more than the local one. Reliable a posteriori error estimation is possible by controlling the pollution error in the patch through proper design of the mesh outside the patch. This design is possible by equally distributing the pollution error indicators over the mesh outside the patch. The conventional feedback pollution-adaptive mesh generation algorithm needs many iterations. Therefore, the solution time is significant. But we use the remeshing scheme in the proposed method. We will also show that the pollution error reduces less than the local error.

Keywords : pollution error, local error, singularity, modified shape function, r-h method, mesh generation

1. 서론

오차를 추정함에 있어서 작은 영역의 오차에 영향을 미치는 요소는 한정되어, 그 영역을 둘러싼 이웃한 요소들에 국한된다는 기존 전제에 문제가 있는 것을 보고 있다. Pollution error는 기존의 오차 추정자(error estimator)로 계산되지 못한 오차를 보완하기 위하여 정의되었다⁽¹⁾. 기존의 적응 요소 분할 알고리즘이 전체 오차 중 일부에 해당하는 Local error에 의한 것이므로⁽¹⁾, 전체 오차 중 나머지 부분, 즉 pollution error를 이용한 새로운 요소 분할 알고리즘에 대한 연구가 필요하다. 기존의 pollution 적응 요소 분할 알고리즘^{(1),(2)}은 pollution error를 구성하는 각 요소의 값에 따라 그 요소를 균등하게 세분화하는 것이었다. 그러나 이와 같은 요소 분할은 원하는 정확도를 얻기 위해 많은 반복이 필요하다. 특히, 초기 요소 분할이 세밀하지 못할 수록, 반복 횟수는 더 많아지게 된다.

* 정회원 · 인하대학교 자동화공학과 교수

** 인하대학교 자동화공학과 석사과정

기존의 r-h법을 이용하면 반복횟수와 시간을 줄일수 있다. 본 논문에서는 기존의 r-h법을 개선한 알고리즘을 이용하여 특이점에서의 효과를 낮추어 pollution error를 낮추고 반복횟수와 시간을 줄이고자 한다.

2. 오차의 해석

2.1 Local error과 pollution error

오차에 대한 기존의 개념에 새로운 성분을 고려하여 오차를 재 정의하는 과정에서, 새로 도입된 오차 성분을 pollution 오차로 정의하고, 기존의 오차에 대한 정의를 local 오차로 정의한다. 따라서, local 오차는 기존의 오차 추정자로 구하고, pollution 오차의 계산을 위해 추가 계산이 필요하다.

$$e_h|_{\omega_k} = V_1^{\tilde{\omega}_k} + V_2^{\tilde{\omega}_k} \quad (1)$$

여기서, $e_h|_{\omega_k}$ 는 관심 영역 ω_k 의 오차이고, $V_1^{\tilde{\omega}_k}$ 는 local 오차이며, $V_2^{\tilde{\omega}_k}$ 는 pollution 오차이다.

각 오차 성분에 대한 정의식은 다음과 같다.^[2]

$$B_{\Omega}(V_1^{\tilde{\omega}_k}, v) = \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_k \\ \tau \subseteq \tilde{\omega}_k}} \mathcal{F}_{\tau}^{EQ}(v) \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\tau) \quad (2-1)$$

$$B_{\Omega}(V_2^{\tilde{\omega}_k}, v) = \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_k \\ \tau \not\subseteq \tilde{\omega}_k}} \mathcal{F}_{\tau}^{EQ}(v) \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\tau) \quad (2-2)$$

여기서, $H_{\Gamma_0}^1$ 는 해 공간(solution space)이고, $B_{\Omega}(u, v)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$B_{\Omega}(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad (3)$$

요소별 pollution 오차 표시자(error indicator)의 x_i 방향 도함수를 다음과 같이 정의한다.^[6]

$$\mu_{i,\tau}(\bar{X}) \equiv \left| B_{\tau} \left(\hat{e}_{\tau}(u_h), \hat{e}_{\tau} \left(G_{i,h}^{\tilde{\omega}_k}(\bar{X}) \right) \right) \right| \quad (4)$$

여기서 $\mu_{i,\tau}(\bar{X})$ 는 각 요소에서 x_i 방향으로의 pollution 도함수를 추정하는 값이고, \bar{X} 는 구하고자 하는 영역 ω_h 의 중앙 요소의 한 정점(vertex)를 사용한다.

이 pollution 오차 표시자는 관심 영역의 pollution 오차 추정치를 이루는 각 요소에서의 공헌치를 계산하기 위해 정의된 것으로, 주로 적응 요소 분할에서 각 요소에서의 오차 추정을 위해 사용된다.

식(4)를 ZZ 오차 추정자에 적용하기 위해 다음과 같이 정리할 수 있다. 식(3)의 정의식을 이용

하여 적분으로 전개하면,

$$B_r \left(\hat{e}_\tau(u_h), \hat{e}_\tau(\tilde{G}_{i,h}(\bar{X})) \right) = \int_r \nabla \hat{e}_\tau(u_h) \cdot \nabla \hat{e}_\tau(\tilde{G}_{i,h}(\bar{X})) \quad (5)$$

$$M_i(\bar{X}) = \sum_{\substack{r \in T_h \\ r \notin \tilde{\omega}_h}} \mu_{i,r}(\bar{X}) \quad (6)$$

결국 식(6)에서 $M_i(\bar{X})$ 는 $\left| \frac{\partial V_2^{w_h}}{\partial x_i} \right|$ 의 추정치에 해당한다.

$$M(\bar{X}) \equiv \sqrt{(M_1(\bar{X}))^2 + (M_2(\bar{X}))^2} \quad (7)$$

$$M_{\omega_h} = \sqrt{|\omega_h|} M(\bar{X}) \quad (8)$$

2.2 알고리즘

r법은 어느정도까지 유한요소의 오차를 줄일 수 있지만 한 요소의 오차가 줄면 다른 요소의 오차가 늘어나기 때문에 반복실행횟수를 적절한 정도까지만 해야 하고 해의 정도도 어느 이상 높힐 수 있으며 일반적으로 r-h법이 많이 이용되고 있다.

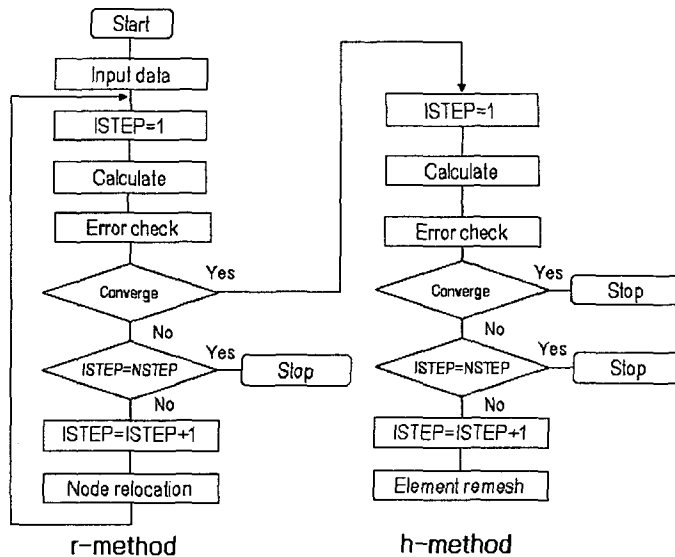


Fig. 1 The flow chart for adaptive mesh refinement

Fig. 1은 오차를 줄이기 위하여 개선된 알고리즘의 흐름도이다. r법에서 오차를 계산하여 허용범위내에 도달하면 h법을 실행하도록 하였다. r법을 적용할 때 경계면에서 노드를 옮겨줄때에는 다음의 식을 이용하여 계산한다.⁽⁹⁾

$$h_{k+1} = h_k \times \left(\frac{\mu_r}{t\% \varepsilon_{\omega_k}} \right)^{-\frac{1}{2\alpha+1}} \quad (9)$$

을 이용한다. 분자는 pollution error, 분모는 local error의 t%이다. 그리고 이동량을 계산하여 8개의 요소의 평균값을 적용하여 이동시킨다. 이렇게 하면 여러번의 r법을 적용시킬 수 있다. h법에서는 r법에서 계산된 결과를 가지고 다시 오차를 계산하여 오차가 큰 부분의 요소를 찾아 요소를 나누고 오차를 균일하게 분포시킴과 동시에 유한요소의 해의 정도를 증가시킬 수 있도록 하였다. r법과 달리 요소의 수를 증대시키기 때문에 이 과정을 통하면 r법과 비교하여 눈에 띄는 향상을 가져올 수 있다.

4. 수치에의 적용 및 결과분석

초기 메시는 직각이등변 삼각형의 mesh를 만들고 육각형의 24개 삼각형 요소의 한 부분의 오차를 ZZ-SPR⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾로 검출하여 local error과 pollution error를 계산한다.

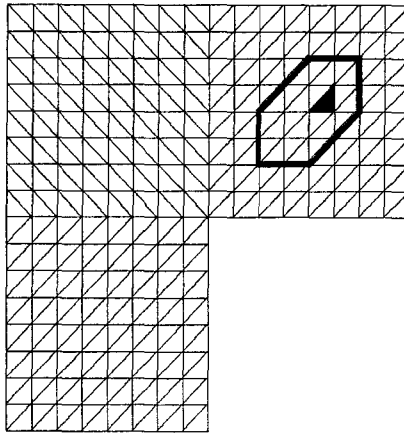


Fig. 2 The initial mesh of the numerical model

육각형내의 24개의 요소는 언제나 직각이등변삼각형을 유지한다. 이는 관심영역에서 각 단계 값을 정확하게 비교하기 위함이다. Table. 1의 값들은 r법을 적용하지 않고 h법만을 이용하여 local error과 pollution error를 계산한 값이다. 반복은 총 15번수행되었고 local effectivity가 1에 수렴함은 더 이상의 오차추정이 필요없다는 것을 의미한다. 반복횟수가 많은 것으로 보아 요소의 수를 증대시키는 것은 효율적인 방법이 될 수 없다는 것을 의미한다.

Table. 1 The result of each step for general shape function

Iteration	Local error 추정치 × E-05	Local Effectivity	Pollution error 추정치 × E-05	Pollution Factor
0	7.43	0.032	64.70	8.98
1	7.72	0.052	44.20	5.70
3	8.09	0.14	20.30	2.50
5	8.11	0.33	10.00	1.24
7	7.99	0.67	5.43	0.68
9	8.01	0.97	3.88	0.49
11	8.02	1.06	3.34	0.42
13	8.02	1.08	3.14	0.39
15	8.02	1.08	3.06	0.38

Local Effectivity는 추정된 오차와 실제 오차의 비로 나타내며 Pollution Factor는 pollution error와 local error의 비이다.

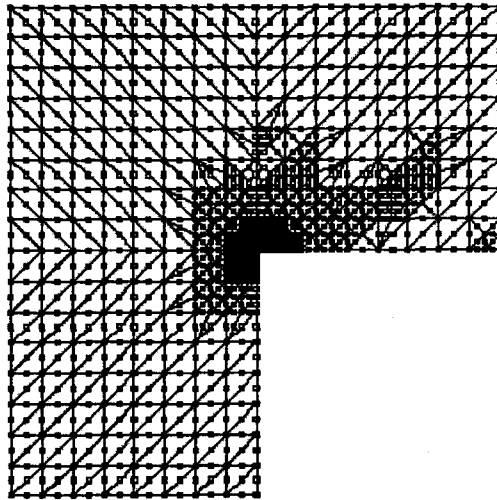


Fig.3 The mesh using h-method after the 15st step (E=1242, N=2597)

Fig. 3은 초기메시에서 h법을 적용하여 오차가 큰 부분의 요소들을 나누는 것이다.⁽⁹⁾ 반복이 어느정도 진행되면 특이점 주변요소의 분할만 발생되기 때문에 그림상의 구별이 힘들다. 하지만 특이점 부분을 확대하면 요소 분할이 훨씬 더 세밀하게 분할되어 있음을 확인할 수 있다. 결국 이를 통해 기존의 오차추정자로 계산하는 local error 이든 pollution error 이든 모두 특이점으로부터 받는 영향이 크다는 것을 알 수 있다. local error는 총 15번의 반복을 통해 수렴되었고 이는 r-h 알고리즘과 비교하여 단순히 h법으로 요소를 나누는 것은 효율적이지 못하다는 것을 의미한다.

Table. 2 The result of each step for r-h algorithm

Iteration	Local error 추정치 × E-05	Local Effectivity	Pollution error 추정치 × E-05	Pollution Factor
1	8.29	0.26	21.9	2.64
2	8.33	0.61	7.00	0.84
3	8.33	0.66	6.09	0.73
4	8.32	0.99	2.88	0.35

Table.2는 r-h 알고리즘을 2번 써서 얻어졌다. 요소를 나누는 h법을 쓰기전에 단계별로 r법을 쓰면 반복횟수와 시간을 줄일 수 있다. 4번의 반복으로 효능지수(local effectivity)을 1에 가깝게 수렴하였고 전체 error에서 차지하는 pollution error의 비율인 pollution factor을 극히 적게 가질수 있다.

Table. 3 The result of each step for improved r-h algorithm

Iteration	Local error 추정치 × E-05	Local Effectivity	Pollution error 추정치 × E-05	Pollution Factor
1	7.71	0.045	33.80	4.33
2	8.15	0.14	18.60	2.28
3	8.15	0.15	12.50	1.53
4	8.32	0.46	831	1.00
5	8.32	0.99	2.61	0.29

r-h 알고리즘을 이용할때보다 반복횟수는 한번 더 늘어났지만 계산시간과 pollution factor을 줄일 수 있었다. 첫 번째 반복, 마지막 반복일 때 h법을 쓰고 2, 3, 4 단계에서는 r법을 적용하였다. 제안된 알고리즘으로 r법을 3번 반복하면 r법만으로 계산할 수 있는 임계치에 도달한다. 노드의 이동량을 각 요소별 평균치로 이동하기 때문에 r법을 여러번 사용할 수 있었고 마지막에 h법을 씌으로써 급격한 효율의 향상을 가져온다. pollution error의 추정치가 2.61×10^{-5} 이 나오고 미세하지만 r-h법의 값보다 작게 나온다. r-h법을 쓴 4번째 단계의 요소 생성을 보면 요소의 수는 1696, 노드의 수는 3493이 나온다. 향상된 알고리즘의 마지막 단계에서는 요소의 수 1461, 노드의 수 3427이 나오며 향상된 알고리즘을 쓰면 결국 적은 요소와 노드의 수로 더 나은 결과를 낼 수 있다.

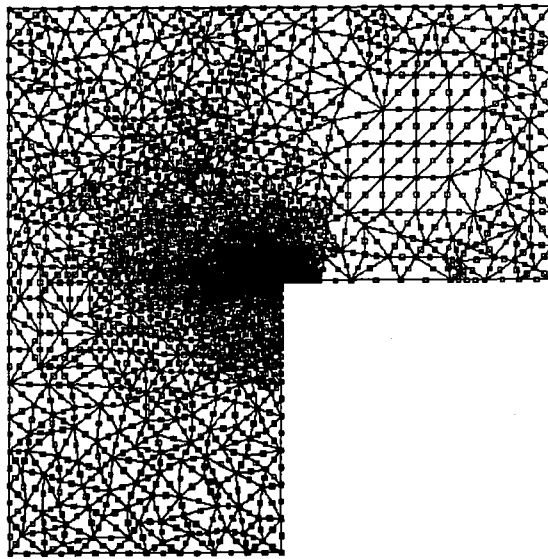


Fig.4 The mesh after the 5st step of the adaptive algorithm (E=1461, N=3427)

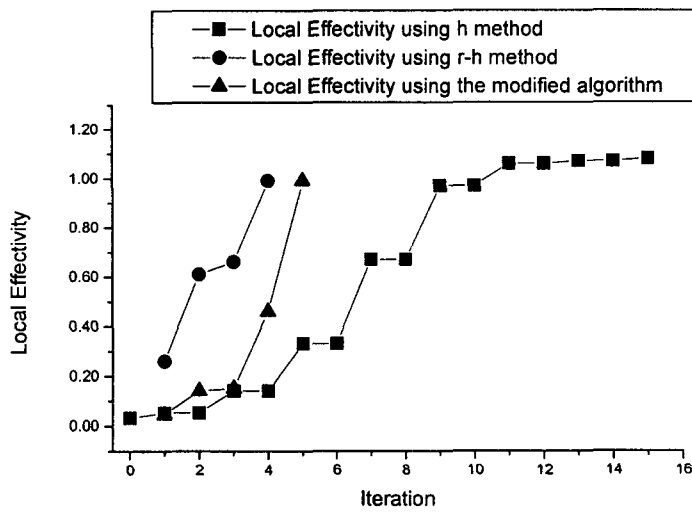


Fig. 5 The local effectivity for mesh after each step

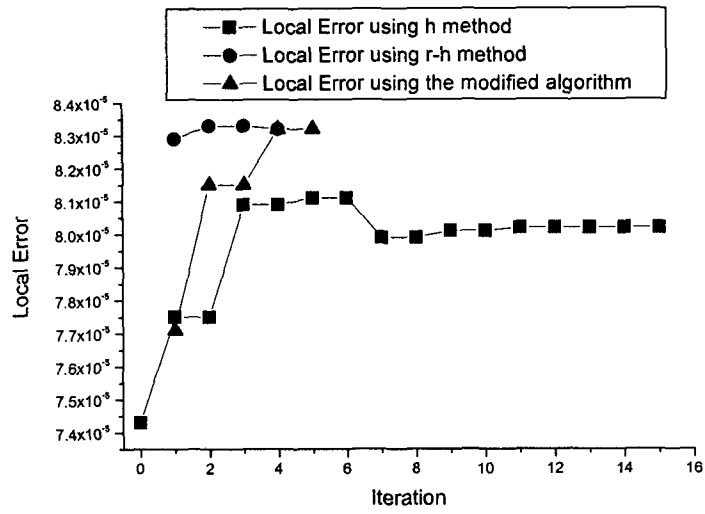


Fig. 6 The local error for the mesh after each step

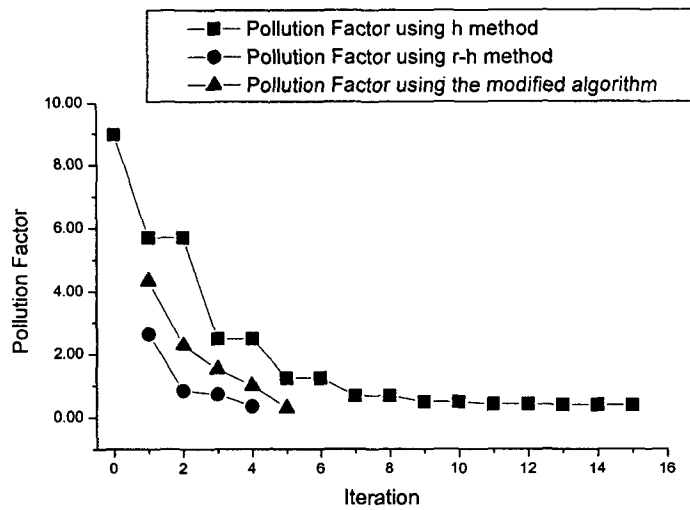


Fig. 7 The pollution factor for the mesh after each step

결론

본 논문에서는 오차가 해당요소에 이웃하지 않은 다수의 다른 요소들로부터 영향을 고려하기 위해 pollution error의 개념을 도입하여 생성된 mesh의 수를 증대시켜 오차를 줄여나가는 h 법과 노드의 위치를 이동시키는 r법을 복합적으로 사용하여 h법만 사용하여 오차를 계산한 값보다 나은 효율을 가질 수 있도록 하였고 r-h 알고리즘을 개선하여 더 적은 노드의 수와 요

소의 수를 가질 수 있도록 개선하였다. 단지 반복횟수만 기존 알고리즘보다 한번 더 나왔지만 실제 계산시간은 r-h 알고리즘보다 낮게 나왔다. 결국 pollution factor은 0.29가 나오며 전체 오차에 미치는 영향을 극히 줄일 수 있었다. 향상된 알고리즘을 사용하면 여러번의 반복을 하지 않고 유한요소의 해와 실제해를 근접할 수 있다.

참고문헌

1. Ivo. Babuska , T. Strouboulis, A. Mathur and C.S. Upadhyay, Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of a-posteriori error estimates, Finite Elements Anal, Des., 17 ,1994, pp273-321
2. Ivo. Babuska , T. Strouboulis, C.S. Upadhyay and S.K. Gangaraj, A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h-version of the finite element method, Int. J. Numer. Method Engrg., 38, 1995, pp4207-4235
3. Ivo. Babuska, T. Strouboulis, S.K. Gangaraj, Practical aspects of a-posteriori estimation and adaptive control of the pollution error for reliable finite element analysis, 1996, <http://yoyodyne.tamu.edu/research/pollution/index.html>
4. Ivo. Babuska, T. Strouboulis, S.K. Gangaraj and C.S. Upadhyay, Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of the recovered derivatives, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.,140, 1997, pp1-37
5. Zienkiewicz, and J.Z.Zhu, The Superconvergent Patch Recovery and a posteriori estimators. Part1. The recovery techniques, Int. Numer. Methods Engrg., 33, 1992, pp1331-1364
6. O.C. Zienkiewicz, and J.Z.Zhu, The Superconvergent Patch Recovery and a posteriori estimators. Part2. Error estimates and adaptivity, Int. J. Numer. Methods Engrg., 33, 1992, pp1365-1382
7. O.C. Zienkiewicz, and J.Z.Zhu, The Superconvergent Patch Recovery(SPR) and adaptive finite element refinement, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. ,101 1992, pp207-224
8. O.C. Zienkiewicz, J.Z.Zhu and J. Wu, Superconvergent Patch Recovery techniques Some further tests, Comm. Numer. Methods Engrg., Vol. 9, 1993, pp251-258
9. 유형선, 편수법, "Pollution 오차를 이용한 요소생성에 관한 연구", 한국철도학회 논문집, 제2권 제3호, 1999, pp46-53