한국공작기계학회 2001년도 추계학술대회 논문집 pp.111~116

# 평면 2자유도 모델을 이용한 LMG 상에서 이동되는 Cross Head의 사행동 해석

최영휴*, 김성훈**, 정택수***, 장은성***

# Analysis of the Snake Motion of a Machine Tool Cross Head Assembly Travelling on Parallel Linear Motion Guides Using a Planar 2-D.O.F. Model

Young-Hyu Choi*, Soung-Hun Kim**,
Taek-Soo Jung***, and Eun-Seong Chang***

*창원대학교 기계설계공학과, **창원대학교 대학원 기계설계공학과, ***(주)두산 기계BG

## Abstract

In this paper, a simple 2 D.O.F. planar motion model is proposed in order to analyze the snake motion of a machining center cross head assembly, that is travelling on linear guide rails. In the proposed mathematical model, the friction between head and guide ways is neglected, and also the support structures including guide rails, rear- and side-panels of the machining center are assumed to be rigid. The equations of motion of the proposed model are derived and successfully solved to determine vibration responses of the head assembly due to some applied traction forces.

**Key words** : Machining Center, Cross Head Assembly, Snake Motion, Planar Motion Model

## 1. 서론

다음의 Fig.1은 수직형 머시닝 센터(Vertical machining center)의 개략도이다. 이 머시닝 센터의 헤드 어셈블리(Head assembly)의 작동 원리를 보면, 쓰러스트 모터(Thrust motor) 구동에 의해 볼 스크류(Ball screw)가 회전하면 헤드 어셈블리는 LM(Linear Motion) 가이드 상에서 스크류 축 방향(Y방향)으로 이송된다. 이러한 이송운동 과정에서 헤드 어셈블리에 작용하는 힘과 모멘트의 불균형이 발생하여 헤드가 사행동(蛇行動)을 일으키게 된다. 이송계의 사행동 현상은 공작기계의 정밀도, 생산성, 수명단축을 포함한 공작기계의 성능과 품질 및 신뢰성 등 여러 면에서 악영향을 미치게 된다.

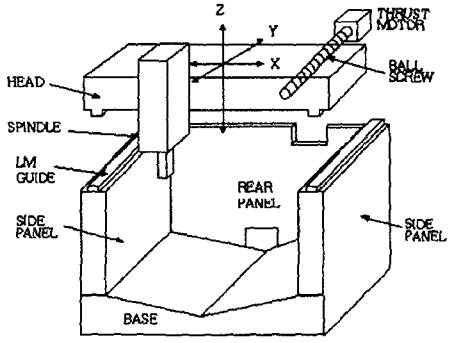


Fig. 1 Schematic of a vertical M/C

본 연구에서는 사행동 해석을 위한 2자유도 평면운동 모델을 제안하고, 운동방정식을 유도하여 이론적으로 사행동 현상을 규명하고자 한다.

## 2. 이론해석

### 2.1 수학적 모델링

추력을 받으면서 가이드 웨이(Guide way)를 따라 Y축 방향으로 이송되는 헤드 어셈블리의

사행동을 아래 Fig. 2와 같이 수학적으로 모델링 하였다. 여기서 헤드 어셈블리의 이송시 사행동은 2차원 평면 운동으로 이상화 하였으며, LM 블록(LM block)은 선형 스프링으로 간주하였다.

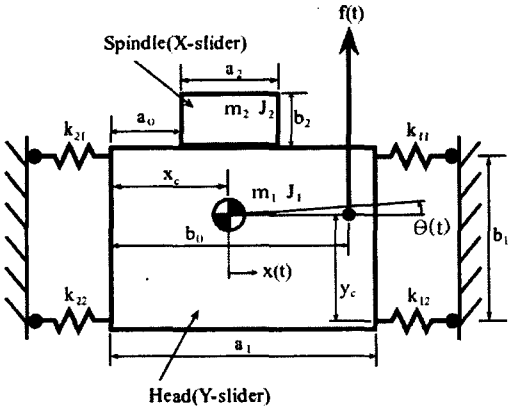


Fig. 2 A planar 2-dof head snake motion model

이밖에도 다음과 같은 가정을 하였다.

(1) 가이드 레일과 LM 블록 사이의 마찰은 무시할 수 있다.

(2) 가이드 레일과 LM 블록은 한 점에서 구름접촉(Rolling contact)을 한다.

(3) 이송운동 중에 LM 가이드와 LM 가이드를 지지하고 있는 구조물의 변형이나 구조진동은 미소하고, 따라서 일체의 구조물은 강체(剛體)라고 가정한다.

위 모델링에서 $f(t)$는 헤드 어셈블리에 작용되는 이송력이다. 헤드의 운동자유도는 Y축 방향의 병진운동과 Z축에 대한 회전운동으로 설정하였다. 실제 수직형 머시닝센터는 크로스 헤드, 즉 Y-Slide(Fig. 2에서 $m_1$)에 스핀들 헤드(Fig. 2에서 $m_2$)가 X축 방향으로 이송되도록 설계되어 있는데 모델링에서도 이를 고려하였다.

2.2 운동방정식

위 Fig. 2의 2자유도차 평면운동 헤드 사행동 해석 모델에서 스핀들 헤드($m_2$)가 헤드 어셈블리($m_1$)의 특정위치에 정지한 상태에서 $m_1$과 $m_2$가 일체로 된 강체라고 가정할 때, 그 강체의 전체 질량을 $m = m_1 + m_2$라고 하면, 이 수학적 모델의 자유물체도는 Fig. 3과 같이 나타낼 수 있다.

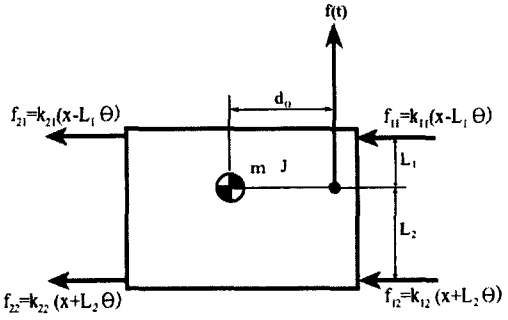


Fig. 3 Free body diagram of the head assembly

위 Fig. 2와 Fig. 3에서 다음의 관계가 성립한다.

$$m = m_1 + m_2 \tag{2.1}$$

$$J = J_{1,c} + J_{2,c} \tag{2.2}$$

식(2.2)에서, $J_{1,c}$와 $J_{2,c}$는 각각 Y-slide와 X-slide자체의 무게중심에 대한 질량관성모멘트를 나타내며, $J$는 통합된 헤드 어셈블리($m$)의 무게중심에 대한 질량관성모멘트이다.

Fig. 3의 자유물체도에서 Newton의 운동법칙을 적용하여 운동방정식을 유도하면 다음과 같이 구해진다.

$$m\ddot{x} + (k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22})x + (-k_{11} \cdot L_1 + k_{12} \cdot L_2 - k_{21} \cdot L_1 + k_{22} \cdot L_2)\theta = 0 \tag{2.3}$$

$$J\ddot{\theta} + (-k_{11}L_1 + k_{12}L_2 - k_{21}L_1 + k_{22}L_2)x + (k_{11}L_1^2 + k_{12}L_2^2 + k_{21}L_1^2 + k_{22}L_2^2)\theta = d_0 f \tag{2.4}$$

식(2.3)과 식(2.4)를 행렬식으로 다시 나타내면 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{f(t)\} \tag{2.5}$$

여기서, $\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix}$는 운동자유도이고, 작용력은 $\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ d_0 f(t) \end{Bmatrix}$이다. 그리고 계수행렬은 다음과 같다.

$$[M]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$[K]=\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

위 식(2.7)에서,

$$A=k_{11}+k_{12}+k_{21}+k_{22} \quad (2.8)$$

$$B=-k_{11}L_1+k_{12}L_2-k_{21}L_1+k_{22}L_2 \quad (2.9)$$

$$C=k_{11}L_1^2+k_{12}L_2^2+k_{21}L_1^2+k_{22}L_2^2 \quad (2.10)$$

2.3 운동방정식의 해

운동방정식의 해는 Laplace 변환법을 이용하여 구하였다. 식(2.5)의 운동방정식을 라플라스 변환시키면 다음과 같이 된다.

$$[M]s^2\{Q(s)\}+[K]\{Q(s)\}=\{F(s)\} \quad (2.11)$$

여기서, $\{Q(s)\}=L[\{q(t)\}]$, $\{F(s)\}=L[\{f(t)\}]$ 이다.

식(2.11)에서 응답 $\{Q(s)\}$는 다음과 같이 구해진다.

$$\{Q(s)\}=Z^{-1}(s)\{F(s)\}$$

$$=\frac{1}{D(s)}\begin{bmatrix} Js^2+C & -B \\ -B & ms^2+A \end{bmatrix}\{F(s)\} \quad (2.12)$$

여기서, $D(s)=mJ(s^2+\frac{V}{mJ})(s^2+\frac{AC-B^2}{V})$

$$V=\frac{(AJ+mC)+\sqrt{(AJ-mC)^2+4mJB^2}}{2}$$

위에서, 계의 임피던스 $Z(s)$는 다음과 같다.

$$Z(s)=\frac{\{F(s)\}}{\{Q(s)\}}=\begin{bmatrix} ms^2+A & B \\ B & Js^2+C \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

식(2.12)와 식(2.13)으로부터 변환된 응답 $X(s)$와 $\theta(s)$는 각각 다음과 같이 구해진다.

$$X(s)=L\{x(t)\}=-Bd_0P(s)\cdot F(s) \quad (2.14)$$

$$\Theta(s)=L\{\theta(t)\}=d_0(ms^2+A)P(s)\cdot F(s) \quad (2.15)$$

여기서, $P(s)$는 다음과 같다.

$$P(s)=\frac{1}{D(s)}=\frac{1}{mJ(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)} \quad (2.16)$$

단, $\omega_1^2=\frac{V}{mJ}$, $\omega_2^2=\frac{AC-B^2}{V}$ 이며, 시스템의 고유주파수를 나타낸다.

이송력 $F(s)$가 정해지면 식(2.14)와 식(2.15)에서 $X(s)$와 $\Theta(s)$를 라플라스 역변환 시켜 이론해인 $x(t)$와 $\theta(t)$를 구할 수 있게 된다.

실제로 쓰러스트 모터에서 발생하는 추력은 속도특성으로 주어진다. 이 속도특성을 나타내는 속도선도와 그에 따른 이송력을 보여주는 그림이 아래의 Fig. 4와 Fig. 5이다.

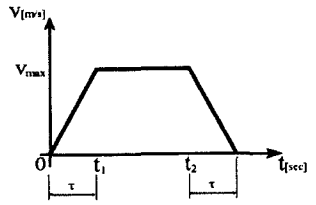


Fig. 4 The velocity curve of the thrust motor.

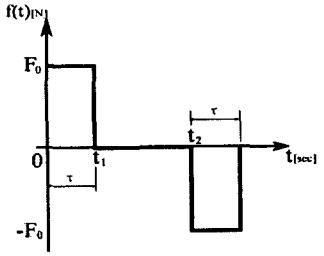


Fig. 5 The driving force diagram

속도선도에서 가·감속 구간에서는 등가속도 운동을 하므로 모터는 $\pm F_0(=m\times\frac{v_{max}}{\Delta t})$만큼의 힘을 헤드 어셈블리에 가하게 되고, 등속도 구간에서는 가속도와 마찰이 없기 때문에 모터는 헤드 어셈블리에 어떠한 힘도 가하지 않는다. 다만, 모터는 기구학적인 운동만을 전달하게 된다. 따라서 이송력 선도는 Fig. 5와 같이 되며, 수식으로 표현하면 아래와 같다.

$$f(t)=F_0-F_0\cdot\mu(t-t_1)-F_0\cdot\mu(t-t_2) \quad (2.17)$$

여기서, $\mu(t)$는 $\mu(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geq 0 \end{cases}$을 만족하는 단위계단함수(Unit step function)이다.

식(2.17)을 라플라스 변환을 하면 아래와 같다.

$$F(s)=\frac{F_0}{s}(1-e^{-t_1 s}-e^{-t_2 s}) \qquad (2.18)$$

식(2.18)를 식(2.14)과 식(2.15)에 대입하여 라플라스 역변환을 하면 $x(t)$와 $\theta(t)$를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t)=&-\frac{Bd_0F_0}{mJ}\left\{\frac{1}{(\omega_1\omega_2)^2}+\frac{1}{\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_1 t\right. \\ &\left.-\frac{1}{\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_2 t\right\}+\frac{Bd_0F_0}{mJ}\left\{\frac{1}{(\omega_1\omega_2)^2}\right. \\ &+\frac{1}{\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_1(t-t_1) \\ &\left.-\frac{1}{\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_2(t-t_1)\right\}\mu(t-t_1) \\ &+\frac{Bd_0F_0}{mJ}\left\{\frac{1}{(\omega_1\omega_2)^2}\right. \\ &+\frac{1}{\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_1(t-t_2) \\ &\left.-\frac{1}{\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_2(t-t_2)\right\}\mu(t-t_2) \qquad (2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(t)=&\frac{d_0F_0}{mJ}\left\{\frac{A}{(\omega_1\omega_2)^2}-\frac{m\cdot\omega_1^2-A}{\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_1 t\right. \\ &\left.+\frac{m\cdot\omega_2^2-A}{\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_2 t\right\}-\frac{d_0F_0}{mJ}\left\{\frac{A}{(\omega_1\omega_2)^2}\right. \\ &-\frac{m\cdot\omega_1^2-A}{\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_1(t-t_1) \\ &\left.+\frac{m\cdot\omega_2^2-A}{\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_2(t-t_1)\right\}\mu(t-t_1) \\ &-\frac{d_0F_0}{mJ}\left\{\frac{A}{(\omega_1\omega_2)^2}-\frac{m\cdot\omega_1^2-A}{\omega_1^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_1(t-t_2)\right. \\ &\left.+\frac{m\cdot\omega_2^2-A}{\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cos\omega_2(t-t_2)\right\}\mu(t-t_2) \qquad (2.20) \end{aligned}$$

## 3. 해석 사례

### 3.1 데이터 입력

앞서 유도된 식(2.19)와 식(2.20)을 Matlab을 이용하여 프로그램을 작성하고, 스핀들 헤드의 위치변화 등에 따른 사행동 응답의 변화를 시뮬레이션 해보았다. 해석에 사용된 입력파라메터들은 국내 D사의 수직형 머시닝 센터의 데이터를 기준으로 산출한 값이며 Table 3.1에 정리하였다.

Table 3.1 Input parameters

| Parameter | Value | Parameter | Value |
|---|---|---|---|
| $m_1$ | 1200kg | $b_2$ | $0.2425m$ |
| $m_2$ | 700kg | $a_1$ | $1.7m$ |
| $J_1$ | 322.0625kg · m² | $a_2$ | $0.420m$ |
| $J_2$ | 13.7204kg · m² | $Y_{section}$ | $0.510m$ |
| $b_0$ | $0.640m$ | $v_{max}$ | $0.67m/s$ |
| $b_1$ | $0.575m$ | $\tau$ | $0.4s$ |
| $k, k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ | | $4.7\times10^6\ N/m$ | |

위 Table 1에서, $Y_{section}$은 Y-slide의 이동구간을, $v_{max}$는 Y-slide를 이송시키는 모터의 최대이송속도를, $\tau$는 가속 또는 감속 구간의 소요시간이다. 그러므로 Fig. 4의 속도선도로부터 가·감속구간의 총거리는 $v_{max}\cdot\tau$으로 계산된다. 따라서, 정속도 구간의 총거리는 $Y_{section}-v_{max}\cdot\tau$가 되고, 이 구간을 지나는 소요시간은 다음과 같다.

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{Y_{section}-v_{max}\cdot\tau}{v_{max}} \qquad (3.1)$$

그러므로 Fig. 4에서 $t_1$, $t_2$와 총시간 $t_{total}$은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$t_1=\tau \qquad (3.2)$$

$$t_2=t_1+\Delta t \qquad (3.3)$$

$$t_{total}=t_2+\tau \qquad (3.4)$$

또한, 전체의 무게중심은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$x_c=\frac{m_1\cdot\frac{a_1}{2}+m_2(a_0+\frac{a_2}{2})}{m_1+m_2} \qquad (3.5)$$

$$y_c=\frac{m_1\cdot\frac{b_1}{2}+m_2(b_1+\frac{b_2}{2})}{m_1+m_2} \qquad (3.6)$$

Y-slide와 X-slide의 전체 무게중심에 대한 질량관성모멘트 $J_{1,c}$와 $J_{2,c}$는 다음과 같이 계산한다.

$$J_{1,c}=J_1+\left\{(\frac{a_1}{2}-x_c)^2+(\frac{b_1}{2}-y_c)^2\right\}m_1 \quad (3.7)$$

$$J_{2,c}=J_2+\left\{(a_0+\frac{a_2}{2}-x_c)^2+(b_1+\frac{b_2}{2}-y_c)^2\right\}m_2 \quad (3.8)$$

### 3.2 X-slide의 위치에 따른 사행동 응답 변화

여러 가지 모델링 파라메터 중에서, 스프링 강성 k, 각 slide의 가로, 세로 길이와 질량, 질량관성모멘트 등은 설계단계에서 일단 정해지면 일정하다고 볼 수 있다. 이러한 값들이 일정하면, 식(3.19)에서 $y_c$ 또한 일정한 값을 가지게 된다. 그러나 가공작업 중에 스핀들 헤드의 위치가 변화되므로 $a_0$가 변화하게 되며 따라서 식(3.5)에서 $x_c$는 일정한 값이 아니라 변하게 된다. 이는 $d_0$를 변화시키게 되므로 이론해인 식(2.14)와 식(2.15)에서 전체 응답에 영향을 미치고 있다. 그러므로 본 해석에서는 X-slide의 위치에 따른 사행동 응답의 변화를 알아보기 위하여 다음과 같이 4가지의 경우에 대해 해석을 수행하였다.

Case 1. X-slide가 Y-slide중심에 위치하는 경우
Case 2. X-slide가 좌측끝단에 위치하는 경우
Case 3. X-slide가 우측끝단에 위치하는 경우
Case 4. X-slide가 추력작용선상에 위치하는 경우

각 경우별 계산된 고유진동수와 질량중심은 Table 3.2에 정리하였으며 이론적인 사행동 응답의 계산결과는 Fig. 6~Fig. 9에 나타내었다.

Table 3.2 Computed modelling parameters and natural frequencies for X-slide's position changes

| Value / Case | $a_0$ [m] | Natural Freq. $\omega_1$ | Natural Freq. $\omega_2$ | Center of mass $x_c$ | Center of mass $y_c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.640 | 57.43 | 107.35 | 0.85 | 0.438 |
| 2 | 0 | 49.14 | 104.48 | 0.61 | 0.44 |
| 3 | 1.28 | 49.14 | 104.48 | 1.08 | 0.44 |
| 4 | 0.43 | 56.36 | 106.89 | 0.77 | 0.44 |

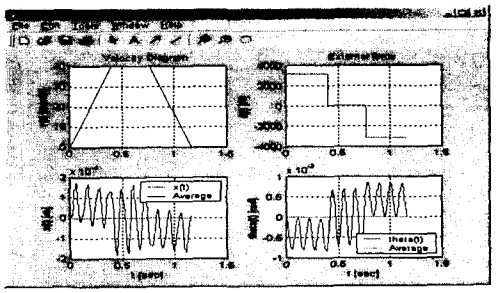

Fig. 6 Computed responses for the Case 1

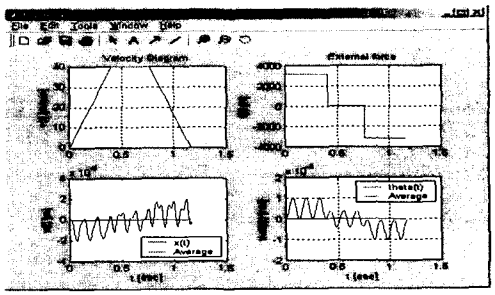

Fig. 7 Computed responses for the Case 2

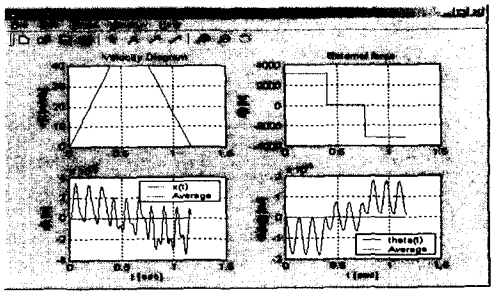

Fig. 8 Computed responses for the Case 3

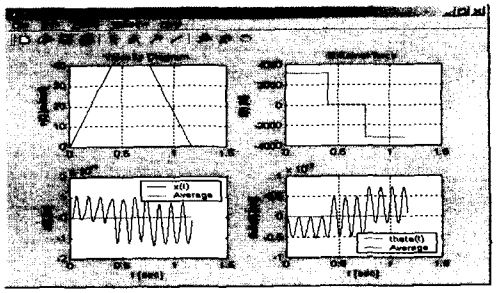

Fig. 9 Computed responses for the Case 4

## 4. 맺음말

본 논문에서는 머시닝 센터의 크로스 헤드(Cross head assembly)가 가이드 레일을 따라 가·감속 이송을 할 때에 흔히 목격되는 사행동을 해석하기 위하여 간단한 2자유도 평면 운동해석 모델을 제안하였다. 모델에서 가이드 레일과 LM 블록 사이의 마찰은 무시되었으며, 가이드 레일과 LM 블록은 한 점에서 구름접촉(Rolling contact)을 한다고 가정하였다. 또한 크로스 헤드 어셈블리의 이송운동 중에 LM 가이드와 LM 가이드 및 쓰러스트 모터를 지지하고 있는 구조물의 변형이나 구조진동은 미소하고, 따라서 일체의 구조물은 강체(剛體)라고 가정하였다. 제안된 사행동 해석 모델에 Newton의 운동법칙을 적용하여 운동방정식을 유도하고, 라플라스 변환법으로 해를 구하였다.

또한, 해석 사례로서 국내 D사의 수직형 밀링센터를 대상으로 스핀들 헤드의 위치 변화에 따른 크로스 헤드어셈블리의 사행동응답 변화를 해석해 보았다. 본 연구에서 제안한 사행동 해석 모델은 가이드 레일 상에서 LM 블록에 지지되어 이송되는 공작기계의 크로스 헤드 어셈블리의 사행동 현상을 해석하는데 유용하게 적용될 수 있을 것이다. 앞으로 보다 상세한 마찰기구에 대한 모델링과 쓰러스트 모터 지지 구조물의 유연성에 기인한 진동현상을 고려한 모델을 발전시킨다면 보다 더 정확한 사행동 해석이 가능할 것이다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 창원대학교 공작기계기술연구센터와 (주)두산 기계 BU 공작기계 BG의 지원에 의한 것입니다. 이에 관계자께 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

1. 최영휴, 정택수, 조병호, 김주한, 최영준, "LM 가이드 상에서 건마찰 접촉을 하면서 운동하는 Cross Head의 사행동에 관한 연구", 한국공작기계학회 2000년도 춘계학술대회 논문집, pp. 708-713, 2000.

2. S.S.RAO, "MECHANICAL VIBRATIONS", 3rd ed, ADDISON-WESLEY, 1995

3. DENNIS G. ZILL, MICHAEL R. CULLEN, "ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS", PWS Publishing Company, 1992