

궤환 일반화 예측 제어기 설계

A Study on the Design of Generalized Feedback Predictive Controller

이상윤\*, 김원일\*, 한성현\*

\*경남대학교 기계자동화공학부(TEL : 055-249-2624, FAX : 055-249-2617)

Abstract

A conceptual framework is proposed in which a general feedback predictive controller is taken to be a feedback interconnection of controller and GPC (General predictive Control). Numerical example are included to illustrate the procedure and to show the performance of the control system.

I. 서론

본 논문에서는 주어진 제어대상이 선형인 경우 플랜트의 종류나 형태에 의존하지 않고, 단지 플랜트의 구조(차수)나 입·출력 조건만으로 동조시켜 사용할 수 있는 제어기를 설계하기 위해, 일반적인 궤환제어기를 이용하여 제어기의 이득을 자동으로 조절할 수 있는 알고리즘을 제안하고, 제안한 새로운 제어기의 동작을 안정화시키기 위해 1973년 Astrom과 Wittenmark가[1] 제안한 적응제어(자기 동조제어)이론을 적용하였다.

적응제어를 도입한 궤환 적응제어기는 선형인 경우는 잘 동작하지만, 초기 동조시 정상상태 도달까지 약간의 진동을 수반한다. 이러한 진동 부분을 개선하기 위해서 1987년 Clarke가[2] 제안한 일반화 예측제어이론을 기반으로 하는 궤환 일반화 예측 제어기를 구성하여 개선을 시도하였다.

II. 제어기 설계

1. 궤환제어기

궤환제어기는 제어대상인 플랜트의 출력신호와 희망하는 기준입력사이의 오차에 제어기 이득을 곱하여 제어대상의 제어입력으로 사용한다.

현재출력을 이용하여 제어기의 이득을 구하기

위한 궤환제어기를 설계하며, 제안하는 궤환제어기의 구성도를 그림 1에 나타내었다.

제어기의 동조순서는 먼저 플랜트의 입력에 임의의 작은량  $\epsilon$  을 제어입력으로 다음과 같이 인가한다.

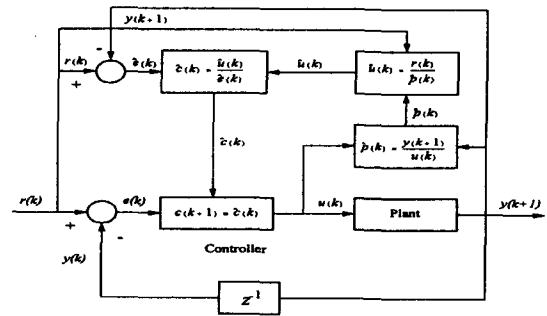


그림 1. 궤환 제어기의 블록선도

$$u(k) = \epsilon \tag{1}$$

여기서  $u(k)$  는  $k$  번째 제어입력이다. 그리고 플랜트 입력측의 제어입력  $u(k)$ 와 플랜트의 출력  $y(k+1)$ 의 관계로부터 플랜트의 전달함수  $\hat{p}(k)$  를 다음과 같이 추정한다.

$$\hat{p}(k) = \frac{y(k+1)}{u(k)} \tag{2}$$

여기서  $y(k+1)$  은  $k+1$  번째 플랜트의 출력이다.

추정한 전달함수  $\hat{p}(k)$  와  $k$  번째 기준입력  $r(k)$ 로부터  $k$  번째 추정 제어 입력  $\hat{u}(k)$  를 다음과 같이 계산한다.

$$\hat{u}(k) = \frac{r(k)}{\hat{p}(k)} \tag{3}$$

그리고  $r(k)$  와  $y(k+1)$  로부터  $k$  번째 추정

에 필요한 오차  $\hat{e}(k)$  를 구한다.

$$\hat{e}(k) = r(k) - y(k+1) \quad (4)$$

$\hat{e}(k)$  와  $\hat{u}(k)$  로부터  $k$  번째 추정된 제어기 이득  $\hat{c}(k)$  를 아래와 같이 추정한다.

$$\hat{c}(k) = \frac{\hat{u}(k)}{\hat{e}(k)} \quad (5)$$

$k+1$  번째의 제어기 이득  $c(k+1)$  은  $\hat{c}(k)$  로 되고,

$$c(k+1) = \hat{c}(k) \quad (6)$$

$k+1$  번째의 제어 입력  $u(k+1)$  은 다음과 같이 구해진다.

$$u(k+1) = c(k) e(k+1) \quad (7)$$

여기서

$$e(k) = r(k) - y(k) \quad (8)$$

이다.

## 2. 제한 적응제어기

제한한 제한제어 알고리즘의 단점을 보완하기 위해 적응제어 방식으로 도입하여 식(2)의  $\hat{y}(k)$  를 순환 매개변수 추정에 의해서 계산한다. 추정된 매개변수를 사용하여  $k$  번째 기준신호  $r(k)$  와  $k+1$  번째 플랜트 출력 으로부터  $\hat{u}(k)$  를 구하며 제한 적응제어기의 구성도를 그림 2에 나타내었다.

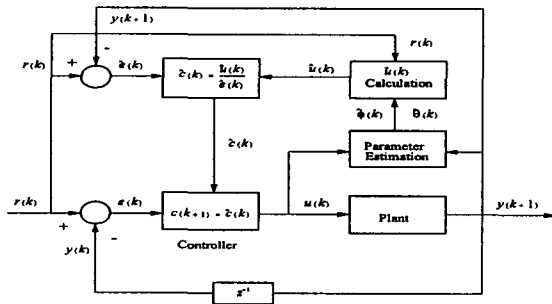


그림 2. 제한 적응제어기 블록선도.

플랜트가 다음의 수식에 의해 특성화된다고 가정하자.[1][3][4]

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (9)$$

식(9)에서  $z^{-1}$ 의 다항식을  $A(z^{-1})$  과  $B(z^{-1})$  은 다음과 같이 정의된다.

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$$

그리고 식(10)와 식(11)에서 다음의 조건을 만족한다고 가정한다.

(i)  $n$  과  $m$  은 알고 있다.

(ii)  $A(z^{-1})$  과  $B(z^{-1})$  은 서로 소이다.

플랜트의 매개변수  $a_i, b_i$  는 임의의 값을 가지며 미지값 이라고 가정한다.

$$\deg B < \deg A \quad (12)$$

여기서  $n = \deg A$  는 다항식  $A$  의 차수이고,  $m = \deg B$  는 다항식  $B$  의 차수이다.

최소자승 추정에서 판별은 다음의 식(3-18)을 최소화하는 것이다.

$$V = \sum_{k=1}^L \lambda^{L-k} \varepsilon^2(k) \quad (13)$$

식(13)에서  $\varepsilon$  은 다음과 같다.

$$\varepsilon(k + \deg A) = Ay(k) - Bu(k) \quad (14)$$

그리고  $\lambda$  는 가중치이다. 식(9)를 다음과 같이 나타낸다.

$$y(k+1) + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) \quad (15)$$

식(15)에서 매개변수 추정벡터  $\theta$  와 회귀벡터  $\phi(k)$  를 다음과 같이 표현한다.

$$\theta = [\hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n \hat{b}_0 \hat{b}_1 \dots \hat{b}_m] \quad (16)$$

$$\phi(k) = \begin{bmatrix} -y(k) & -y(k-1) & \dots & -y(k-n) \\ u(k) & u(k-1) & \dots & u(k-m) \end{bmatrix}^T$$

그리고 순환 최소자승법으로 추정된 매개변수 추정벡터  $\theta$  와 회귀벡터  $\phi(k)$  는 다음과 같다.

$$\theta(k+1) = \theta(k) + P(k+1)\phi(k+1)\varepsilon(k+1) \quad (18)$$

여기서

$$\varepsilon(k+1) = y(k+1) - \theta^T(k)\phi(k+1) \quad (19)$$

이고

$$P(k+1)=[P(k)-P(k)\phi(k)R(k)\phi^T(k)P(k)]/\Delta(20)$$

이며

$$R(k)=[\lambda+\phi^T(k)P(k)\phi(k)]^{-1}(21)$$

이다. 그리고 그림 2에서  $\hat{u}(k)$ 를 구하기 위해 순환 최소자승법으로 추정된 매개변수 추정 벡터  $\theta$ 와 회귀벡터  $\phi(k)$ 를 다음과 같이 수정한다.

$$\theta=[\hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n \hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_m](21)$$

$$\phi(k+1)=[-y(k+1) \quad -y(k) \quad -y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-m)]^T(22)$$

식(21)과 식(22)에서  $\hat{u}(k)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{u}(k)=\frac{\theta^T(k)\phi(k+1)}{b_0}(23)$$

사용한 매개변수 추정 방법은 지수적 망각계수(Forgetting factor)를 가지는 순환 최소자승 방식이다.[1][2][5][6]

### 3. 제한 일반화 예측제어기[7]

제한한 제한 적용제어 알고리즘의 초기 동조시 과도영역을 보완하기 위해 일반화 예측 제어 방식으로 도입하여 식(3)의  $\hat{u}(k)$ 를 예측에 의해서 계산한다. 제한 일반화 예측제어기의 구성도를 그림 3에 나타내었다.

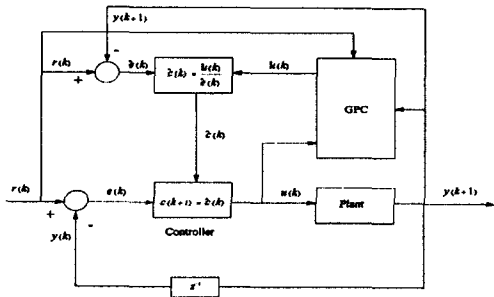


그림 3. 제한 일반화 예측제어기 블록선도

일반화 예측제어기는 다음 모델을 기반으로 한다.

$$A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k)+C(z^{-1})v(k)(24)$$

여기서  $y(k)$ ,  $u(k)$  그리고  $v(k)$ 는 출력과 입력 그리고 외란과 잡음이다.  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  그리고  $C(z^{-1})$ 는 Backward shift operator  $z^{-1}$ 로 이루어진 다항식이다.

$$\Delta=1-z^{-1}(25)$$

일반화 예측제어기의 제어법칙은 다음과 같은 평가 함수를 최소화함으로서 얻어진다.

$$J=\sum_{j=N_1}^{N_2}[\hat{y}(k+j)-r(k+j)]^2+\lambda\sum_{j=1}^{N_u}[\Delta u(k+j)]^2$$

여기서  $\hat{y}(k+j)$ 는  $k$ 번째 시간에서 이용할 수 있는 입력과 출력 자료 기반으로 해서  $k+j$ 번째의 예측된 출력이다.  $r(k)$ 는 설정치 이고,  $N_1$ ,  $N_2$  그리고  $N_u$ 은 최소 예측범위, 최대 예측범위 그리고 제어범위 이다.  $\lambda \geq 0$ 는 가중을 증가시키는 제어이다.

$N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_u$  그리고  $\lambda$ 는 일반화 예측제어기의 매개 변수이다.

미래의 제어 증분  $\Delta \hat{u}(k+j)$  ( $j=0, 1, \dots, N_u-1$ ) 대해 위의 평가함수를 최소화함으로서 얻어진다.

$$\Delta u(k)=[1 \ 0 \ \dots \ 0](G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (r - f)$$

여기서  $G$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$G=\begin{bmatrix} g_{N_1-1} & \cdot & g_0 & \cdot & \cdot & 0 \\ g_{N_1} & \cdot & \cdot & g_0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{N_2-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g_{N_2-N_u} \end{bmatrix}(28)$$

$$r=[r(k+N_1) \ r(k+N_1+1) \ \dots \ r(k+N_2)]^T$$

$$f=[f(k+N_1) \ f(k+N_1+1) \ \dots \ f(k+N_2)]^T$$

여기서  $I$ 는 단위행렬이다. 행렬  $G$ 의 요소는 스텝응답의 값이고,  $f$ 는 개루프 시스템  $B(z^{-1})/A(z^{-1})$ 에  $u(k-1)$ 에서 고정된 입력의 응답이다.

### III. 모의 실험 및 결과고찰

제한한 제한 제어기의 알고리즘을 식(31)의 선형 플랜트에 대입했을 때의 응답을 그림 3-2에 나타내었다.

$$y(k+1)=10u(k)(31)$$

이 제어기에서 그림 4와 같이 기준신호  $r(k)$ 를 인가했을 때 플랜트 출력  $y(k+1)$ 가 완전히 기준신호  $r(k)$ 에 추종함을 관측할 수 있다.

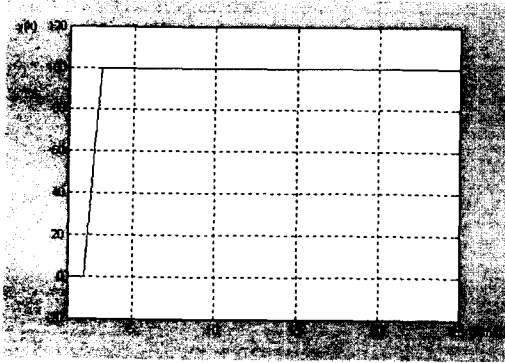


그림 4. 식(31)에 적용했을 때의 궤환 제어기의 응답.

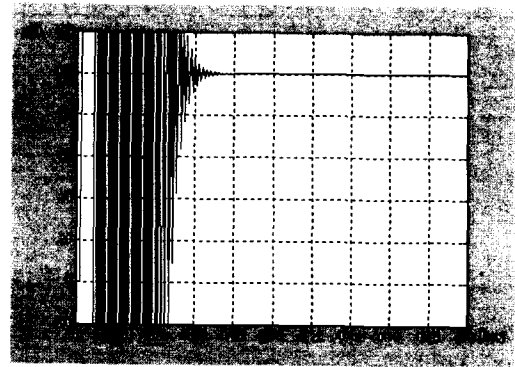


그림 6. 식(33)에 적용했을 때의 궤환 적용제어기 응답

그리고 제안한 알고리즘의 성능을 확인하기 위해 1차 지연 플랜트인 식(32)에 적용하였을 때의 응답을 그림 5, 6, 7에 나타내었다. 사용한 플랜트의 전달함수는 식(32)와 같다.

$$G(s) = \frac{0.15e^{-0.45s}}{s + 0.15} \quad (32)$$

식(33)은 시간영역에서 모의실험을 하기 위해 식(32)를 1ms의 샘플링 시간으로 이산화 한 것이다.

$$y(k+1) = 0.8607y(k) + 0.0792u(k) + 0.0601u(k-1) \quad (33)$$

그림 5의 응답을 보면 기준 신호에 수렴하지 못하고 불안정하게 진동함을 관측할 수 있다.

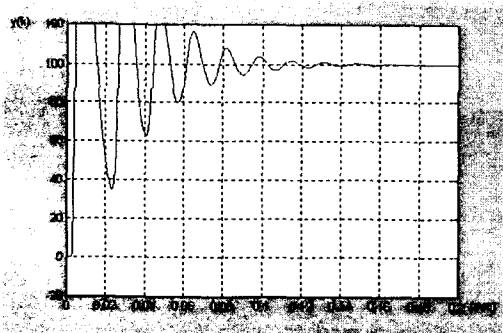


그림5. 식(32)에 적용했을 때의 궤환 제어기 응답.

그림 6의 궤환 적용제어기 응답에서 기준 설정치에 잘 추종되는 것을 알 수 있으며, 제안한 궤환 적용제어기는 제어기를 설계할 때 문제되는 스케일 계수의 조절이 필요 없다. 그러나 과도상태가 존재한다.

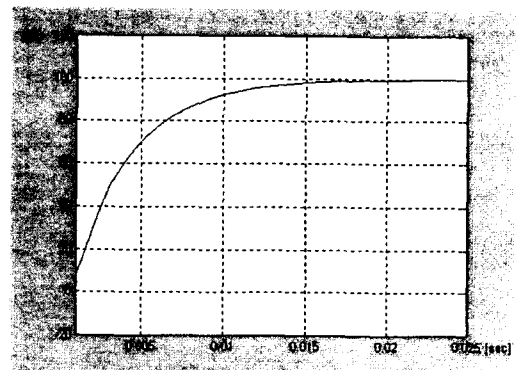


그림 7. 식(33)에 적용했을 때의 궤환 일반화 예측제어기 응답

그림 7의 궤환 일반화 예측 제어기의 응답은 과도현상 없이 잘 추종함을 관찰할 수 있다.

표 1.에 3가지 제어기의 정착시간을 비교하였다. 궤환 일반화 예측제어기가 우수한 정착시간을 가짐을 나타낸다.

표 1. 식(32)에 적용했을 때의 3가지 제어기의 정착시간 비교

	정착시간	기타
궤환제어기	84ms	진동
궤환 적용제어기	61ms	진동
궤환 일반화 예측제어기	11.55ms	안정

#### IV. 결론

본 논문에서는 플랜트의 구조(차수)나 입·출력 조건만으로 동조시켜 사용할 수 있는 제어기를 설계하기 위해, 일반적인 궤환제어기를 응용하여 제어기의 이득을 자동으로 조절할 수 있는 알고리즘을 제안하였고, 제어기의 동작을 안정화시키기 위해 적응제어와 일반화 예측제어 이론을 도입하여 과도영역의 진동을 해결하였다. 앞으로의 연구과제는 궤환제어기의 동조 알고리즘을 상태공간, 퍼지 그리고 신경망이론으로 확장하여 선형뿐만 아니라 비선형 시스템에도 적용할 수 있도록 하는 연구입니다.

#### V. 참고문헌

[1]. J. Astrom, B. Wittenmark : Adaptive Control second edition, New York, Addison-Wesley Pub. Com., pp. 1-561, 1995.

[2]. K.S. Narndra : Applications of Adaptive Systems Theory, Center for Systems Science Becton Center, Yale University, pp. 54-59, 1987.

[3] E. H. Satorius and M. J. Shensa : On the Application of Recursive Least Squares Methods to Adaptive processing, Application of Adaptive Control Edited by Kumpari S. Narendra, Richard V. Monopoli, New York, Academic Press, Inc., pp. 165-192, 1979.

[4] O. P. Malik : Adaptive Control of Synchronous Machine Excitation, Microprocessor Based Control Systems Edited by N. K. Sinha, U.S.A. and Canada, D. Reidel, Pub. Com., pp. 61-79, 1986.

[5] D. W. Clarke : Self-Tuning and Adaptive Control, Holland, Microprocessor-Based Control Systems Edited by N. Sinha, Holland, D. Reidel Pub. Com., pp. 35-57, 1986.

[6] Astrom : Self-Tuning Regulators Design Principles and Applications, New York, Application of Adaptive Control Edited by Kumpari S. Narendra, Richard V. Monopoli, Academic Press, Inc., pp. 1-68, 1979.

[7] By Huseyin Demircioglu and Ercan Karasu : Generalized Predictive Control, IEEE Control System Magazine, pp. 36-47, Oct. 2000.

[8] D. W. Clarke, C. Mohtadi and P. S. Tuffs : Generalized Predictive Control - Part I. The Basic Algorithm, International Federation of Automatic Control, 23. No. 2, pp. 137-148, 1987.