

지글러-니콜스 제어파라미터 조정법(1),(2)의 상호 연관성에 대한 해석적 연구 —

강인철*, 최순만**, 최재성***

An Analytic Study On the Mutual Relation between Method(1) and (2) of ZIEGLER-NICHOLS Control Parameter Tuning

I-C Kang*, S-M Choi**, J-S Choi***

- * 한국해양대학교 대학원
- ** 한국해양수산연수원
- *** 한국해양대학교

Abstract : Parameter tuning methods by Ziegler-Nichols for control systems are generally classified into Z-N(1) and Z-N(2). The purpose of this paper is to describe what relations exist between methods of Z-N(1) and Z-N(2), or how Z-N(1) method can be originated from Z-N(2) method by analyzing one loop control system of P or PI controller and time delay process. The formulas of Z-N(1) consist of process parameters, L (time delay), K_m (gain) and T_m (time constant), but Z-N(2) method is based only on the ultimate gain K_u and the ultimate period T_u acquired normally by practical trial without any parameters of Z-N(1). In this paper, for the first step to seek mutual relations, the simple formulas of Z-N(2) are transformed into the formulas composed of the same parameters as Z-N(1) which is derived from the analysis of frequency characteristics. Then, the approximation of the actual ultimate frequency is proposed as important premise in the translation between Z-N(1) and (2). Such equalization and approximation brings a simple approximated formula which can explain how Z-N(1) is originated from the Z-N(2) in the form of formula. And a model system is adopted to compare the approximated formula to Z-N(1) and Z-N(2) methods, the results of which show the effectiveness of the proposals.

Key words : PI Control(PI제어), Ziegler-Nichols Method(지글러-니콜스 방법), Stability Limit(안정한계), Ultimate Gain(임계게인), Time Delay System(시간지연계통)

1. 서론

제어계의 PID제어 파라미터를 조정하기

위한 방법으로 여러 가지 형태가 모색되고 있으나^[1-5] 산업현장에서는 방법(1)과 방법

(2)로 구분되는 지글러-니콜스의 조정법이 실무적으로 많이 이용된다⁽⁶⁻⁸⁾.

지글러-니콜스는 제어대상의 스텝응답에 의한 방법(1)에서 제어대상을 시간지연과 1차지연의 조합으로 나타내는 경우 PID제어 파라미터의 적정치는 시간지연과 시정수 및 게인에 의한 단순 관계식으로 나타낼 수 있다고 하였고 전체 페루프특성의 안정한계 상태에 기초하는 방법(2)에서는 이를 임계제인과 이 때의 임계주기를 토대로 하는 간단한 규칙으로 제시하고 있다.

그러나 이들 방법에 대한 근거는 스텝응답을 1/4감쇠진동으로 만들기 위한 경험적 결과로 나타낼 뿐이며 특히 한계상태에 기초하는 방법(2)가 방법(1)에 대해 어떠한 연관성과 해석적 의미를 갖는지에 대해서는 언급이 안되고 있다. 다만 두 방법 모두 제어파라미터 조정이 제어특성을 최적으로 근접하는 결과가 되도록 한다는 면에서 동일한 목표에 대한 서로 다른 접근 방법이라 유추될 뿐이다.

본 논문은 같은 조정목적에 갖는 조정법(1)과 조정법(2)의 상호적 관계를 해석적인 방법에 의해 설명할 수 있을 것으로 보고 양 방법에서 근사화를 통한 의미적 연관성을 규명하고자 하였다. 이를 위해 조정법(2)에서 기초하고 있는 안정한계상태를 관련 파라미터들에 의한 수식으로 표현하였으며 이로부터의 결과를 Z-N조정법(1)과 비교 분석함으로써 Z-N조정법(1)이 갖는 간이 관계식의 배경을 고찰하였다. 여기에서 제어대상의 전달함수는 Z-N조정법(1)에서와 같이 시간지연을 갖는 1차 시스템으로 나타내었고 Z-N조정법(2)의 임계제인과 임계주기의 수식화는 시간지연 제어대상에 대한 페루프전달함수의 주파수특성을 기초하였다. 또한 해석의 편의를 위하여 연구의 범위는 P, PI제어의 경우로 제한하였다.

2. 지글러-니콜스(1),(2)의 조정법

Z-N조정법(1)에서 제어대상의 특성 $G(s)$ 는 식(1)과 같은 근사 전달함수로 가정된다.

$$G(s) = \frac{K_m e^{-Ls}}{1 + T_m s} \quad (1)$$

여기에서 K_m 은 정상이득, T_m 은 시정수, L 은 시간지연이다. 각 파라미터는 실제의 제어대상에 대한 스텝응답으로부터 정해지고 스텝응답곡선의 변곡점상 접선 기울기 R 은 $\frac{K_m}{T_m}$ 이다. 이 경우 P, PI제어에서의 Z-N조정법(1)이 나타내는 적정한 감도 K_{p1} 및 적분시간 T_{i1} 은 식(2), (3)과 같이 제시된다.

$$K_{p1} = \frac{1}{RL} = \frac{T_m}{K_m L} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} K_{p1} \\ T_{i1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.9}{RL} \\ \frac{L}{0.3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \frac{T_m}{K_m L} \\ \frac{L}{0.3} \end{pmatrix} \quad (3)$$

식(2), (3)에서와 같이 게인의 적정치는 $\frac{T_m}{L}$ 에 비례해서 증가하며 적분시간의 조정은 시간지연 L 에 의해서만 정해지는 단순 관계를 나타낸다. 이에 대해 페루프응답의 안정한계 상태에 기초하고 있는 Z-N(2)조정법은 적정감도와 적분시간을 P, PI제어의 경우 임계감도 K_u 와 이 때의 주기인 임계주기 T_u 만에 의한 식(4)와 식(5)로 정하고 있다.

$$K_{p2} = 0.5 K_u \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} K_{p2} \\ T_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.45 K_u \\ \frac{1}{1.2} T_u \end{pmatrix} \quad (5)$$

식(4), (5)와 같이 임계감도와 임계주기만으로 표현된 형태에서는 식(2), (3)과의 연관성을 모색하는 것이 곤란하며 식(4), (5)를 관련된 파라미터에 의한 식으로 나타낼 필요가 있다.

3. 지글러-니콜스(1),(2)의 해석적비교

3.1 안정한계가 되기 위한 조정상태

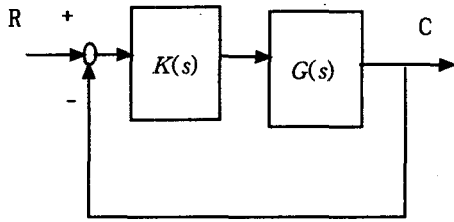


Fig.1 Block Diagram of System

Fig.1과 같은 전달함수의 직렬피드백 제어계를 가정한다. 여기에서 $K(s)$ 는 식(6)과 같은 PI 제어기 그리고 제어대상 $G(s)$ 는 식(1)과 같다.

$$K(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (6)$$

단, K_p 와 T_i 는 각각 제어기의 게인과 적분시간이다.

Fig.1의 제어계가 안정한계 상태에 놓이는 경우는 개루프 주파수특성이 식(7)의 조건을 만족할 때이다.

$$G(j\omega)K(j\omega) = \exp(-j\pi) \quad \omega \in R \quad (7)$$

식(6)은 페루프 전달함수 특성근이 s평면상의 허수축에 위치하고 위상지연과 이득은 각각 π 와 1이 될 때로서 이 조건을 만족하는 식(6)의 변수쌍 (K_p, T_i)으로 이루어지는 집합을 p 라고 하면 그 원소는 다수의 연속적인 변수쌍으로 구성된다.

이로부터 구하고자 하는 안정한계에서의 파라미터 집합은 식(8)과 같아진다.^[9-10]

$$\begin{pmatrix} K_p(\omega) \\ T_i(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{K_m} (\cos \omega L - \omega T_m \sin \omega L) \\ \frac{\cos \omega L + \omega T_m \sin \omega L}{\omega (\sin \omega L + \omega T_m \cos \omega L)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

식(8)의 단일항 형태는 식(9)이다.

$$\begin{pmatrix} K_p(\omega) \\ T_i(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_m^2}}{K_m} \cos[\omega L + \alpha(\omega)] \\ \frac{1}{\omega} \cot[\omega L + \alpha(\omega)] \end{pmatrix} \quad (9)$$

단, $\alpha(\omega) = \tan^{-1} \omega T_m$ 이다.

식(8)로부터 p 의 집합원소가 P제어 상태에서 안정한계로 되는 것은 $T_i(\omega)$ 가 0이 될 때이다. 이 때의 각속도를 임계각속도 ω_p 라 하면 ω_p 는 식(10)의 방정식에 의해 구해진다.

$$\omega_p L + \tan^{-1} \omega_p T_m = \pi \quad (10)$$

따라서 Z-N조정법(2)에서 필요로 하는 임계주기 T_u 는 식(11)과 같이 ω_p 로 나타낼 수 있다.

$$T_u = \frac{2\pi}{\omega_p} \quad (11)$$

또한 안정한계에서의 임계게인 K_u 는 식(8)로부터 $K_p(\omega_p)$ 의 값이므로 식(12)와 같다.

$$K_u = \frac{\sqrt{1 + \omega_p^2 T_m^2}}{K_m} \quad (12)$$

3.2 조정법(2)의 조정법(1)로의 근사화

Z-N조정법(2)에서 필요로 하는 파라미터는 P제어 상태에서의 임계게인 K_u 와 이때의 임계주기는 T_u 이며 각각 식(12)와 식(11)이 이것에 해당한다. 따라서 식(4)와 식(5)는 각각 식(13)과 식(14)로 표현할 수 있다.

$$K_{p2} = \frac{0.5}{K_m} \sqrt{1 + \omega_p^2 T_m^2} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} K_{p2} \\ T_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.45}{K_m} \sqrt{1 + \omega_p^2 T_m^2} \\ \frac{5\pi}{3\omega_p} \end{pmatrix} \quad (14)$$

여기에서 식(2), (3)과 식(13), (14)에 의한 조정이 제어계 상태를 같은 목적의 결과를 가져오는 것이라 가정하면 근사화를 위하여 서로의 식을 등가관계로 대응시키는 것이 가능해진다. 그러나 식(2)는 임계 각속도 ω_p 를 파라미터로 갖지 않으므로 식(13)의 계인에 나타나는 ω_p 를 우선 기지의 파라미터만의 표현으로 근사화시킬 필요가 있다.

ω_p 는 식(10)과 (15)의 관계로부터 식(16)의 범위에 해당하는 연속적 값을 갖는다.

$$0 \leq \tan^{-1} \omega_p T_m < \frac{\pi}{2},$$

$$\omega_p T_m \geq 0 \quad (15)$$

$$\frac{\pi}{2L} < \omega_p \leq \frac{\pi}{L} \quad (16)$$

만일 T_m 과 L 의 비를 $k = T_m/L$ 이라 하면 식(10)은 k 와 L 의 함수로 나타낼 수 있으며 k 에 대한 식(16)의 의미는 식(17), (18)과 같아진다.

$$\lim_{k \rightarrow 0} \omega_p = \frac{\pi}{L} \quad (17)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_p = \frac{\pi}{2L} \quad (18)$$

특히 식(18)의 관계를 식(14)에서의 적분 시간 T_{i2} 에 대입하면 그 결과는 식(3)의 T_{i1} 과 일치하게 된다. 이로부터 ZN(1)의 적분시간 기준은 ZN(2)의 적분시간 기준 중에서 k 가 무한대인 즉, 시간지연 L 이 시정수 T_m 에 비해 무시할 정도로 작은 특수한 경우에 해당한다는 것을 알 수 있다. 또는 L 이 제로인 조건으로 식(14)를 간략화시킨 결과가 식(3)의 적분시간 형태라고 할

수 있다.

그러나 계인의 식들은 적분시간과 달리 식(2),(3) 및 식(13),(14)의 상호비교에서 동일한 계수의 관계로 나타내기가 쉽지 않다. 결국 ω_p 는 식(16)의 경계값이 아닌 중간부분의 값이 되어야 하고 L 과 T_m 이 모두 관계하는 조건으로 근사시킬 필요가 있다.

식(16)의 계수를 다시 나타내면 $1.57/L < \omega_p \leq 3.14/L$ 가 된다. 식(13),(14)의 근호내 형태로 보아 근사치로서의 ω_p 는 $1/L$ 에 대한 계수가 정수형태로 간략화 될 필요가 있음을 알 수 있다. 이 범위에서의 정수는 2와 3이고 3의 경우는 경계값에 가까우므로 대표값으로 적절치 않다고 한다면 ω_p 는 식(19)로 근사화하는 것이 타당해진다.

$$\omega_p \approx \frac{2}{L} \quad (19)$$

한편 식(16)과 식(17)로부터 ω_p 는 식(20)과 같이 L 만에 의한 항과 T_m 이 관계하는 항으로 구분하여 나타낼 수 있고 이를 다시 k 에 의해 나타내면 식(21)이 된다.

$$\omega_p = f(L) + g(L, T_m) \quad (20)$$

$$\omega_p = \frac{\pi}{L} + h(k, L) \quad (21)$$

k 값을 일정 조건의 상수로 취급하면 식(20)은 L 만의 식으로써 ω_p 를 구할 수 있다. 만일 $k=1$ 로 정하고 이 조건에서 식(10)을 만족하는 각속도를 ω_1 이라 하면 식(10)은 식(22)가 되고 이것의 수치해석에 의한 해는 식(19)와 동일한 결과가 된다.

$$\omega_1 L + \tan^{-1} \omega_1 L = \pi \quad (22)$$

계인에 대해 이러한 ω_p 의 근사치인 식(19)의 값을 식(13)과 식(14)에 대입하도록 하고 적분시간에 대해서는 식(18)의 관계를 적용하면 P, PI제어에 대해 해석적 의미를 나타내기 위한 근사식을 식(23),(24)와 같이

얻을 수 있다.

$$K_p(\omega_p) \Big|_{\omega_p = \frac{2}{L}} = \frac{0.5}{K_m} \sqrt{1 + \frac{4T_m^2}{L^2}} \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} K_p(\omega_p) \Big|_{\omega_p = \frac{2}{L}} \\ T_i(\omega_p) \Big|_{\omega_p = \frac{2}{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.45}{K_m} \sqrt{1 + \frac{4T_m^2}{L^2}} \\ \frac{L}{0.3} \end{pmatrix} \quad (24)$$

4. Z-N조정법(1), (2)의 비교

동일한 제어계에 대한 Z-N(1)조정법과 Z-N(2)조정법의 조정값을 비교하기 위해 제어대상의 계인과 시정수 및 시간지연을 $K_m=1$, $T_m=1.0[\text{min}]$, $L=0.5[\text{min}]$ 로 정한다. 이에 대한 ω_p 는 식(9)에 의해 $3.67[\text{rad/min}]$ 이고 임계계인 K_u 와 맥동주기 T_u 는 식(12)와 식(11)에 의해 각각 3.82와 $1.71[\text{min}]$ 이 된다. 이로부터 P, PI제어에 대해 Z-N(1)과 Z-N(2) 및 등가근사식에 의한 조정값을 각각 식(2), (3)과 식(13), (14) 및 식(23), (24)에 의해 구하면 그 결과는 Table 1과 같아진다.

Table 1에서 ω_p 가 실제의 값 그대로 작용하여 나타난 조정법(2)의 조정치에 대해 조정법(1)은 조금의 차이를 나타내고 있으며 등가 근사식으로 얻은 값은 조정법(1)과 거의 같은 결과를 보인다.

기본적으로 조정법(1)과 조정법(2)의 이러한 차이는 계인의 경우 ω_p 를 간략화하는 과정에서 전제되는 시간비 k 값의 고정화에서 이유를 찾을 수 있으므로 k 에 따른 조정법(1)과 (2)의 상관관계를 확인할 필요가 있다. 이를 위해 $L=0.5[\text{min}]$ 하에서 T_m 값을 변화시켜 각각에 대한 조정값을 구하면 결과는 Table 2와 같다.

Table 2에 나타난 조정법(1)과 (2)에 대한 P제어에서의 계인 결과를 k 에 따라 그 그래프로 비교하면 Fig.2와 같으며 Fig.3은 PI제어에서의 계인이 서로 비교된 것이다.

Fig.2 및 Fig.3에서 k 에 대한 계인값은 조정법(1)이 조정법(2)보다 더 큰 기울기로 변동이 크게 나타난다. 한편 식(23), (24)에 의한 등가 근사식에 의한 값들은 조정법(1)의 결과와 대부분에서 거의 일치됨을 보이며 k 가 1보다 작은 구간에서는 오히려 조정법(2)의 경향에 근접되고 있고 이러한 관계는 P, PI에서도 거의 동일한 형태로 비교된다. 대체로 제시된 근사식은 조정법(1)과 등가적임이 Fig.2와 Fig.3에 의해 확인되며 이를 통해 양 조정법에 대한 해석적 근사화에 대한 적정성이 잘 설명되고 있음을 알 수 있다. 조정법(2)와 근사식의 계인은 k 가 0일 때 0.5로 시작되고 조정법(1)과 (2)의 양조정법이 서로 동일한 계인값이 되는 k 의 위치는 1.6근처의 한 지점에서이다. PI제어의 적분시간을 양 조정법에 대해 나타내면 Fig.4와 같아진다.

Fig.4에서 조정법(1)과 근사식의 적분시간은 1.67로 고정되는 것에 대해 조정법(2)는 0.83을 시작으로 k 의 증가에 따라 근접

Table 1. P and PI Control Parameters by methods of Z-N(1), Z-N(2) and Approx. Formula for proposed process

	Z-N(1)	Z-N(2)	By Approx. Formula
P Control	$K_p = 2.0$	$K_p = 1.91$	$K_p = 2.06$
PI Control	$K_p = 1.8$ $T_i = 1.43[\text{min}]$	$K_p = 1.72$ $T_i = 1.67[\text{min}]$	$K_p = 1.85$ $T_i = 1.31[\text{min}]$

Table 2. Control Parameters by methods of Z-N(1), Z-N(2) and Approx. Formula according to variable $\frac{T_m}{L}$ values ($K_m=1.0$, $L=0.5[\text{min}]$)

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$T_m[\text{min}]$		0	0.25	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
T_m/L		0	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
ω_p [rad/min]		6.28	6.29	4.07	3.68	3.52	3.43	3.94
$2/L[\text{rad/min}]$		4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
Ku		1.0	1.86	2.27	3.81	5.37	6.93	8.48
P	$K_p(1)$	0	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
	$K_p(2)$	0.50	0.93	1.13	1.91	2.69	3.47	4.24
	Approx.	0.50	0.71	1.12	2.06	3.04	4.03	5.02
PI	$K_p(1)$	0	0.45	0.90	1.80	2.70	3.60	4.5
	$K_p(2)$	0.45	0.84	1.02	1.72	2.42	3.12	3.81
	Approx.	0.45	0.64	1.01	1.85	2.74	3.63	4.52
	$T_i(1)$	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67
	$T_i(2)$	0.83	0.83	1.29	1.42	1.49	1.53	1.54
	Approx.	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67

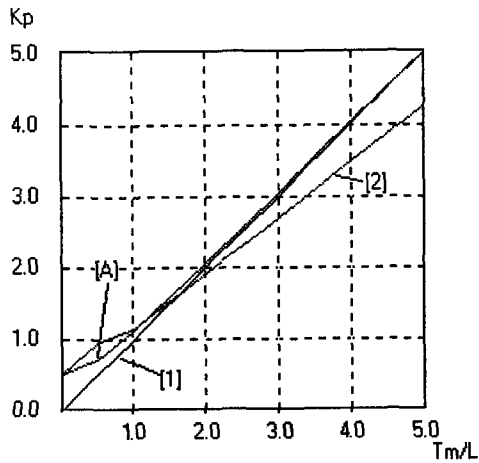


Fig.2 Gains by methods of Z-N[1], Z-N[2] and Approx. Formula [A] at P control ($K_m=1.0$, $L=0.5[\text{min}]$)

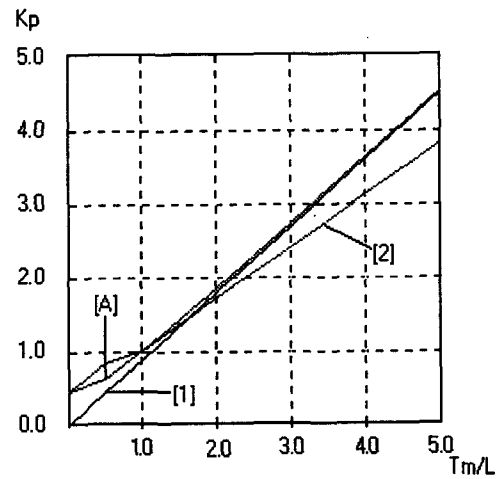


Fig.3 Gains by methods of Z-N[1], Z-N[2] and Approx. Formula [A] at PI control ($K_m=1.0$, $L=0.5[\text{min}]$)

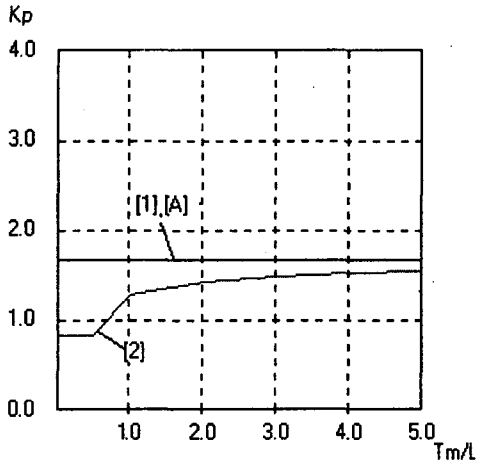


Fig.4 Reset Times by methods of Z-N[1], Z-N[2] and Approx. Formula [A] at PI control ($K_m=1.0, L=0.5[\text{min}]$)

되고 최종적으로는 1.67의 동일한 값으로 수렴되는 모양이 된다는 것을 읽을 수 있다.

5. 결론

지글러-니콜스의 조정법(1)과 조정법(2)가 제시하는 조정기준의 상호연관성을 직접 피드백 제어계에서 확인하기 위해 조정법(2)의 임계감도와 맥동주기를 주파수특성에 기초하여 수식화하였다. 이를 토대로 방법(1)에 대해 매개변수 의미로 작용하는 근사 임계각속도를 정한 후 양 조정법의 형태를 비교분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 안정한계 상태의 임계감도와 임계주기만으로 표현되는 조정법(2)를 제어대상의 파라미터에 의한 수식으로 나타낼 수 있으며 P, PI제어의 경우 각각 식(13)과 식(14)로 정리된다.
2. 제어계의 임계각속도 ω_p 는 $\frac{T_m}{L}$ 인 시간비 k에 따라 영향을 받지만 그 한계적 범위

는 $\frac{\pi}{2L} < \omega_p \leq \frac{\pi}{L}$ 이다.

3. 조정법(1)의 PI에 나타난 적분시간 기준은 임계각속도를 최소 경계값인 $\frac{\pi}{2L}$ 로 고정하여 조정법(2)의 적분시간 기준을 간략화한 형태임을 알 수 있다.
4. 조정법(1)에 나타난 계인의 기준은 임계각속도를 $\frac{2}{L}$ 로 추약하여 조정법(2)의 계인을 간략화한 결과라는 것을 알 수 있으며 한편 이 때의 k값은 1로 고정시킨 경우에 해당한다. 또한 근사식의 형태는 식(23), (24)와 같이 정리될 수 있었으며 이러한 근사식을 적용하여 비교한 결과 조정법(1)과 거의 일치된 것으로 나타나며 양 조정법의 해석적 관련성이 확인될 수 있었다.
5. k가 1.6근처일 때만 양 조정법에 의한 계인조정은 동일한 결과가 된다.

참고문헌

- [1] Ryuichi Kuwata, "An Improved Ultimate Sensitivity Method and PID; I-PD Control Characteristics", SICE Trans.(Japanese), Vol.23, No.3, pp232-239, 1987
- [2] Hidefumi Taguchi, Masateru Doi and Mitsuhiko Araki, "Optimal Parameters of Two-Degrees of Freedom PID Control Systems", SICE Trans.(Japanese), Vol.23, No.9, pp889-895, 1987
- [3] Masami Saeki and Daii Hirayama, "Parameter Space Design Method of PID Controller for Robust Sensitivity Minimization Problem", SICE Trans.(Japanese), Vol 32, No.12, pp1612-1619, 1996
- [4] P.J. Gawthrop, "Self-Tuning PID Controllers - Algorithms and

- Implementation", IEEE Trans. Automatic Control, AC-31-3, pp201-209, 1986
- [5] T.Yamamoto, S.Omatu and H.Ishihara, "A Construction of Self-Tuning PID Control Algorithm and Its Applications", Proceedings of SICE '89, ES15-1, pp1143-1146, 1989
- [6] J.G. Ziegler and N.B. Nichols, "Optimum Settings for Automatic Controllers", Trans. ASME, 64-8, pp759-768, 1942
- [7] Gene F. Franklin, J. David Powell and Abbas Emami-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems", Addison Wesley, 1994
- [8] Katsuhiko Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, 1997
- [9] 최순만, "조정파라미터 공간에서의 제어계 안정한계 특성", 한국박용기관학회지, 제25권 제2호, pp351-356, 2001
- [10] 강인철, 최순만, 최재성, "시간지연을 갖는 제어대상에 대한 P,PI제어의 유효 계인 조정범위에 관한 연구", 한국박용기관학회지, 제25권 제4호, 2001