

특이기저함수를 사용한 개선된 Mesh-Free 균열해석기법에 대한 파라메타 연구

Parametric Study on an Improved Mesh-Free Crack Analysis Technique Using Singular Basis Function

이 상 호*
Lee, Sang-Ho

윤 영 철**
Yoon, Young-Cheol

ABSTRACT

Previously, an improved crack analysis technique based on Element-Free Galerkin Method (EFGM) which includes a discontinuity function and a singular basis function was presented. The technique needs neither addition of nodes nor modification of the model, but it shows some dependency on the formulation and modeling parameters such as the class of weight function, the size of compact support, dilation parameter and the range controlled by the singular basis function. For those parameters, a parametric study was performed on the calculation of a discrete error and then, a guideline for the choice of adequate parameters in the technique was proposed.

1. 서 론

이동최소제곱법에 근간을 두고 요소의 connectivity를 이용하지 않고 절점들 간의 상관관계를 이용하여 수치해를 계산하는 Mesh-Free기법 중에서 Belytschko 등⁽¹⁾이 제안한 Element-Free Galerkin (EFG) 법은 그 적용성을 주로 균열전파문제에 두고 다양한 기법개발에 활발한 성과를 보이고 있다. 특히 기본적인 선형기저함수로는 균열선단의 특이성을 정확히 묘사할 수 없기 때문에 근사변위함수에 특이성을 포함시켜 보려는 시도가 계속되어 왔다. Fleming 등⁽²⁾은 이미 알려진 균열주변 변위장에 대한 이론해로부터 추출한 기저함수를 이용하여 EFG 근사함수와 다항기저함수를 확장할 수 있는 몇 가지 방법들을 제안하는 한편, 균열선단 주변에서 EFG 형상함수를 부드럽게 처리해주는 기법을 제안한 바 있다. 또한 Belytschko와 Fleming⁽³⁾도 같은 방법으로 EFG 근사함수를 확장하여 기존의 EFG법과 조합하는 기법을 제안하였는데 이 방법은 기존의 EFG법에서 정확하게 잡지 못하던 균열선단의 특이성을 성공적으로 잡아낼 수 있다는 장점을 부각시켰지만, 계방정식을 구성하는 과정의 복잡성, 상당한 수준으로 추가된 자유도로 인한 계산시간의 증가, 해석영역 전체에 대해 확장함수를 적용해야 하는 불편함 등이 단점으로 지적될 수 있었다. 또한, 최근에는 전형적인 유한요소법의 근사변위함수에 균열선단의 특이성을 표현할 수 있는 확장함수와 균열면의 불

* 정회원, 연세대학교 사회환경건축공학부 토목공학전공 부교수

** 정회원, 연세대학교 사회환경건축공학부 토목공학전공 박사과정

연속성을 반영시켜 줄 수 있는 불연속함수를 추가적으로 고려하여 요소망의 재구성 없이 균열전파현상을 해석할 수 있는 'X-FEM'⁽⁴⁾이라 불리는 기법이 제안되기도 했다.

최근에 이상호와 윤영철⁽⁵⁾은 이와 유사한 근사함수확장방법을 이용하여 기존의 EFG 근사함수 확장기법을 개선함으로써 균열선단의 불연속성과 특이성을 성공적으로 표현하면서도 요소망을 재구성하지 않을 뿐만 아니라 자유도의 증가를 최소화할 수 있는 기법을 제안한 바 있다. 그러나 이 기법에서는 수치해석 결과가 가중함수, compact support의 크기, 특이기지함수의 적용범위 등과 같은 해석계수들의 값에 다소 의존하는 경향을 나타냈다. 이에 본 연구에서는 이상호와 윤영철⁽⁵⁾이 제시한 특이기지함수를 이용하여 개선한 Mesh-Free 균열해석기법을 균열문제를 위한 patch 시험문제에 적용하여 이산오차평가를 바탕으로 각 해석계수에 대한 파라메타 연구를 수행하여 해석계수의 선택에 대한 guide line을 제시하고자 한다.

2. 특이기지함수를 이용하여 개선된 EFG 균열해석기법의 개요

2.1. 이동최소제곱근사법에 의한 근사변위함수

Mesh-Free기법 중 하나인 EFG법은 이동최소제곱에 의한 근사법, 지배방정식에 대한 약형식과 해석대상에 규정된 필수경계조건, 그리고 재료에 대한 구성방정식을 중요한 요소로 고려한다. EFG법에서 기준점 x 를 중심으로 이웃한 절점들을 포함하는 영향영역 내에서의 근사함수 $u^h(x)$ 는 이동최소제곱법에 의해서 형상함수 $S_I(x)$ 와 절점해 u_I 를 이용하여 식 (1a)와 같이 근사화될 수 있다.⁽¹⁾

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^{n_N} S_I(x) u_I \quad (1a)$$

$$S_I(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) (A^{-1}(x) C(x))_{jI} \quad (1b)$$

여기서 $A(x) = \sum_{I=1}^{n_N} w_I(x) p(x_I) p^T(x_I)$, $C(x) = [w_I(x) p(x_I), \dots, w_{n_N}(x) p(x_{n_N})]$ 이고, $p^T(x)$ 는 임의의 차수를 갖는 다항기지함수, m 은 다항기지함수의 항개수, n_N 은 영향영역 내에 포함된 절점의 개수를 의미한다.

한편, 표 1에는 본 연구에서 대상으로 하는 두 가지 지수함수 형태의 가중함수를 제시하였다. 가중함수는 임의의 기준점의 영향영역 내에 포함된 절점들의 거리에 따른 상대적인 가중치와 형상함수의 모양을 결정하며, 이때 $d_I = \sqrt{(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2}$ 는 기준점에서 대상절점까지의 거리, d_{max} 는 영향영역의 크기, α 는 가중함수의 팽창계수를 각각 의미한다. 특히, 이동최소제곱 근사에 포함될 절점의 개수를 결정하는 compact support의 크기를 가리키는 d_{max} 와 지수형 가중함수의 형상을 조절하는 팽창계수 α 를 주목할 필요가 있다. 개선된 EFG 균열해석기법은 특이기지함수의 추가로 인해 형상함수의 미분시 특이성을 나타내므로 가중함수에 더 민감하게 된다.

표 1. 지수함수 형태의 가중함수

Classification	Weight function	
Simple exponential form	$w(d_I) = \begin{cases} \exp(-\{(d_I/d_{\max})/\alpha\}^2) & d_I \leq d_{\max} \\ 0 & d_I > d_{\max} \end{cases}$	
Gaussian exponential form	$w(d_I) = \begin{cases} \frac{\exp\{-(d_I/\alpha)^2\} - \exp\{-(d_{\max}/\alpha)^2\}}{1 - \exp\{-(d_{\max}/\alpha)^2\}} & d_I \leq d_{\max} \\ 0 & d_I > d_{\max} \end{cases}$	

2.2. 불연속함수를 이용한 균열면의 모형화

개선된 EFG 균열해석기법에서는 균열의 불연속성을 표현하기 위해 불연속함수를 도입하여 형상함수 구성시 균열반대편의 절점들의 영향을 배제한다. 임의의 깎여진 균열선분의 각(θ_C)과 이 균열선분이 기준점에 대해 이루는 각(θ_α)과 이웃절점들과 이루는 각(θ_β)의 관계로부터 식 (2)과 같은 두 개의 부호함수(sign function)를 정의할 수 있다.

$$G(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } \theta_\alpha/\theta_C \geq 1 \\ -1 & \text{for } \theta_\alpha/\theta_C < 1 \end{cases} \quad \text{그리고,} \quad H(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } \theta_\beta/\theta_C \geq 1 \\ -1 & \text{for } \theta_\beta/\theta_C < 1 \end{cases} \quad (2)$$

이와 같은 두 개의 부호함수들의 곱으로부터 식 (3)와 같은 불연속함수를 정의한다.

$$I(\theta) = G(\theta) \cdot H(\theta) \quad (3)$$

불연속함수 $I(\theta)$ 가 1이면 $x_m \in I^{nbr}$ 이고, $I(\theta)$ 가 -1이면 $x_m \notin I^{nbr}$ 인데, 이것은 불연속함수의 값이 1이면 해당절점 x_m 이 균열면을 중심으로 기준점과 같은 편에 위치하기 때문에 형상함수의 구성에 포함시키고 -1인 경우에는 제외시킨다는 의미이다.

2.3. 확장근사함수와 개선된 EFG 균열해석기법의 계방정식

균열선단주변에 대해 알려진 이론해로부터 추출한 특이기저함수 $g(x)$ 는 추가적인 절점미지계수를 이용하여 균열주변의 특이응력을 보간하는 보조형상함수의 역할을 하며 식 (4)와 같이 정의한다.

$$g(x) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (4)$$

여기서 r 은 균열선단에서의 거리, θ 는 균열에 대한 각을 의미한다. 그림 1에는 균열선단을 중심으로 하는 특이기저함수의 각 성분들에 대한 형상을 도시하였는데 특히 (a)의 $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ 는 균열의 불연속면을 표현하며 나머지 성분들은 특이해의 정도를 향상시켜 주는 역할을 한다.

식 (5)는 확장된 EFG 근사함수를 나타내는데 특이기저함수를 포함한 확장함미 기존의 EFG 근

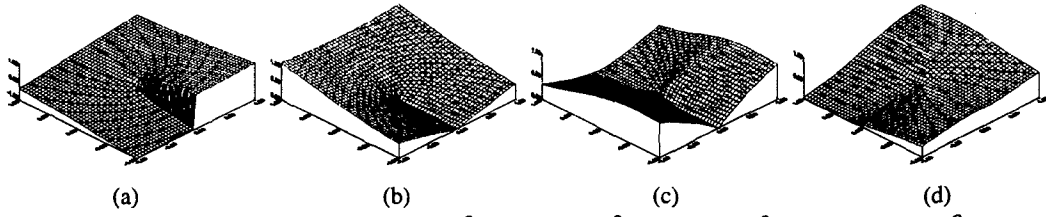


그림 1 특이기저함수의 형상 (a) $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ (b) $\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}$ (c) $\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta$ (d) $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta$

사함수에 추가되어 균열선단 주변의 절점들에 적용함으로써 특이성을 표현할 수 있게 해준다.

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^{n_N} S_I u_I + \sum_{I=1}^{n_E} \sum_{k=1}^4 \bar{S}_I g_k(x) a_{Ik} \quad (5)$$

여기서, S_I 와 n_N 는 각각 기존의 EFG 형상함수와 영향영역 내에 포함된 이웃한 모든 절점들의 개수이며, \bar{S}_I , n_E , 그리고 a_{Ik} 는 각각 확장된 EFG형상함수와 영향영역에 포함된 절점 중에서 확장된 형상함수를 적용하는 균열선단 근처의 절점들의 개수, 그리고 확장함수와 연관된 절점해이다. 확장함수의 적용은 절점단위에서 이루어지며 이것은 대부분의 절점들이 확장함수를 적용할 필요가 없는 영역인 것을 감안할 때 매우 고무적이며 식 (5)의 두번째 항에서 보는 것과 같이 Partition of Unity 개념⁽⁶⁾이 적용된 것을 확인할 수 있다.

특이기저함수를 적용한 EFG 균열해석기법의 최종적인 계방정식은 식 (6a)와 같으며 계방정식의 각 성분들은 식 (6b)~(6f)와 같이 계산될 수 있다.⁽⁶⁾

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{II} \\ \mathbf{K}_{II}^T & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_I \\ \tilde{\mathbf{f}}_{Ik} \end{Bmatrix} \quad (6a)$$

$$\mathbf{K}_{II} = \int_{\Omega} \mathbf{T}_I^T \mathbf{D} \mathbf{T}_I d\Omega \quad (6b)$$

$$\mathbf{K}_{II} = \int_{\Omega} \mathbf{T}_I^T \mathbf{D} (\bar{\mathbf{T}}_J g_l + \bar{\mathbf{S}}_J h_l) d\Omega, \quad l=1, \dots, 4 \quad (6c)$$

$$\mathbf{K}_{II} = \int_{\Omega} (g_k^T \bar{\mathbf{T}}_I^T + h_k^T \bar{\mathbf{S}}_I^T) \mathbf{D} (\bar{\mathbf{T}}_J g_l + \bar{\mathbf{S}}_J h_l) d\Omega, \quad k, l=1, \dots, 4 \quad (6d)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_I = \int_{\Omega} S_I^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} S_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6e)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{Ik} = \int_{\Omega} g_k^T \bar{\mathbf{S}}_I^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} g_k^T \bar{\mathbf{S}}_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad k=1, \dots, 4 \quad (6f)$$

3. 균열문제의 patch 시험에 대한 수치오차 평가

3.1. 균열문제를 위한 patch 시험의 개요

이론해를 알고 있는 모드 I 균열문제에 대한 변위를 이용하여 해석모형의 경계에 이론해의 변위값을 미리 규정하고 응력해석을 수행하여 계산된 내부의 응력값을 이론해와 비교하였다. 변위의

규정은 벌칙기법(Penalty method)을 이용하여 규정해 주었다.⁽⁵⁾ 해석모형은 그림 2와 같이 균열길이는 a 이고, 해석모형의 가로, 세로의 길이가 각각 $2a$ 이고, 균열선단은 좌표 $(1.0a, 1.0a)$ 에 위치한다. 응력확대계수는 단위값 $1 \text{ psi}\sqrt{\text{in}}$ 을 임의로 미리 규정하였다. 균열선단에 표시된 원은 확장된 근사 변위함수가 적용될 영역을 나타낸다. 균열선단이 영향영역내에 포함되는 경우에는 부드러운 해를 얻기 위해 형상함수를 smoothing해주는 기법^{(2),(3)}을 적용하였으며, 응력확대계수의 산정은 J-적분을 영역적분의 형태로 변환한 M-적분기법⁽⁷⁾을 이용하였다.

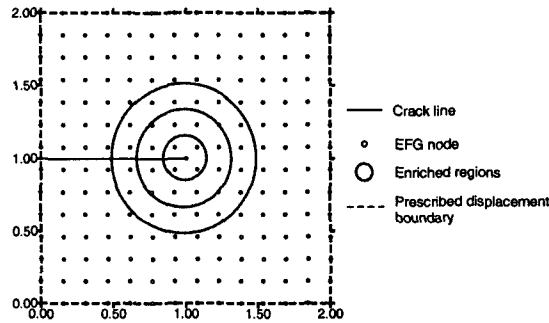


그림 2 균열문제의 patch 시험을 위한 모형

3.2. 수치오차의 정의

일반적인 Euclidean 오차에 대한 정의로부터 식 (7)과 같이 절점이나 임의로 분포된 지점들에 대한 값을 바탕으로 하는 정규화된 이산오차를 정의할 수 있다. 이러한 이산오차는 실제로 변위나 응력에 대해 발생한 오차의 정규화된 산술평균의 의미를 갖고 있어 수치오차의 상대적인 크기를 손쉽게 파악할 수 있다.

$$\|e_{disc}\| = \frac{1}{|f_{max}|} \sqrt{\frac{1}{N_{tot}} \sum_{i=1}^{N_{tot}} (f_{exac}^{(i)} - f_{num}^{(i)})^2} \quad (7)$$

여기서 f_{max} 는 계산된 값 중 최대값이며, N_{tot} 는 오차를 계산한 지점의 개수, 그리고 f_{exac} 과 f_{num} 은 각각 이론해와 수치해를 나타낸다. 이와 같이 정규화된 이산오차를 통하여 가중함수를 정의하는데 필요한 해석계수들과 균열의 특이성을 묘사하기 위해 도입한 특이저함수의 적용범위 등이 해석결과에 미치는 영향을 분석하였다.

4. 이산오차에 의한 해석계수의 영향 평가

4.1. 영향영역 반경의 크기와 팽창계수의 영향

영향영역의 크기는 형상함수의 구성서 절점개수와 $A(x)$ 행렬의 크기를 결정하여 형상함수의 계산시간을 좌우하는데, 본 연구에서는 단순지수함수(Simple exponential) 형태와 가우스지수함수

(Gaussian exponential) 형태의 가중함수에 대해 그 영향을 평가하였다. 확장함수 적용영역의 크기의 영향을 조사하는 경우를 제외하고 특이기저함수를 적용하는 절점의 개수는 균열선단에서 가장 가까운 절점 5개로 유지하였고, 균열선단에서 형상함수에 smoothness기법을 적용하였다.

그림 3에는 단순가중함수에 대해 절점간의 거리(h)로 정규화된 절점의 영향영역의 크기와 팽창계수에 대한 이산오차를 도시하였다. 이 경우 영향영역의 크기를 $A(x)$ 행렬의 계산이 가능한 범위 내에서 가능한 한 작게 사용하는 것이 좋고, 또한 d_{max} 가 작을 때에 팽창계수의 영향을 적게 받는 것을 알 수 있었는데, 이것은 영향영역의 크기와 팽창계수의 값이 작을수록 오차의 증가속도가 작아진다는 의미이다. 가우스가중함수를 사용하는 경우에는 함수의 특성상 d_{max} 의 영향에 비해 팽창계수의 영향을 상대적으로 많이 받기 때문에 그림 4에서 보는 바와 같이 단순가중함수에 비해 발생하는 오차의 크기도 작고 더 안정적인 결과를 보여준다. 안정적인 해를 얻을 수 있는 팽창계수의 가용범위도 단순가중함수에 비해 두배 정도 컸는데 이것은 충분히 작은 팽창계수를 선택하면 d_{max} 가 단순가중함수에 비해 두 배 이상 커져도 해가 안정적이라는 의미이다. 결론적으로 d_{max} 를 너무 크게 취하지 않는 동시에 팽창계수의 값을 단순가중함수는 약 0.25, 가우스가중함수는 약 0.5 보다는 작게 취하는 것이 안정적이고 정도 높은 해를 보장해 준다는 것을 알 수 있다.

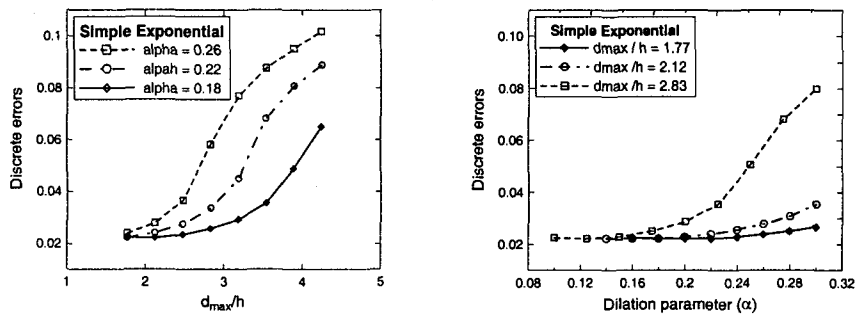


그림 3 영향영역과 팽창계수에 따른 이산오차 (단순가중함수)

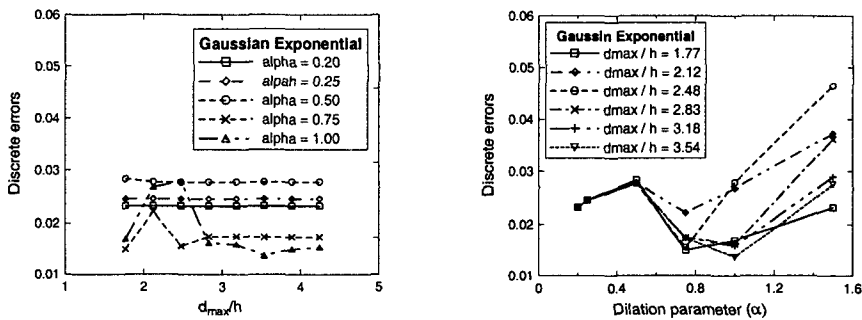


그림 4 영향영역과 팽창계수에 따른 이산오차 (가우스가중함수)

4.2. 특이기저함수를 적용하는 절점개수의 영향

균열선단 주변에서 특이성을 묘사할 수 있도록 수정된 형상함수를 적용하는 절점개수는 수치

해의 정도에 영향을 미친다. 이론적으로는 특이기저함수를 많은 절점에 대해 적용하는 것이 좋은 결과를 주겠지만, 수치계산에 의한 오차의 발생과 해석의 효율성을 생각할 때에는 적절한 개수의 절점을 선택하는 것이 중요하고, 정확도를 유지하면서 가능한 한 적은 개수의 절점에 적용하는 것이 계산의 효율성을 크게 향상시킨다. 본 절에서는 다양한 영향영역 크기와 팽창계수에 대해 특이기저함수를 적용하는 절점개수에 따라 발생하는 이산오차를 산정하였다. 계산시 모두 smoothness 기법을 적용하였으며, 영향영역의 크기를 변화시키는 경우에는 팽창계수를 0.22로, 팽창계수를 변화시키는 경우에는 d_{max}/h 를 2.12로 고정하였다.

단순가중함수의 경우에는 그림 5와 같이 특이기저함수를 더 많은 절점에 적용할수록 가시적인 이산오차는 감소하지만 오차가 감소하는 비율은 오히려 크게 줄어들어 어느 범위 이후에는 거의 일정해진다. 가우스가중함수의 경우에는 그림 6에서 보듯이 특이기저함수를 적용한 절점개수가 증가할 때 d_{max} 에 대해서는 거의 영향을 받지 않지만, 팽창계수에 대해서는 그 값이 작을수록 오차의 변화가 적었다. 결과적으로 특이기저함수를 적용하는 절점개수의 증가는 계산시간을 매우 큰 비율로 증가시키기 때문에 그 개수를 10개 이하로 제한할 것을 권장한다.

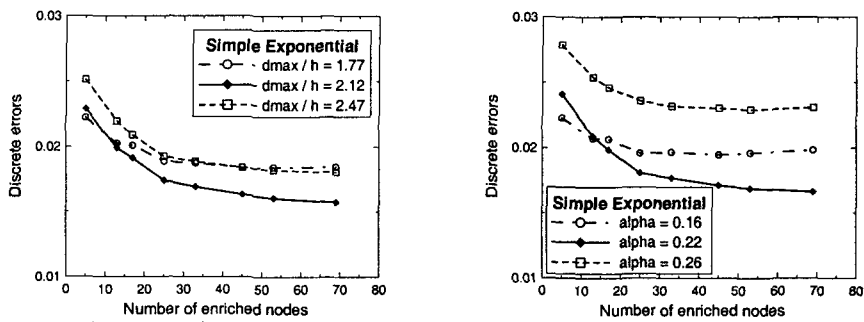


그림 5 확장함수를 적용한 절점개수에 따른 이산오차 (단순가중함수)

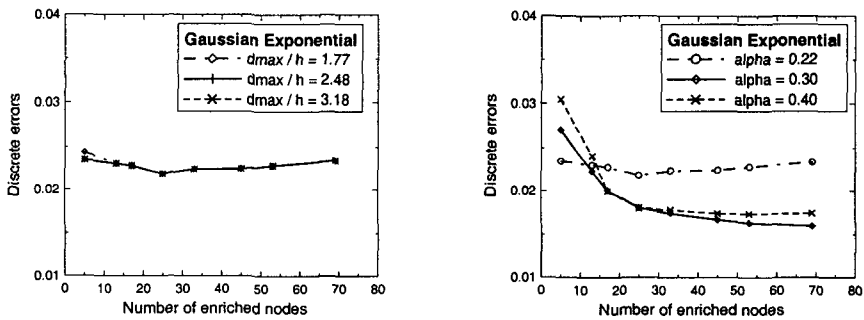


그림 6 확장함수를 적용한 절점개수에 따른 이산오차 (가우스가중함수)

5. 결론

본 연구에서는 기존의 EFG법의 근사함수에 특이기저함수를 포함하는 확장항을 추가하여 균열

선단의 특이성을 모형화할 수 있는 개선된 EFG 균열해석기법에서 해석에 사용하는 EFG 해석계수들에 대한 오차의 거동을 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 단순가중합수와 가우스가중합수인 경우에 모두 영향영역의 크기와 팽창계수의 값이 작을수록 오차의 증가율이 작아진다.
- 2) 영향영역의 크기와 팽창계수의 영향을 고려할 때, 가우스가중합수를 사용하면 단순가중합수에 비해 d_{max} 의 영향을 거의 받지 않으며 안정적인 해를 얻을 수 있는 팽창계수의 가용범위도 두 배 정도 커지지만, 단순가중합수의 경우에는 대략 0.25, 그리고 가우스가중합수의 경우에는 대략 0.5보다 작은 값을 사용할 것을 권장한다.
- 3) 특이기저함수를 적용하는 절점개수를 고려할 때, 단순가중합수를 사용하는 경우에 그 적용개수가 증가할수록 가시적인 이산오차는 감소하지만 오차가 감소하는 비율은 오히려 크게 줄어들어 일정해지며, 가우스가중합수의 경우에는 적용개수의 변화에 대해 d_{max} 의 영향은 거의 받지 않고 팽창계수는 작게 해주어야 안정적인 결과를 주었으며 두가지 가중합수에 대해 그 적용개수를 10개 이하로 제한할 것을 권장한다.

감사의 글

본 연구는 한국과학기술평가원(KISTEP)의 연구비지원으로 이루어졌으며 이에 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element-free Galerkin methods," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, 1994, pp.229-256.
2. Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T., "Enrichment Element-Free Galerkin methods for crack tip fields," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, 1997, pp.1483-1504.
3. Belytschko, T. and Fleming, M., "Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method," *Computer and Structures*, Vol.71, 1999, pp.173-195.
4. Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T., "A finite element method for crack growth without remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, 1999, pp.131-150.
5. 이상호, 윤영철, "특이기저함수를 이용하여 개선한 Mesh-free 균열해석기법", 한국전산구조공학회 논문집, 제 14 권 제 3 호, 2001, pp.381-390.
6. Melenk, J. M. and Babuška, I., "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.139, 1996, pp.289-314.
7. Moran, B. and Shih C. F., "Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance" *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.27, 1987, pp.615-641.