한국박용기관학회 2001년도 추계학술대회 논문집

원추형 코일스프링의 강성에 대한 연구

◦김 진 훈*, 이 수 종**, 이 경 호***

A Study on the Stiffness of Frustum-shaped Coil Spring

J. H. Kim, S. J. Lee, K. H. Lee

* 부경대학교 대학원 정밀기계공학과
** 부경대학교 기계공학부
*** 부산산업학교 자동차과

Abstract : Springs are widely utilized in machine element. To find out stiffness of frustum-shaped coil spring, the space beam theory using the finite element method is adopted in this paper. In three dimensional space, a space frame element is a straight bar of uniform cross section which is capable of resisting axial forces, bending moments about two principal axes in the plane of its cross section and twisting moment about its centroidal axis. The corresponding displacement degrees of freedom are twelve. To find out load vector of coil spring subjected to distributed compression, principle of virtual work is adapted.

The displacements of nodal points due to small increment of force are calculated by the finite element method and the calculated nodal displacements are added to coordinates of nodal points. The new stiffness matrix of the system using the new coordinates of nadal points is adopted to calculate the another increments of nodal displacements, that is, the step by step method is used in this paper.

The results of the finite element method are fairly well agreed with those of various experiments. Using MATLAB program developed in this paper, spring constants and stresses can be predicted by input of few factors.

Key words : Frustum-shaped coil spring(절단된 원추형 코일스프링), Space beam element (선재요소), Step by step method(단계법), Local coordinates system(국소좌표계), Global coordinates system(중앙좌표계), Spring constant(스프링 상수), Transformation matrix(변환행렬)

기호설명

$\{\delta^e\}$: 중앙좌표계에서 요소의 절점변위벡터
$\{F^e\}$: 중앙좌표계에서 요소의 하중벡터
$[K^e]$: 중앙좌표계에서 요소의 강성행렬
$[k^e]$: 국소좌표계에서 요소의 강성행렬
F_u : 선재요소의 축방향으로 작용하는 분포하중
F_v : 선재요소의 축에 직각으로 각각 y방향으로 작용하는 분포하중
F_w : 선재요소의 축에 직각으로 각각 z방향으로 작용하는 분포하중
T_u : 요소의 축방향을 중심으로 요소에 균일하게 작용하는 비틀림모멘트
T_v : 요소의 y방향을 중심으로 요소에 균일하게 작용하는 비틀림모멘트
T_w : 요소의 z방향을 중심으로 요소에 균일하게 작용하는 비틀림모멘트
D_1 : 스프링의 최소 코일지름

D_2 : 스프링의 최대 코일지름

n : 스프링의 유효권수

G : 전단탄성계수

d : 스프링의 소선 지름

R_1 : 스프링의 최소 코일 반지름

R_2 : 스프링의 최대 코일 반지름

1. 서론

원추형 코일스프링은 형상이 간단하면서도 다양한 스프링력을 얻을 수 있으므로 자동차의 디프렌셜 와셔 또는 클러치 어셈블리에서의 리턴 스프링 그리고 프레스의 완충 스프링 등에 널리 사용되고 있는 기계요소이다.[1]

스프링의 해석은 근래에 이르기까지 주로 Wahl의 이론을 근거로 해석하였으나, 이 해석방법은 수정계수를 적용하는 근사식이므로 정확한 강성을 구하는 데는 유한요소법[2,3]이 유용하게 이용되고 있다. 선행 연구에서 선재 요소의 강성행렬을 구하고 이를 이용하여 인장을 받는 원통형 코일스프링을 해석한 바 있다.[4,5]

본고에서는 상측부가 절단된 형태의 코일에 대하여 압축 분포하중을 받는 원추형 코일스프링의 강성해석을 위하여 유한요소법을 적용하고, MATLAB으로 프로그래밍함으로써 코일스프링의 새로운 해석방법을 개발하고자 한다.

스프링 형상을 1차원 선재요소로 분할하였다. 하중에 의한 변위를 측정할 때 발생되는 비선형적인 부분에 대하여는 선형 연립방정식에 단계법(step by step method)을 적용하여 연속적으로 풀이한다.

샘플의 형상을 모델링하여 스프링 각부의 값을 개발한 프로그램에 입력하여 해석치와 실험치를 비교하였다.

스프링 강성에 영향이 예상되는 인자를 입력하면 설계자들이 간단히 시뮬레이션을 할 수 있으므로 스프링 설계시 매우 효과적인 도구로 쓰여질 수 있을 것으로 사료된다.

2. 유한요소 정식화

2.1 강성행렬

Fig. 1은 선재요소를 이용하여 원추형 코일스프링의 형상을 3차원 공간에서 구성한 것이다.

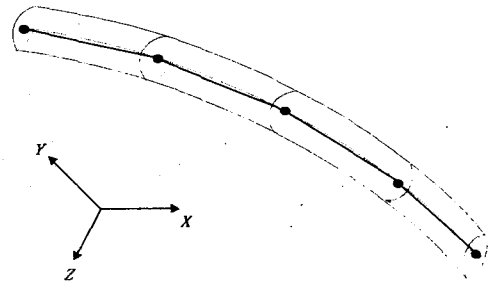


Fig. 1 One dimension element in three dimensional space

Fig. 2는 선재로 분할된 코일스프링을 이론에 따라 선재요소로 표시한 것이다.

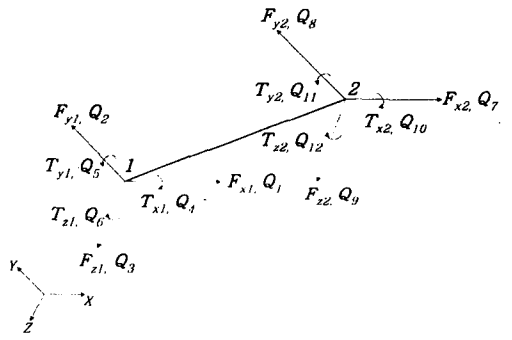


Fig. 2 Displacements and forces on a space beam element in global coordinates

빔 요소는 Fig. 2와 같이 두 절점을 1, 2로 표시하고 중앙좌표계에서 빔의 양단 절점 1, 2에서 변위벡터와 하중벡터를 빔요소의 벡터로 표시하면 다음과 같다.

$$\{\delta^e\} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \quad Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9 \quad Q_{10} \quad Q_{11} \quad Q_{12}\}^T \tag{1}$$

$$\{F^e\} = \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{z1} \quad T_{x1} \quad T_{y1} \quad T_{z1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{z2} \quad T_{x2} \quad T_{y2} \quad T_{z2}\}^T \tag{2}$$

국소좌표계에서 하중벡터에 의한 변위는 굽힘과 비틀림 이론에 따라 Fig. 3과 같이 x축 방향 변위 q_1과 q_7은 축방향 힘에, 비틀림 변위 q_4와 q_{10}은 비틀림 모멘트에 좌우된다.

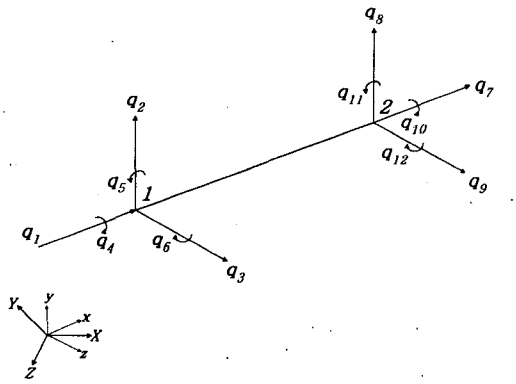


Fig. 3 Displacements of space beam element in local and global coordinates system

xy평면에서 굽힘변위 q_2, q_6, q_8, q_{12}는 y방향 전단력과 xz평면에 작용하는 굽힘모멘트와 xz평면에 작용하는 굽힘력의 영향을 받는다. 반면에 xy평면, xz평면은 단면의 주축과 일치하고 두 평면에서의 변위와 굽힘력은 각각 독립적으로 고려될 수 있다. 따라서 각각의 경우를 중첩하면 국소좌표계에서 12×12의 강성행렬을 구할 수 있다.

빔 요소의 전체강성행렬은 하중의 종류에 따라 각각 독립적으로 구한 식들의 강성행렬을 중첩하여 구하며, 다음과 같이 국소좌표계에서 빔 요소의 전체강성행렬 $[k^e]$을 구하였다. 이 값은 국소좌표계의 값이므로 이를 중앙좌표계로 변환하여야 한다.

2.2 변환행렬

중앙좌표계 XYZ는 Fig. 4에서 Y축에 대하여 XZ평면상에서 β만큼 회전하고, Z_β축에 대하여 $X_\beta Z_\beta$평면을 γ만큼 회전하여 x와 X_γ가 일치하도록 한다. 소재의 중립면이 $Y_\gamma Z_\gamma$평면상에서 x, X_γ축에 대하여 α만큼 회전한 것이 국소 좌표계 xyz이다. 전체의 변환행렬은 아래와 같다.

$$[T] = \begin{bmatrix} [T'] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T'] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T'] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T'] \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[T]' = [T_\alpha][T_\gamma][T_\beta] \quad (5)$$

y축에 대하여 XZ평면상에서 β만큼 회전할 경우 X축이 X_β축이 된다. X_β축은 XZ평면과 YX평면의 교차라인이며 Z축은 Z_β가 되고 Y축은 변화가 없다.

$$[T_\beta] = \begin{bmatrix} \cos\beta & o & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[k^e] = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_{zz}}{l^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_{yy}}{l^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GI}{l} & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{yy}}{l} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zz}}{l} & & & & & & \\
\frac{-EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 000 & \frac{EA}{l} & & & & & \\
0 & \frac{-12EI_{zz}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_{zz}}{l^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{l^3} & & & & \\
0 & 0 & \frac{-12EI_{yy}}{l^3} & 0 & \frac{-6EI_{yy}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{yy}}{l^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{-GI}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{l} & & \\
0 & 0 & \frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{2EI_{yy}}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{yy}}{l} & \\
0 & \frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{zz}}{l} & 0 & \frac{-6EI_{z}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zz}}{l}
\end{bmatrix} \quad (3)$$

sym.

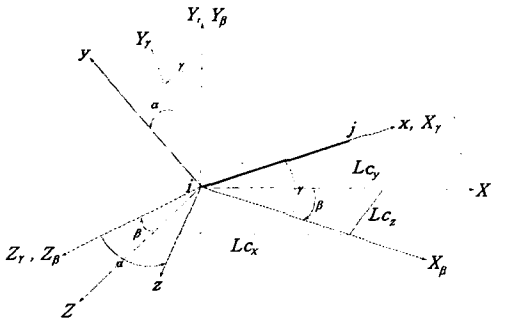


Fig. 4 Rotation transformation of axes for a 3-D beam element

Z_β축에 대하여 $X_\beta Z_\beta$평면을 γ만큼 회전하여 x가 X_γ와 일치하도록 한다. Z_γ축은 Z_β와 일치하고, $Y_\beta Z_\beta$ 평면상에서 y축, z축이 위치할 것이다.

$$[\ T_\gamma] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

소재의 중립면이 $Y_\gamma Z_\gamma$평면상에서 x, X_γ축에 대하여 α만큼 회전한 것이 국소좌표계 xyz이다. 이것은 x, X_γ축에 대하여 $Y_\gamma Z_\gamma$평면상에서 α만큼 회전한 경우의 변환행렬이므로 아래와 같다.

$$[\ T_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{c_x{}^2 + c_z{}^2}, \quad \sin\gamma = c_y$$

$$c_x = \frac{1}{L}(x_j - x_i)$$
$$c_y = \frac{1}{L}(y_j - y_i) \tag{9}$$
$$c_z = \frac{1}{L}(z_j - z_i)$$

따라서, 중앙좌표계에서의 요소의 강성행렬은 변환행렬 $[\ T]$를 이용하여 다음 식으로 구한다.

$$[K^e] = [\ T\ ]^T [\ k^e][\ T\ ] \tag{10}$$

절점력과 절점변위와의 관계는 가상일의 원리를 적용하면 다음과 같이 되며, 이 관계식을 풀면 중앙좌표계의 전체 변형량을 구할 수 있다.

$$\{F^e\} = [K^e]\{\delta^e\} \tag{11}$$

2.3 하중벡터

유한요소법에 있어서 하중벡터는 가상일의 원리를 적용하여 구한다.[6] Fig. 5와 같은 상측부가 절단된 원추형 코일스프링은 축방향의 인장이나 압축 같은 분포하중을 받는다. 따라서, 분포하중을 선재요소의 절점력으로 환산하여야 한다. 선재요소의 하중벡터를 $\{f^e\}$라 하고, 선재요소의 형상함수를 $[N]$이라 한다. Fig. 6에서 12자유도의 선재요소 절점 1, 2에서의 하중벡터는 아래와 같이 쓸 수 있다.

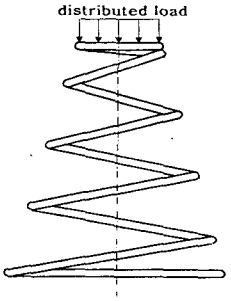


Fig. 5 Distributed load

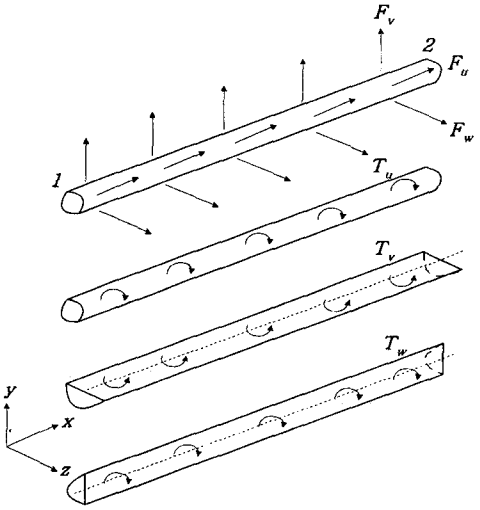


Fig. 6 Load vector in beam element

$$\{f\}^T = \{F_{x1}\ F_{y1}\ F_{z1}\ T_{x1}\ T_{y1}\ T_{z1}\ F_{x2}\ F_{y2}\ F_{z2}\ T_{x2}\ T_{y2}\ T_{z2}\} \tag{12}$$

$$\{f^e\} = \int_0^l [N]^T \begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ T_u \\ T_v \\ T_w \end{Bmatrix} dx \qquad (13)$$

식(13)에서 F_u는 선재요소의 축방향으로 작용하는 분포하중이며 F_v, F_w는 선재요소의 축에 직각으로 각각 y, z방향으로 작용하는 분포하중이다. T_u는 요소의 축방향을 중심으로 요소에 균일하게 작용하는 비틀림모멘트이다. T_v는 요소의 y방향을 중심으로 요소에 균일하게 작용하는 비틀림모멘트이다. T_w는 요소의 z방향을 중심으로 요소에 균일하게 작용하는 비틀림모멘트이다.

$[N]^T$는 선행 연구에서 아래와 같이 구하였다.

$$[N]^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ N_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{12} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l},\ N_2 = (2x^3 - 3lx^2 + l^3)/l^3,\ N_3 = N_2$$

$$N_4 = N_1,\quad N_5 = (x^3 - 2lx^2 + l^2x)/l^2,\ N_6 = N_5$$

$$N_7 = \frac{x}{l},\quad N_8 = -(2x^3 - 3lx^2)/l^3,\quad N_9 = N_8$$

$$N_{10} = N_7,\quad N_{11} = (x^3 - lx^2)/l^2,\quad N_{12} = N_{11}$$

식(14)를 식(13)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 요소 절점 1, 2에서 요소의 하중벡터를 구할 수 있다.

$$F_{x1} = \frac{l}{2} F_u,\ F_{y1} = \frac{l}{2} F_v,\ F_{z1} = \frac{l}{2} F_w$$

$$T_{x1} = \frac{l}{2} T_u,\ T_{y1} = \frac{l^2}{12} T_u,\ T_{z1} = \frac{l^2}{12} T_w$$

$$F_{x2} = \frac{l}{2} F_u,\ F_{y2} = \frac{l}{2} F_v,\ F_{z2} = \frac{l}{2} F_w$$

$$T_{x2} = \frac{l}{2} T_u,\ T_{y2} = -\frac{l^2}{12} T_u,\ T_{z2} = -\frac{l^2}{12} T_w$$

요소의 하중벡터를 구하였으므로 전체하중벡터는 이들을 조합하여 구한다.

3. 원추형 코일스프링의 해석

유한요소법으로 정식화된 식을 프로그래밍하였다. Fig. 7과 같이 원추형 코일 스프링의 형상을 133개의 절점으로 표시하였고, 132개의 요소로 분할하였다. Table 1, Table 2와 같은 사양과 경계조건을 적용하여 해석을 수행하였다.[7] 6가지의 하중에 따른 원추형 코일스프링의 변형 양상을 해석하여 가시적 결과를 Fig. 8에 나타내었다.

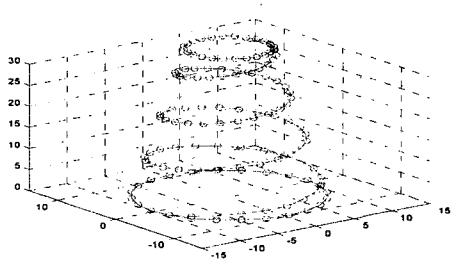


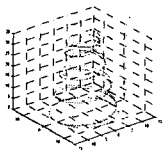
Fig. 7 Modeling of Frustum-shaped coil spring

Table 1 Specification of Frustum-shaped spring

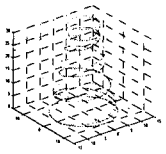
Items	Specification
Compression force (N)	10
Upper diameter : D_1 (mm)	9.42
Lower diameter : D_2 (mm)	20.75
Height : H (mm)	35.4
Coil material (mm)	1
Number of active coils	3.5
Young's modulus (GPa)	205.8
Shear modulus (GPa)	80
Number of element	132

Table 2 Boundary condition of model

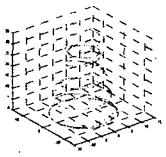
nodal point	displacement			distortion		
	x	y	z	x	y	z
109~132	fixed	free	fixed	free	free	free
133	fixed	fixed	fixed	fixed	fixed	free



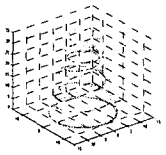
(a) F=1.76 (N)



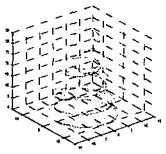
(b) F=2.744 (N)



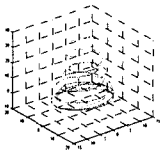
(c) F=4.41 (N)



(d) F=6.174 (N)



(e) F=8.036 (N)



(f) F=9.996 (N)

Fig. 8 Deformation of Frustum-shaped coil spring by compression load

4. 실험

Photo. 1은 본 연구에 사용된 스프링 시편을 나타낸 것이며, 재료사양과 치수는 Table 1과 Fig. 9에 나타내었다. Photo. 2는 실험에 이용된 스프링 시험기(FMC-A 200D)이다. 3가지의 샘플을 준비하여 각각 6단계에서의 변위를 설정하고 압축 분포하중을 측정하였다.

Photo. 1 Samples for Frustum-shaped coil spring

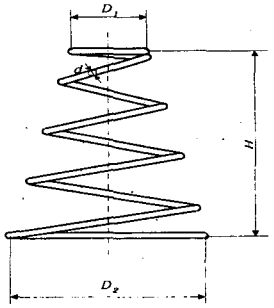


Fig. 9 Dimensions of specimen

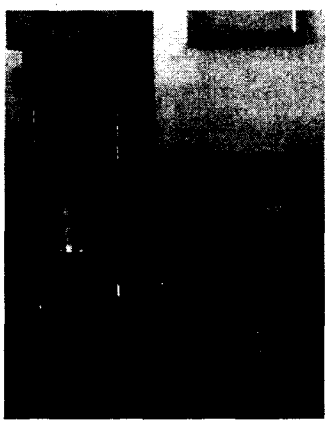


Photo. 2 General view of spring tester

5. 해석 및 고찰

원추형 코일스프링의 변위를 구하는 식은 다음과 같다.

$$\delta = \frac{16Pn}{Gd^4} \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2 - R_1} \quad (15)$$

해석치와 실험치 그리고 일반적인 이론식에 의한 결과를 비교하여 Table 3과 Fig. 10, Fig. 11에 나타내었다. 결과가 상호간에 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 3 Campare deformation

Item	Solid mechanics	Test	FEM
Displacement (mm)	15.6437	15.4	16.2025
Error(%)	0	1.56	3.57

Fig. 10에서 실험치와 해석치 모두가 서로 잘 일치함을 알 수 있다. 고전적 해석값과의 오차가 4%이내이므로 KS B 2405에서 규정한 스프링 상수의 허용차 1급 ±5%이내를 만족되어진다.[8]

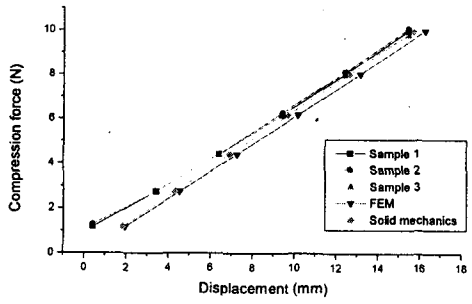


Fig. 10 Relationships between compression force and displacement for frustum-shaped coil spring

Fig. 11에서는 전체적으로 스프링상수가 해석치와 이론치가 비교적 일정한 패턴을 보였으나, 초기의 실험치는 해석치와 이론치와 비교하여 차이가 있다. 이것은 코일스프링의 제작 형상이 평행도, 직각도, 형상 공차에 의한 것으로 판단된다. 그러나 하중이 증가할수록 실험치와 해석값이 잘 일치함을 알 수 있다.

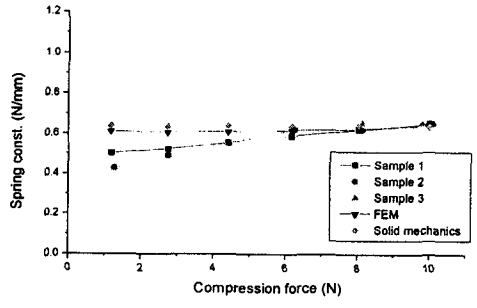


Fig. 11 Spring constant of frustum-shaped coil spring

6. 결론

이상과 같은 해석으로 다음의 결론을 얻었다.

1. 압축 분포하중이 작용할 때 12자유도 선재요소를 이용하는 유한요소해석은 압축을 받는 원추형 코일스프링의 강성을 파악하는데 유용하게 이용될 수 있다.
2. 압축 분포하중을 받는 원추형 코일스프링에 하중이 작용할 때 선재요소를 이용한 유한요소법으로 해석한 값과 실험에 의한 실측치와는 잘 일치하였다.
3. 스프링은 일반적으로 가느다란 소선으로 성형되고 재료의 지름에 비하여 외형의 지름이 커서 유연성이 큰 관계로 변위가 크므로 유한요소 해석시 기하학적인 비선형성을 고려하여야 한다.
4. 개발한 전산 프로그램을 이용하여 압축 원추형 코일스프링 이외의 비틀림 코일스프링, 토션바, 직선이 아닌 보, 자동차의 스테빌라이저 등의 물체도 적용하면 하중-변위의 상관 관계를 예측할 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

1) 成洛元, 周原植, "機械要素設計", 三省實業, pp417-434, 1991.
2) C. S. Krishnamoorthy, "Finite Element Analysis", Tata McGraw-Hill Publishing Co., pp237-250, 1995.
3) S. S. Rao "The Finite Element Method in Engineering", Pergamon Press, pp291-305, 1989.
4) S. J. Lee, J. S. Wang, "A study on the non-linearity of wave washer spring", 韓國舶用機關學會誌, 第21卷, 3号, pp246-255, 1997.
5) S. J. Lee, "A Study on the Stiffness of Coil Spring in the Three Dimensional Space", 韓國舶用機關學會誌, 第25卷, 5号, pp186-195, 2001.
6) S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, "Theory of Elaticity", McGraw-Hill,pp 284-288, 1959.
7) ばね技術研究會編, "ばねの有限要素解析", 日刊工業新聞社, pp73-110, 1997.
8) 韓國工業規格, "압축 및 인장 코일 스프링 설계 기준 KS B 2406", 한국표준협회, p1~7, 1990