

# 동하중조건에서의 다중격자 다중차원법을 이용한 점접촉 탄성유체윤활 유막두께연구

장 시 열

## Study of the Film Thickness in the Elastohydrodynamic Lubrication of Circular Contact under the Dynamic Loading Condition with Multigrid Multilevel Method

Siyoul Jang

**Key Words :** elastohydrodynamic lubrication, circular contact, dynamic loading, film thickness, multilevel multigrid method (MGML)

### ABSTRACT

Many research of elastohydrodynamic lubrication (EHL) has been performed under the condition of steady state loading. However, mechanical elements undergo severe high loads that are fluctuating in general. Conventional numerical method for the circular contact of EHL study has a difficulty in converging the film pressure and thickness especially in high load of steady state. In this work, multigrid multilevel method expels the convergence problem under the condition of high load and very stable convergence is obtained under the dynamic loading condition over  $1.0GPa$ . Several results of dynamic loading condition are shown and compared with those of steady state condition.

#### 기호설명

$A$	matrix containing the discrete operator
$a$	radius of Hertzian contact
$E'$	reduced modulus of elasticity
$h$	grid mesh size, film thickness
$h^*$	dimensionless film thickness ( $hR/a^2$ )
$L$	differential operator
$p$	pressure
$p_H$	Hertzian pressure
$p^*$	dimensionless film pressure ( $p/p_H$ )
$R$	Curvature of contact radius
$r^h$	discrete residual
$t$	time
$U^*$	dimensionless speed
$u_s$	sliding velocity
$W^*$	dimensionless load
$\eta$	viscosity
$x, y, z$	coordinates
$\omega$	relaxation factor
$\rho$	density
$\delta$	change due to relaxation

#### 1. 서론

지금까지의 점접촉에 대한 탄성유체윤활해석은 수치해석상의 어려움으로  $1.0 GPa$  이상의 고하중 접촉조건에서의 유막 두께와 유막압력의 계산은 매우 힘들어 그 수치해석이 불가능하였다. 그리고 실제 기계요소에 가해지는 작용하중은  $1.0 GPa$  이상인 경우가 많다. 따라서 기존의 수치해석 결과의 실제 요소설계의 응용은 다소 현실성이 결여되어 있었다. 이러한 측면에서 저하중의 탄성유체윤활 해석 결과를 이용하면 접촉 재료의 강도 설계 및 윤활유의 성능에 따른 틈새 설계는 그 신뢰도를 잃게 된다. 따라서 수치해석상의 현실적 정보제공의 요구는 고정밀, 고속, 고성능 및 고내구성의 기계요소의 개발 필요성에 따라 증가하게 된다.

고하중의 접촉조건에서 탄성유체윤활해석의 필요성 뿐만 아니라 변동하중 조건에 대한 접촉 현상의 규명도 정밀 기계요소설계에 있어서 중요한 설계 고려사항이다. 그 이유는 고성능의 기계요

소는 정하중의 조건에서 작동 되는 경우가 드물기 때문이다.

변동하는 고하중 조건에서의 접촉현상을 이론적으로 규명하기 위해서는 지금까지 많이 사용하였던 수치 해석법인 뉴턴-랩슨법 (Newton-Raphson method) 으로는 상당한 어려움이 있었다. 이 방법은 초기에 수렴해에 빨리 도달할 수 있는 장점을 갖고 있지만 여러가지 문제점이 있다. 특히 격자 수 (grid number) 에 따른 배열의 크기 문제점이 있으며, 시스템의 비선형성 (non-linearity) 이 커지면 수렴해에 근사값까지는 빠르게 도달하나 수렴해에 근접하면 과도한 under relaxation 에 의하여 그 속도가 매우 느리게 되는 단점이 있다. 또한 고하중하에서는 과도한 하이완법에 의한 반복적인 계산에 따라 내재적 오차로 수렴성에 불안정성을 야기한다.

고하중의 탄성유체유허에서는 틸새에서의 유허유가 집중압력에 의하여 순간적으로  $\sim 10^4$  는  $\sim 10^5$  정도의 크기로 커지며 이러한 점이 수치해석상에 과도한 비선형성을 야기시킨다.

계산 영역의 격자수가 커짐에 따라 반복 계산과 과도한 하이완법에 따른 내재적 오차를 극복하는 방법으로 최근에 비선형 편미분 방정식의 수치해석적 방법으로 다중격자 다중차원법 (multigrid multilevel method) 이 많이 사용되는데 고하중의 탄성유체유허해석에서도 이러한 수치해석법을 성공적으로 적용할 수 있다. 이 방법의 커다란 장점은 점접촉 탄성유체유허하에서와 같이 계산 영역 안에서 상대적으로 압력의 변화가 급격하게 변하는 부분에서는 시스템의 비선형성 증가가 두드러지는데 이완법 (relaxation method)의 선택적 적용으로 수렴해를 안정적으로 얻을 수 있다. [1],[2],[3]

본 연구는 1.0GPa 이상의 고하중에서 주기함수로 하중이 변하는 조건에서 유막 두께와 유막 압력이 정상 상태일 때와 다르게 나타나는 결과를 보여주며, 이러한 측면이 실제 고정밀 기계요소의 틸새 설계에서는 단순히 정상 상태의 하중 조건에 따른 해석결과로는 미흡한 점이 있다는 것을 보여주고자 한다.

## 2. 동하중 점접촉 탄성유체유허의 모델

이상적인 경우의 점접촉 탄성유체유허는 접촉 표면이 완전 매끄러운 (perfectly smooth) 형태와 정하중 (static load)의 조건에서 운전하게 된다. 그러나 공학적 마찰면은 완전 매끄러운 표면이 아닐 뿐만 아니라 작용 하중도 변하게 된다. 일반적으로

로 시간종속 (time dependent) 점접촉 레이놀즈 방정식 (Reynold's equation) 은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_s \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

표면 거칠기의 영향을 고려한다면 유막 두께  $h$  에 대한 보정이 필요하다. 그러나 본 연구에서는 접촉 표면이 완전 매끄러운 형태에서 미끄럼 운동을 하고 주기함수 (sin 파형)의 하중을 받을 때 유막 두께와 유막 압력의 변화량을 알아본다.

접촉 압력이 매우 크므로 유막 압력에 의한 접촉 표면의 탄성 변형은 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$h(x, y) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \frac{2}{\pi E'} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (2)$$

다음의 무차원 변수를 이용하여 식(1) 과 (2)를 무차원 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{a}, \quad y^* = \frac{y}{a}, \quad p^* = \frac{p}{p_H}, \quad h^* = \frac{hR_x}{a^2}, \\ \eta^* &= \frac{\eta}{\eta_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad t^* = \frac{tu_s}{a} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \left( \xi \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \xi \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) - \frac{\partial(\rho^* h^*)}{\partial x^*} - \frac{\partial(\rho^* h^*)}{\partial t^*} = 0 \quad (4)$$

여기서

$$\xi = \frac{\rho^* h^{*3}}{\eta^* \lambda} \quad \text{이며 } \quad \lambda = \frac{12u_s \eta_0 R_x^2}{a^3 p_H} \quad \text{이다.}$$

압력에 대한 유허유의 점도 변화는 Roleands 압력-점도 변화의 관계식을 사용하였으며, 압력에 대한 유허유의 밀도 변화는 Dowson-Higgison 관계식을 사용하였다. [2]

접촉 표면의 미끄럼 구름 속도비는 0.25 이며 점접촉의 이동은 다음의 무차원 식으로 표현할 수 있다.

$$x^* = x_s^* + 2.0 u_{2s} t^* \quad (5)$$

여기서  $u_{2s} = \frac{u_2}{u_s}$ , 이며  $u_s = u_1 + u_2$  이다.

유막 압력이 상당히 커지는 Hertz 접촉 부위에서는 점도의 승수 함수에 의한 과도한 증가로 인

하여  $\xi$ 의 값이 영의 값으로 접근하게 된다. 이러한 점이 탄성유체유험해석의 수렴성에 어려움을 발생시키는 부분인데, 계산 영역안에서 급격하게 변하는  $\xi$ 의 값에 기인한다.

동하중 조건에서 접촉 면적에 나타나는 유막 압력은 접촉 두께의 변화량으로 나타난다. 따라서 레이놀즈 방정식에서 비정상 상태를 나타내는 항인  $\partial(\rho h)/\partial t$ 의 변화를 규명해야 동하중하에서의 유막압력을 계산할 수 있다. 하중이 시간  $\Delta t^*$ 의 간격을 갖고 변함에 따라 유막 압력과 유막 두께를 계산하여야 하는데  $\partial(\rho h)/\partial t$ 의 이산화는 다음과 같이 처리한다.

$$\left. \frac{\partial(\rho^* h^*)}{\partial t^*} \right|_{k,j,j} = \frac{(\rho^* h^*)_{k,j,j} - (\rho^* h^*)_{k-1,j,j}}{\Delta t^*} \quad (6)$$

각각의 시간 간격에서는 비선형 시스템의 해법으로 많이 사용되는 Full Approximation Scheme (FAS)으로 해석할 수 있다. 그러나 비정상 상태를 나타내는 항인 식 (6)의 처리는 정상 상태의 계산과 달리 이전 시간 간격의 미세 격자 영역 (fine grid)의 수렴해를 현재의 시간 간격의 큰 격자 영역(coarse grid)으로 변환시켜 계산을 반복하는 F-cycle의 계산 순서에 따른다.

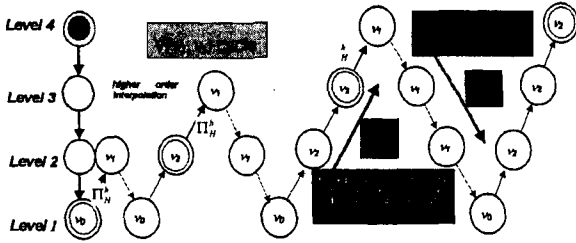


Figure 1 Full approximation scheme for transient MGML method with F cycle

### 3. 고하중 조건에서의 수렴해를 위한 분배 이완법 (distributive relaxation)의 적용

Hertz 접촉 주위 부분인 유험유 유입 부분에서는 식(4)에서  $\xi$ 의 값이 크게 나타나는데 이때 식 (4)은 poisson 방정식의 형태를 갖게 된다. 이 경우 유막 두께 대한 강한 연계성을 갖는 방향으로 Gauss-Seidel 이완법을 적용한다. 즉, 계산영역에서 강한 연계성을 갖는 방향 ( $y^*$  값이 일정한 방향)에서 압력을 동시에 계산한다. 그리고 유막 압력에

대한 접촉 고체면의 탄성 변형량은 압력이 가해지는 거리에 로그 함수의 반비례적으로 급속하게 감소하기 때문에 영향이 큰 주변의 몇 개 압력만을 고려한다..

$$\bar{p}_{i,j}^{*h} = \tilde{p}_{i,j}^{*h} + \omega_{gs} \delta_{i,j}^h \quad (7)$$

$$\delta_{i,j}^h = r_{i,j}^h \left( \frac{\partial(L^h p^*)_{i,j}}{\partial p_{i,j}^{*h}} \right)^{-1} \quad (8)$$

$$r_{i,j}^h = -\xi \frac{\bar{p}_{i-1,j}^{*h} - 2\tilde{p}_{i,j}^{*h} + \bar{p}_{i+1,j}^{*h}}{h^2} - \xi \frac{\bar{p}_{i,j-1}^{*h} - 2p_{i,j}^{*h} + p_{i,j+1}^{*h} + 1.5h_{i,j}^{*h} - 2h_{i-1,j}^{*h} + 0.5h_{i-2,j}^{*h}}{h^2} + \frac{1.5h_{i,j}^{*h} - 2h_{i-1,j}^{*h} + 0.5h_{i-2,j}^{*h}}{h} \quad (9)$$

일정한  $y^*$  값 방향에서 유막 압력을 계산하기 위한 방정식은 다음과 같다.

$$A^j \delta_j^h = r^h \quad (10)$$

여기서

$$A_{i,k}^j = \frac{\partial(L^h p^*)_{i,j}}{\partial p_{k,j}^{*h}} \quad \text{이다.} \quad (11)$$

그러나 Hertz 접촉 부분에서는  $\xi$  값이 상당히 작아 위에서 설명한 방법으로는 안정적인 수렴해를 구할 수 없다. 이러한 경우에 다음의 Jacobi 분배 이완법 (Jacobi distributive relaxation)의 적용으로 안정적인 수렴해를 구할 수 있다.

$$A_{i,k}^j = \frac{\partial(L^h p^*)_{i,j}}{\partial p_{k,j}^{*h}} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial(L^h p^*)_{i,j}}{\partial p_{k+1,j}^{*h}} + \frac{\partial(L^h p^*)_{i,j}}{\partial p_{k-1,j}^{*h}} + \frac{\partial(L^h p^*)_{i,j}}{\partial p_{k,j+1}^{*h}} + \frac{\partial(L^h p^*)_{i,j}}{\partial p_{k,j-1}^{*h}} \right) \quad (12)$$

$$\bar{p}_{i,j}^{*h} = \tilde{p}_{i,j}^{*h} + \omega_{ja} (\delta_{i,j}^h - (\delta_{i+1,j}^h + \delta_{i-1,j}^h + \delta_{i,j-1}^h + \delta_{i,j+1}^h)/4) \quad (13)$$

따라서 계산영역에서  $\xi$ 의 값에 따라 유막 압력에 대한 시스템 방정식은 식(11)과 식(12)에 의하여 결정되며  $\xi$ 가 작은 경우 Jacobi 이완법이 적용되는 점이 기존의 수치 해석 상의 절차와 다르다.

### 4. 결과

Sine 함수의 변동 하중이 작용할 때 점접촉 탄

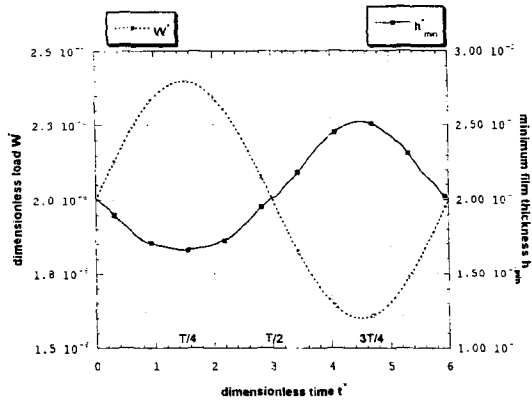


Figure 2 Variation of minimum film thickness under the steady state condition

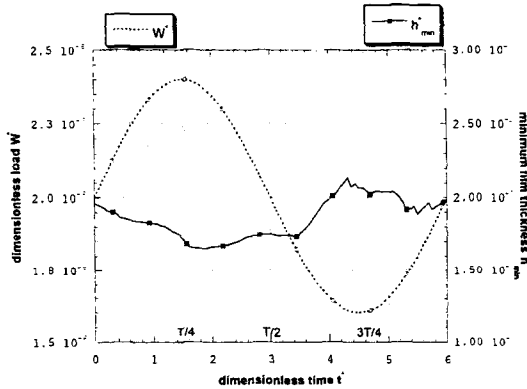


Figure 3 Variation of minimum film thickness under the transient condition

성유체윤활 유막 두께의 변화와 유막 압력의 변화를 계산하였다. 같은 조건하에서의 정상 상태의 유막 두께와 유막 압력을 비교하였는데 레이놀즈 방정식에서의 비정상 상태를 나타내는 항의 영향을 고찰할 수 있다. 작용하중은  $1.0GPa$  ( $W^*=2.0 \times 10^{-6}$ ,  $U^*=5.0 \times 10^{-12}$ ) 상당의 하중이 가해지는 조건에서 계산하였으며 동하중의 진폭은 전체 하중의 20% 정도의 크기이다.

정상상태의 작용하중 조건에서 최소 유막 두께는 하중 크기에 반비례적으로 규칙적인 변화를 나타낸다. 그러나 비정상 상태의 조건에서는 하중 변화의 진폭에 대하여 최소 유막 두께는 비교적 완만한 변화를 보여주고 있는데 이것은 레이놀즈 방정식에서 비정상 상태를 나타내는 항의 영향 때문이다.

한 주기 동안 ( $0, T/4, T/2, 3T/4$ )의 유막 두께와 유막 압력을 정상상태와 비정상 상태를 자세히 비교할 수 있다. (Figure 4 - 15)

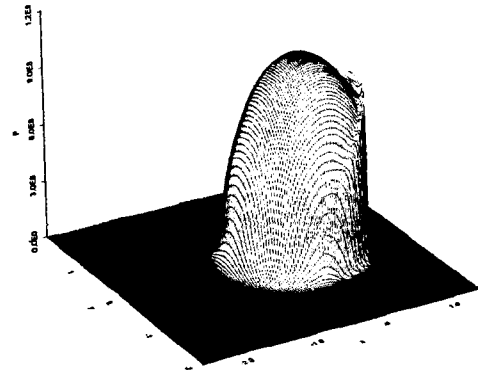


Figure 4 Film pressure for the transient solution at  $T=0$

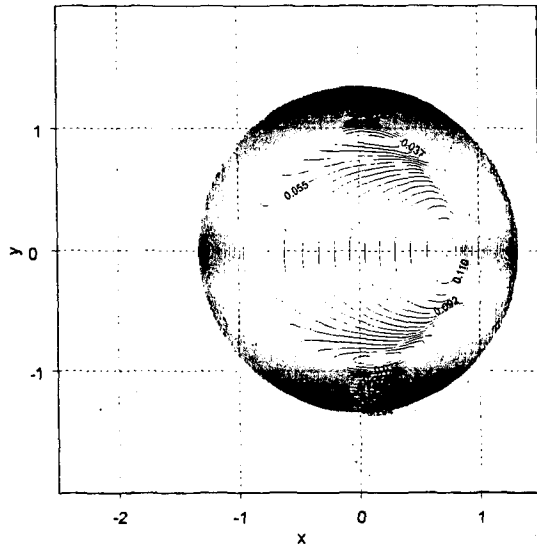


Figure 5 Film thickness for the transient solution at  $T=0$

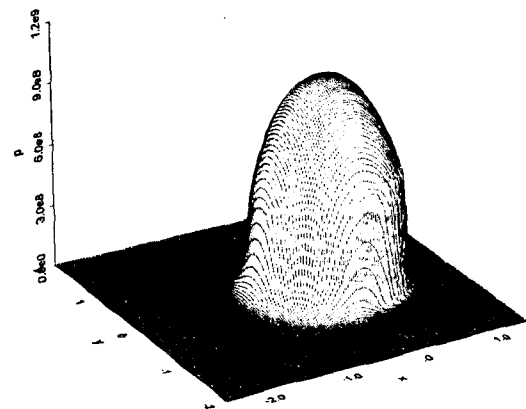


Figure 6 Film pressure for the steady solution at  $T=0$

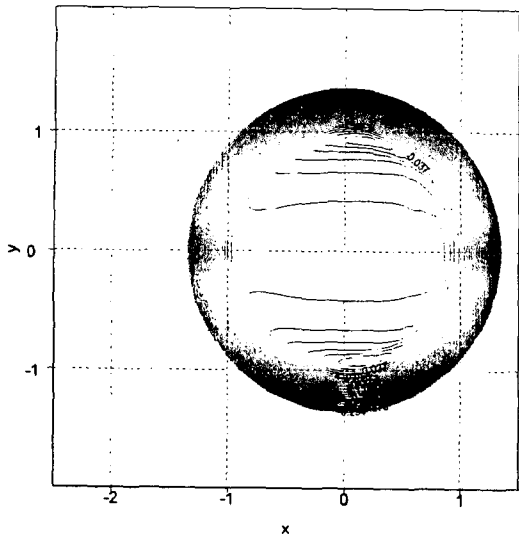


Figure 7 Film thickness for the steady solution at  $T=0$

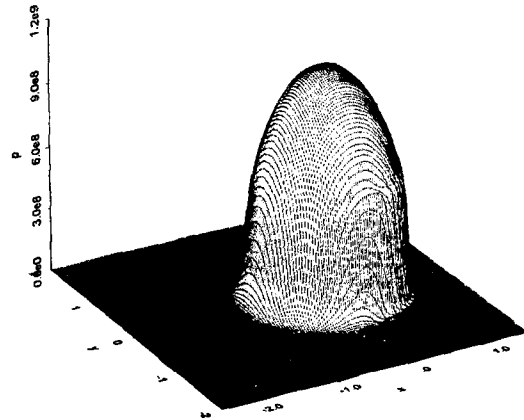


Figure 10 Film pressure for the steady solution at  $T/4$

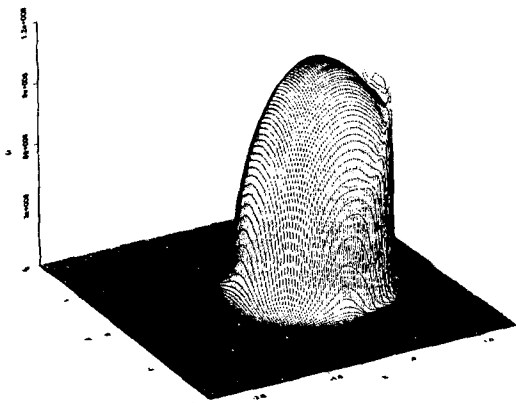


Figure 8 Film pressure for the transient solution at  $T/4$

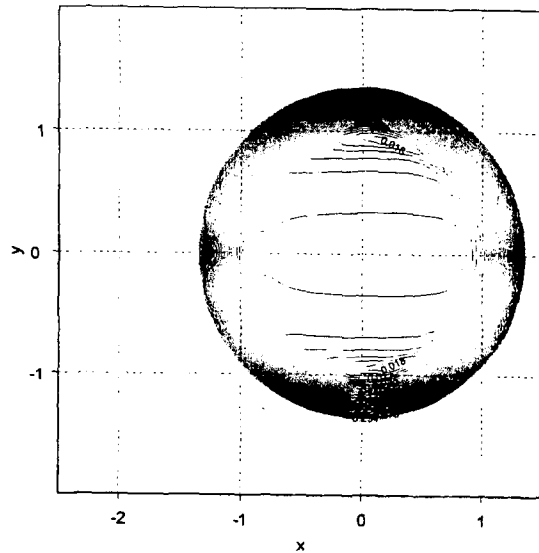


Figure 11 Film thickness for the steady solution at  $T/4$

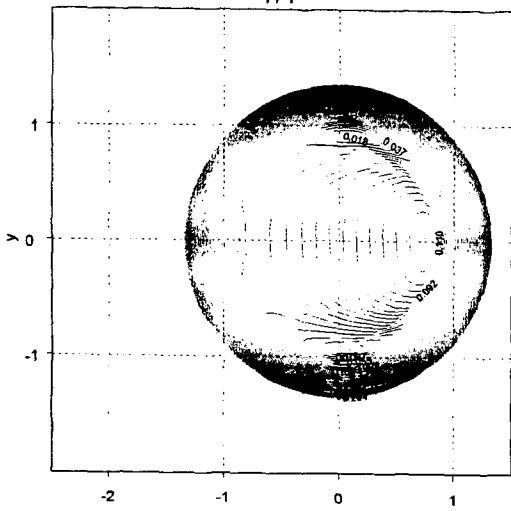


Figure 9 Film thickness for the transient solution at  $T/4$

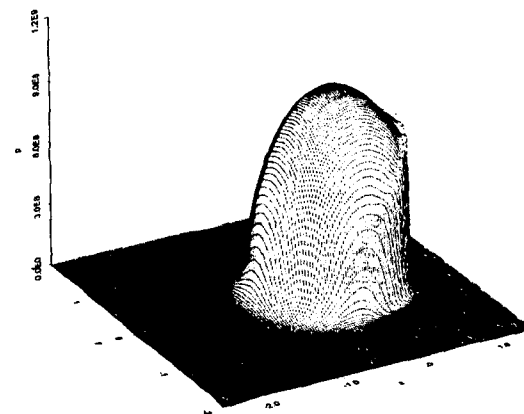


Figure 12 Film pressure for the steady solution at  $3T/4$

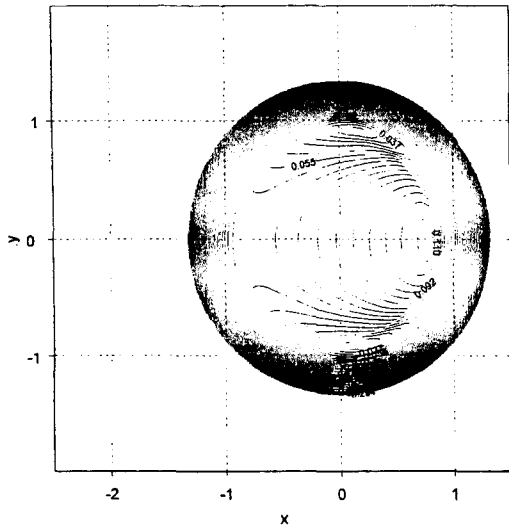


Figure 13 Film thickness for the transient solution at 37/4

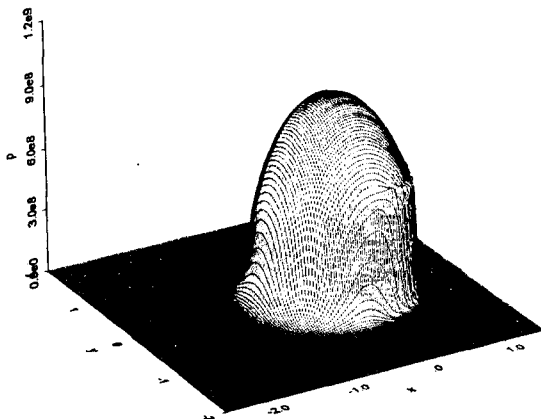


Figure 14 Film pressure for the steady solution at 37/4

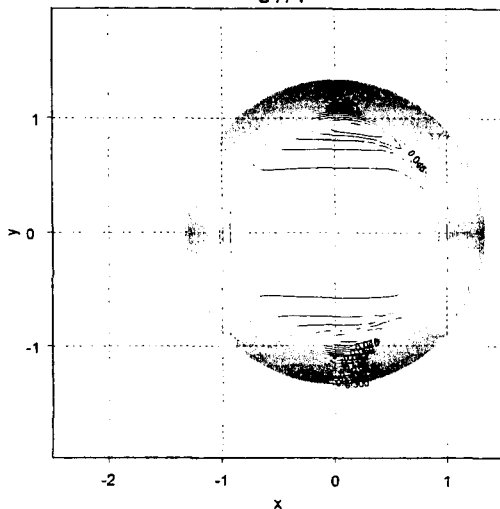


Figure 15 Film thickness for the steady solution at 37/4

정상상태일 경우 유막 압력이나 유막 두께는  $T=0$  일 때와  $T/2$  일 때는 같다. 정상 상태의 유막 두께는 Hertz 접촉면에서 평탄한 전형적인 형태를 갖고 있다. 유막 압력도 Hertz 접촉면에서 윤활유의 출구 부분에서 나타나는 압력 스파이크 (spike) 는 비정상 상태의 경우 보다 작게 나타나고 있다. 비정상 상태의 유막 두께는 접촉면에서 윤활유 유입 방향으로 완만한 경사를 이루는데 정상 상태의 유막 두께와 전혀 다른 양상을 보여주고 있다. 최소 유막 두께도 하중이 증가하다 감소하는 순간 정상 상태의 유막 두께와 달리 유막 두께의 증가율은 그다지 크게 나타나지 않는다.

## 5. 결론

본 연구는 점접촉 탄성유체윤활에서 정상상태와 비정상 상태의 유막 두께와 유막 압력에 대하여 연구 하였다. 일반적으로 정상 상태의 유막 두께와 유막 압력의 계산 결과를 이용하여 고정밀 기계요소의 틈새 설계에 응용을 하는데 이것은 작용 하중의 변화 형태를 고려하지 않았기 때문에 정확한 해석이라 볼 수 없다. 본 연구는 이러한 점을 부각하여 비정상 상태의 접촉 현상에 대한 예를 주기함수의 변동하중의 예를 들어 계산 결과를 보여주었다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(2000-1-30400-005-3)지원으로 수행되었음

## 참고문헌

- (1) Venner, C. H., Lubrecht, A. A. Napel, W. E., "Numerical Simulation of the Overrolling of a Surface Feature in an EHL Line Contact," *Journal of Tribology*, Vol. 133, pp777-783, 1991
- (2) Venner, C. H., Ten napel, W. E., and Bosma, R., "Advanced Multilevel Solution of the EHL Line Contact Problem," *Journal of Tribology*, pp 426-432, 1990
- (3) Ehret, P., Dowson, D., Taylor, C. M. and Wang, D., "Analysis of Isothermal Elastohydrodynamic Point Contact Lubricated by Newtonian Fluids using Multigrid Methods," *Journal of Engineering Tribology*, Vol. 211, pp493-508