

# TiN 박막의 탄소성 유한요소해석

김정실, 김석삼\*

경북대학교 대학원 기계공학과, \*경북대학교 기계공학부

## Elastic-Plastic Finite Element Analysis of TiN Thin Film

Jung-Sil Kim, Seock-Sam Kim\*

Graduate School, Department of Mechanical Engineering,  
Kyungpook National University, Daegu, Korea

\*School of Mechanical engineering, Kyungpook National Univ. Daegu, Korea

**Abstract**— Elastic-Plastic Finite element analysis is performed about the TiN coated medium. The normal contact is simulated by a rigid asperity pressing the surface of an elastic-plastic half-surface. The case of a surface film stiffer than the substrate is considered, and general solutions for the subsurface stress and deformation fields are presented for several coating thickness. Additionally, the critical normal loads for deformation in the substrate and coating fracture are calculated when the yield of TiN film follows the Maximum Principal Stress Theory and Von Mises Theory. The results can be subsumed in failure maps for TiN thin film on steel.

**Key words** : TiN, Failure map, Elastic-Plastic, Finite element Method

### 1. 서론

산업 전반에 널리 이용되고 있는 경질 박막 코팅 중 TiN 코팅은 내구성 및 내마모성을 증가시키고, 여러 가지 기계부품과 자동차 부품, 산업용품 및 생활 용품, 의료용 장비, 장식품 등에 이르기까지 그 적용 범위가 매우 방대하다. 컴퓨터의 발달로 인하여 수치해석 기법이 응용되기 시작하면서, 유한요소법을 이용한 연구가 활발히 진행되고 있다. 또한 표면손상과 같은 미시적 관점에서

의 연구는 실험의 어려움으로 유한요소법을 이용한 이론적인 연구는 활발히 진행되고 있다.

균질한 재료에 대한 탄성 접촉 응력 해석은 지난 수십 년간 많은 연구가 이루어졌었다. 하지만 실제 다양한 기계 부품의 설계와 이용에서는 탄성변형보다 소성변형이 더욱 중요한 요인으로 고려되고 있다. 그러므로 소성역 구간과 소성 응력 분포의 계산은 매우 중요하다[1]. 코팅된 재료가 미끄럼 접촉하는 경우에 대해 King과 O'Sullivan은 최소자승법에 의해 준평형 상태에서의 2차원 응

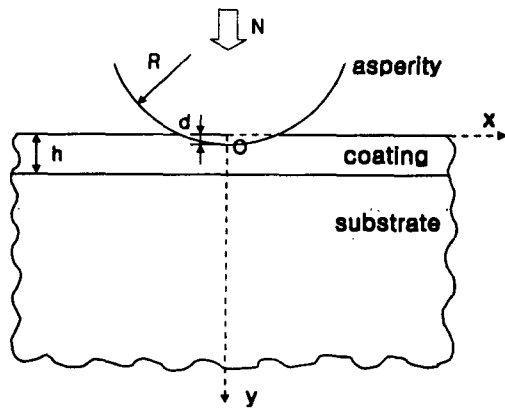


Fig. 1 Schematic of the indentation of a coated material by a asperity

력을 해석을 하고 Von Mises stress의 분포를 조사하였다[2]. Hong과 Saka는 유한요소법을 이용하여 두 층(two-layer)으로 코팅된 반무한체의 탄소성 해석을 통해 수직 하중과 마찰계수의 영향에 대한 연구를 하였다[3]. Diao는 탄성 미끄럼 접촉하에서 경질 코팅층과 모재의 응력분포를 계산하여 코팅두께와 재료의 항복강도에 따른 항복 선도를 제시하였다[4].

기존의 많은 연구를 통해 코팅의 응력 해석은 선행되었지만, TiN 코팅의 접촉문제에 대한 구체적인 연구와 코팅/모재 복합체의 손상에 대한 연구는 미비한 실정이다.

일반적으로 코팅/모재 복합체의 경우 모재의 성질에 기초하여 하나의 지배방정식으로 항복을 평가하는데, 연성의 모재와 경질 코팅 복합체의 경우 두 재료의 성질과 특성이 매우 다르므로 각 재료에 적합한 이론에 기초하여 손상을 평가할 경우에 보다 정확한 해석 결과를 얻을 수 있고, 이를 설계에 이용할 수 있을 것이다.

따라서 본 연구에서는 유한 요소법을 이용하여 다양한 코팅두께를 가진 코팅/모재 복합체가 실린더형 압자에 의해 수직하중을 받

Table 1. Elastic and plastic mechanical properties of materials

|                             | steel | TiN   |
|-----------------------------|-------|-------|
| Elastic Modulus(GPa)        | 200   | 640   |
| Poisson's Ratio             | 0.3   | 0.25  |
| Density(kg/m <sup>3</sup> ) | 7,900 | 5,430 |
| Yield Strength(MPa)         | 220   | 5,000 |
| Tensile Strength(MPa)       | 430   | -     |
| Plastic Coefficient(MPa)    | 700   | -     |
| Strain Hardening Exponent   | 0.2   | -     |

는 경우 탄소성해석을 통해 두께에 따른 접촉 압력분포와 내부 응력을 조사하고, 응력 해석 결과를 토대로하여 코팅과 모재 두 재료를 하나의 항복이론에 의해 평가한 경우의 Failure Map(손상선도)와 두 재료에 각각 서로 다른 항복이론에 의해 평가한 경우의 손상 선도를 비교하면서 최초로 손상이 발생할 때의 임계하중에 대해서 알아보하고자 한다.

## 2. 문제 해석

### 2.1 해석 모델 및 좌표계

두 물체의 접촉 계면을 미시적 관점에서 보면 수십 만개의 미소 돌기가 접촉하고 있다는 것을 알 수 있다. Fig. 1은 본 연구의 해석 모델과 좌표계, 사용된 기호를 나타내었다. 즉, 두 물체의 접촉면에서 본 연구의 주 관심부분인 코팅/복합체의 부분을 반무한체로 가정하고, 그 위에 수직하중을 받는 돌기를 반구의 형상으로 가정하였다. 그리고 접촉부분을 원점으로 한 직교좌표계를 사용하였다.

TiN 코팅은 0.25~2 $\mu$ m로 다양한 두께를 가진 박막에 대해 조사하였다. 그리고 돌기 반지름은 트라이보시스템에서 일반적인 표면

돌기와 마멸입자의 크기인  $30\mu\text{m}$ 로, 변형이 없는 강체로 모형화 하였다.

Table 1.은 해석에서 사용된 재료의 물성치이다. 코팅재과 모재는 탄성계수와 프아송비를 이용하여 탄성 물성치를 정의하였고, 연성재료인 모재의 경우 인장시험으로 얻을 수 있는 소성계수와 가공경화지수로서 나타낸 소성곡선으로 소성 물성치를 정의하였다. 일반적인 소성곡선은 다음과 같은 지수함수로 나타낼 수 있다.

$$\sigma = C \varepsilon^n$$

여기서 C는 소성계수, n은 가공경화지수이다.

## 2.2 유한 요소 모델

접촉한 압축력을 받는 돌기와 접촉한 코팅층을 가진 반무한체는 Fig. 2와 같이 모델링 하였다. 본 연구에서는 단지 수직접촉만을 고려하였기 때문에, 접촉부분은 y축대칭 형상이므로 축대칭요소를 사용하여 전체의 1/2만 모형화하고, 대칭면의 x축 변위를 0으로 두었다[5]. 사각형의 4절점 변형요소로 된 2차원 평면 변형요소 사용하였고, 절점은 25985~43911개, 요소는 25039~42959개로 코팅층의 두께에 따라 조금씩 다르게 모델링하였다.

해석의 주 관심부분인 접촉면 바로 아랫부분의 요소는 매우 세분화하였으며, 접촉부위와 먼 거리에 있는 부분은 상대적으로 큰 요소를 사용함으로써 계산시간을 줄였다[6]. 유한요소 해석 프로그램으로는 MSC. MARC 2000을 이용하였고, 전후처리 프로그램으로는 MSC. MARC Mantat 2000을 이용하였다.

## 3. 결과 및 고찰

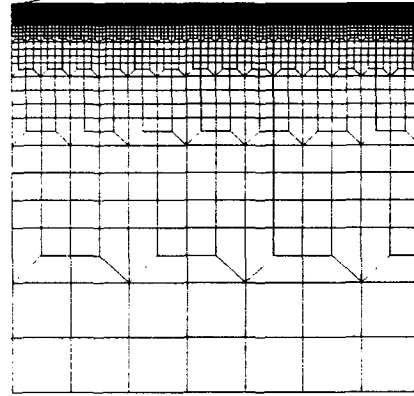


Fig. 2 Finite element mesh of half-space and asperity

### 3.1 접촉 응력 분포

접촉문제 해석에서 접촉압력 분포는 접촉 형상, 재료의 물성치, 접촉력 등에 따라 다르게 나타나는데, 접촉압력 분포에 대한 정확한 묘사는 모재의 응력과 변형률을 계산을 위해 기본적으로 필요하다[1].

강체의 돌기와 반무한체의 접촉부분에서 접촉 압력분포는 탄성 해석의 경우 반타원 형상이었으나 탄소성 해석의 경우 소성변형에 의해 압력분포의 형상이 불규칙적으로 나타났다. 코팅하지 않은 순수 모재(bulk)와 코팅된 모재, 코팅의 두께에 따라 각각 다른 접촉 압력분포를 보였다.

Fig. 3은 코팅하지 않은 경우에 대해, Fig. 4는 코팅된 경우의 접촉압력분포이다. 접촉 압력은  $Y_s/\sqrt{3}$ 와 크기가 같은 모재의 전단 강도( $k_s$ )를 이용하여 정규화하였다. 순수모재의 경우 코팅된 재료와 비교하여 상대적으로 매우 작은 접촉력에 의해서도 소성변형이 크게 나타남을 알 수 있었다.

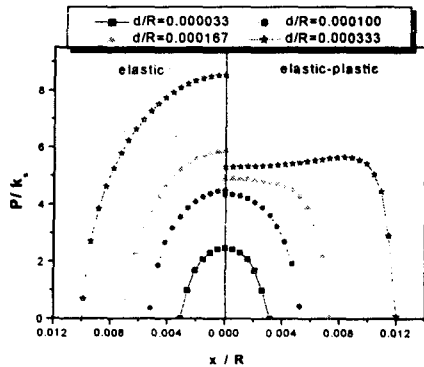


Fig. 3 Elastic and elastic-plastic solution of the contact pressure distribution corresponding to the un-coated medium

.코팅두께와 압입 깊이에 따라 접촉 압력분포는 조금씩 다르지만, 탄소성 해석의 경우 소성의 영향에 의한 접촉 압력분포 형상은 비슷한 형태로 나타났다. 압입 깊이가 같을 때 코팅두께가 비교적 얇은 경우( $h=0.25, 0.5 \mu\text{m}$ )에는 접촉부의 중심에서 탄성해석과 탄소성해석에서의 압축 응력의 차이가 매우 크게 나타났고, 코팅두께가 상대적으로 두꺼운 경우( $h=1, 2 \mu\text{m}$ )에는 탄성해석에 의한 접촉 압력분포가 비슷한 분포를 나타내었다. 이는 상대적으로 코팅이 얇은 경우에 같은 수직하중에 의해 같은 압입 깊이의 변형이 생길 때 소성의 영향을 많이 받는다는 것을 말한다. 압입 깊이가 커지면 최대 접촉 압력을 받는 부분은 접촉한 중심부분에서 가장 자리쪽으로 이동하였다. 여기서, 압입 깊이가 깊을수록 큰 수직하중을 필요로 하므로 접촉압력이 커지고, 항복이 발생하여 소성영역이 증가되면서 접촉압력분포가 불규칙적으로 변화된다는 것을 알 수 있다.

### 3.2 코팅두께에 따른 응력 분포

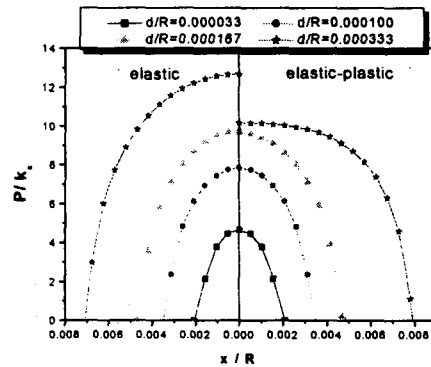


Fig. 4 Elastic and elastic-plastic solution of the contact pressure distribution corresponding to the TiN coated medium ( $h=0.25 \mu\text{m}$ )

탄소성 해석의 경우 코팅두께에 따른 응력 분포를 알아보려고 한다. 코팅표면에서 x축 상의 응력과 대칭축(y축)상의 응력을 조사하였다.

코팅두께에 따른 여러가지 응력을 비교해 본 결과 같은 응력에 대해서 코팅두께에 따라 응력의 크기는 다르게 나타났으나, 전체적으로 비슷한 경향을 나타내었다. 특히 코팅하지 않은 경우와 코팅한 경우를 비교할 때 최대 또는 최소 응력의 절대값의 차이가 매우 크게 나타났다.

x축상의 응력에 영향을 미칠것으로 예측되는 접촉반쪽의 크기를 조사한 결과 같은 압입 깊이에서 접촉 반쪽은 코팅두께에 따라 조금씩 달랐으나 약 5% 내외의 크기 차이를 보였고 대략  $0.2 \mu\text{m}$  정도였다.

Fig. 5는 접촉부의 중심( $y=0$ )에서 x축 상의 코팅표면에서  $\sigma_{xx}$ 의 크기를 나타낸 것이다. 접촉 중심에서 큰 압축응력을 받지만 응력은 급격히 감소하다가 0에 가까워지면서 준평형 상태에 이른다. 접촉반쪽의 크기를 고려해볼 때 응력은 비접촉부위가 시작되면서

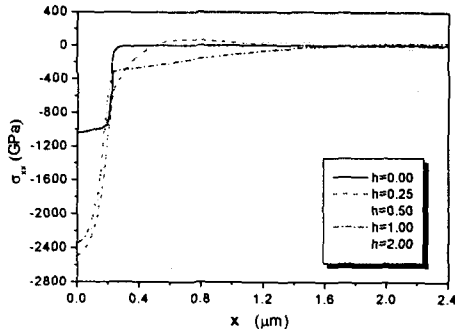


Fig. 5 Various of the  $\sigma_{xx}$  for several coating thicknesses ( $y=0$ )

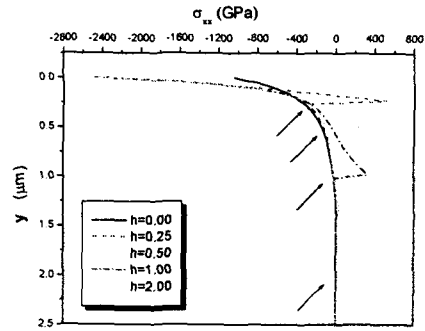


Fig. 6 Various of the  $\sigma_{xx}$  for several coating thicknesses ( $x=0$ )

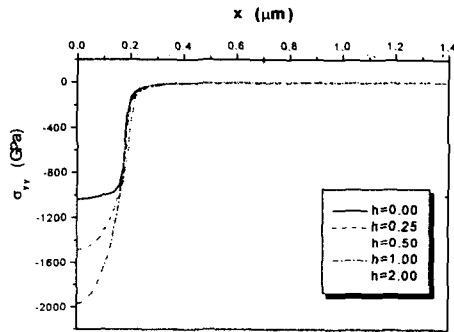


Fig. 7 Various of the  $\sigma_{yy}$  for several coating thicknesses ( $y=0$ )

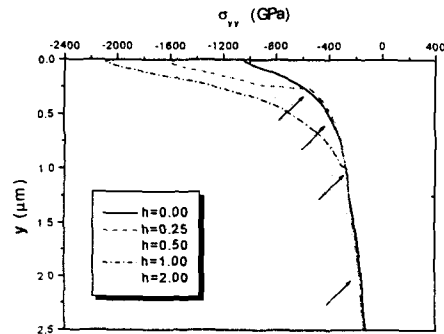


Fig. 8 Various of the  $\sigma_{yy}$  for several coating thicknesses ( $x=0$ )

서 급격히 감소하여 0에 가까워진다는 것을 알 수 있었다.

접촉부의 중심( $x=0$ )에서  $y$ 축상의 코팅/모재의 단면에 대한  $\sigma_{xx}$ 은 Fig. 6과 같이 나타났다. 접촉 표면에서는 큰 압축응력을 받지만 모재의 내부로 들어가면서 응력은 급격히 변화하면서 인장응력을 가지다가 다시 급격히 감소하여 일정값을 가지며 준평형 상태에 이르렀다.

코팅의 두께가 얇을수록 응력이 증감은 매우 급격하게 일어났다. 접촉 표면에서 최대 압축응력을 받지만, 모재 내부로 들어갈수록

압축응력은 인장응력으로 바뀌었다. 최대 인장응력에서 다시 압축응력으로 변하는 부분은 코팅층과 모재의 계면으로, 계면에서 응력값이 급격히 변화된다는 것을 알 수 있었다. 그림에서 화살표는 계면의 위치를 표시한 것이다.

접촉부의 중심에서  $y$ 축 방향에 대한  $\sigma_{yy}$ 의 응력과 접촉 표면에서의  $x$ 축 방향에 대한  $\sigma_{yy}$ 의 응력의 크기는 각각 Fig. 7과 Fig. 8과 같이 나타났다.  $x$ 축상의  $\sigma_{yy}$ 는 접촉부의 중심에서 최대 압축 응력을 받지만 접촉부의 가장자리 쪽으로 갈수록 응력은 점차

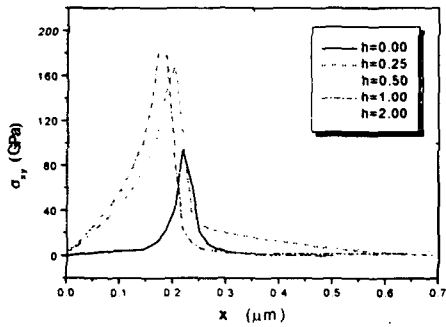


Fig. 9 Various of the  $\sigma_{xx}$  for several coating thicknesses ( $y=0$ )

감소하고, 비접촉부가 시작되면서 0에 가까워졌다. 같은 압입 깊이에서 코팅의 두께가 얇을수록 접촉면에서의  $\sigma_{yy}$ 는 작은 압축응력을 받는 것을 알 수 있다.

접촉면에서  $y$ 축 방향에 대한  $\sigma_{yy}$ 의 크기는 Fig. 8과 같이 나타났다.  $\sigma_{yy}$ 는 접촉부위 바로 아랫부분에서는 최대 압축응력을 받지만 압축응력은 급격히 감소하면서 코팅과 모재의 계면을 지나면서 점차 감소하여 0에 가까워진다는 것을 알 수 있었다. 코팅의 두께가 얇은 경우에는 코팅과 모재의 계면에서의 응력의 변화가 크게 나타나서 코팅 두께가 두꺼울수록 최대 압축응력은 접촉 표면 바로 아래에서 더 크게 나타났다.

접촉 중심에서  $x$ 축 방향과  $y$ 축방향으로 멀어질 때  $\sigma_{xx}$  응력의 분포는 Fig. 9와 Fig. 10과 같이 나타났다. 접촉표면( $x=0$ )에서의 응력은 접촉 중심에서 비접촉부분으로 가면서 인장응력을 받으며 증가하다가 감소하여 0에 가까워진다. 접촉한 부분과의 경계면상에서 최대 인장응력을 받으나 비접촉부위가 시작되는 위치에서 급격히 감소했다. 코팅의 두께에 따라 같은 압입깊이에 대한 접촉폭의 크기가 다르므로 최대 인장응력을 받

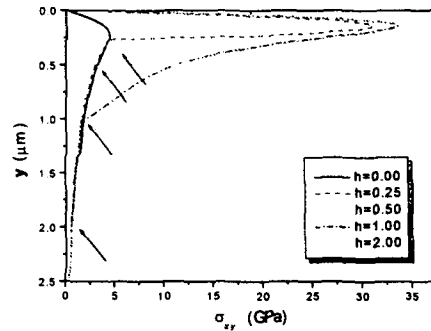


Fig. 10 Various of the  $\sigma_{yy}$  for several coating thicknesses ( $x=0$ )

는  $x$ 축상의 위치가 조금씩 다르며, 코팅두께가 두꺼울수록 비교적 큰 최대 인장응력값을 나타냈다.

접촉중심에서 모재 내부의 방향으로 나타나는  $\sigma_{xy}$  응력의 분포는 Fig. 10과 같다. 인장응력이 최대가 되는 지점은 각각 표면하에서 0.24 $\mu\text{m}$  정도의 지점이며, 코팅두께가 두꺼울수록 보다 큰 최대 인장응력값을 가졌다. 인장응력이 최대가 되는 지점을 지나면서 응력은 빠르게 감소하는데, 코팅과 모재의 계면부위에서 코팅하지 않은 모재와 거의 같은 응력 분포를 띄며 점차 0에 가까워진다는 것을 알 수 있었다.

### 3.3 소성의 발생과 파손

코팅두께에 따라 내부의 응력은 조금씩 다르게 나타났다. 이와 같은 응력 분포를 토대로 하여 재료의 손상을 평가하였다.

본 연구의 해석 대상인 TiN 코팅된 연강은 취성 코팅재와 연성 모재의 복합체이므로 코팅은 최대 주응력설에 기초하고, 모재는 Von Mises 이론에 기초하여 항복과 파손에 대한 손상해석을 하였다. 응력의 분포를 조

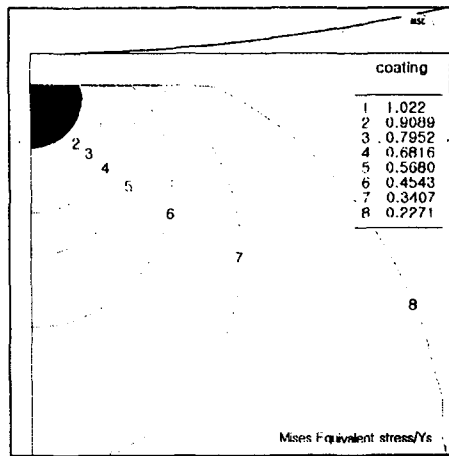


Fig. 11 Contour band of Von Mises equivalent stress/yield stress ( $h=0.5\mu\text{m}$ )  $d=0.01$

사하여, 등가응력이 최초로 항복응력과 같아질 때의 임계 수직하중을 구하여 Failure Map(파손선도)를 비교하였다. 그리고 모재의 성질만을 고려하여 코팅과 모재의 손상을 하나의 이론으로 평가한 기존의 방법에 의한 결과와 비교하였다.

### 3.3.1 모재의 항복

수직하중을 받는 접촉한 두 물체의 경우, 하중에 의해 두 물체는 변형을 일으킨다. 하중이 작은 경우 탄성영역 내에서 변형을 하지만, 하중이 임계값 이상으로 증가하면 영구변형이 발생하는 소성변형을 일으킨다. 실제 기계부품설계에서 소성변형이 발생할 때의 접촉 하중의 크기와 발생 위치는 매우 중요하다.

본 연구에서 모재의 소성변형은 연강의 항복 이론으로 잘 알려져 있는 Von Mises 이론에 기초하여 평가하였다.

Fig. 11은 항복이 발생한 직후의 등가 Mises 응력/항복응력의 등분포선을 보여준다. 그림

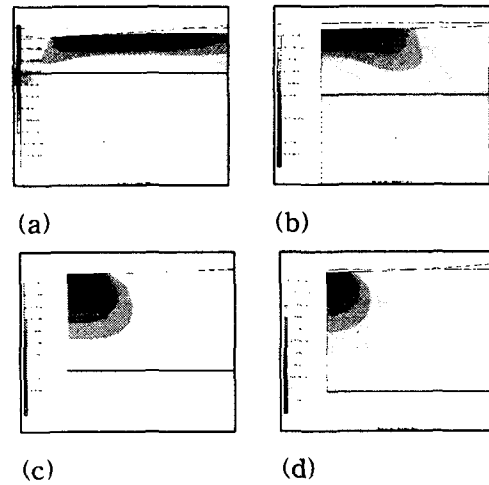


Fig. 12 Contour band of max. or min. principal stress when TiN film failed (a) $h=0.25\mu\text{m}$  (b) $h=0.5\mu\text{m}$  (c) $h=1\mu\text{m}$ , (d) $h=2\mu\text{m}$

에서 검정색 부분은 항복이 발생한 영역이다. 항복이 최초로 발생하는 지점은 코팅과 모재의 계면이며, 코팅 두께에 따라 항복이 발생하는 지점에서의 수직하중과 압입 깊이가 달랐다. 소성변형은 접촉 중심 아랫부분의 계면에서 처음으로 나타났고, 항복이 발생한 이후에는 수직하중의 증가와 함께 압입 깊이가 커지면서 소성영역의 크기가 점차로 확대되었다.

### 3.3.2 최대 주응력설에 의한 코팅의 파괴

TiN 코팅의 파손은 최대 주응력설에 의해 최대 주응력 또는 최소 주응력의 절대값이 항복강도와 같아지는 지점에서 파괴가 되는 것으로 평가하였다. TiN은 세라믹 코팅으로 소성변형은 매우 미소하므로 소성에 의한 영향을 무시하고 항복이 일어나는 점에서 파손이 시작된다고 가정하였다.

파손이 일어나는 위치는 코팅의 두께와 무관하게 항상 코팅표면에서 나타났다. 각 코팅 두께에 대해 모재의 항복이 발생하는 지점에

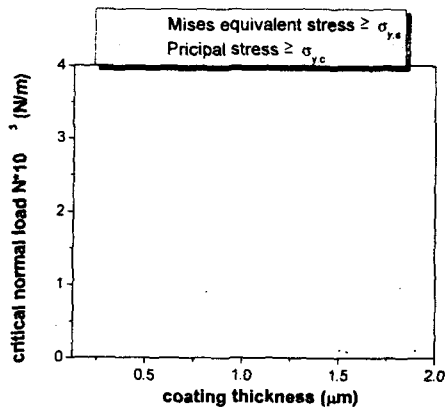


Fig. 13 Critical normal load of failure by Maximum principal theory for several coating thickness

서의 최대 또는 최소 주응력의 분포는 Fig. 12와 같다. 그림에서 계면의 위치는 실선으로 표시하였다. 모재와 코팅의 항복이 일어날 때의 임계수직하중의 크기는 Fig.13에서 보여준다. 수직 하중이 증가하면서 모재는 탄성한계를 넘어서서 항복에 의한 소성변형을 일으키고, 소성 영역의 성장과 함께 코팅의 파손이 발생한다. 코팅의 두께가 두꺼울수록 모재는 항복을 일으키기 위해 보다 큰 수직 하중을 필요로 하지만, 코팅의 파손은 코팅 두께가 0.5 $\mu\text{m}$ 일 때 가장 작은 수직 하중을 필요로 한다는 것을 알 수 있었다. 그리고 코팅 두께가 0.5 $\mu\text{m}$ 보다 더 두꺼워질 때는 손상이 발생할 때의 임계 수직 하중도 함께 증가된다는 것을 알 수 있었다.

### 3.3.3 Von Mises 이론에 의한 코팅의 손상

코팅의 손상을 기존의 연구방법과 같이 모재와 같은 이론을 적용하여 해석하였다. 본 연구에서 모재는 연강이므로 연성재료의 손상해석에 가장 잘 알려져 있는 Von Mises

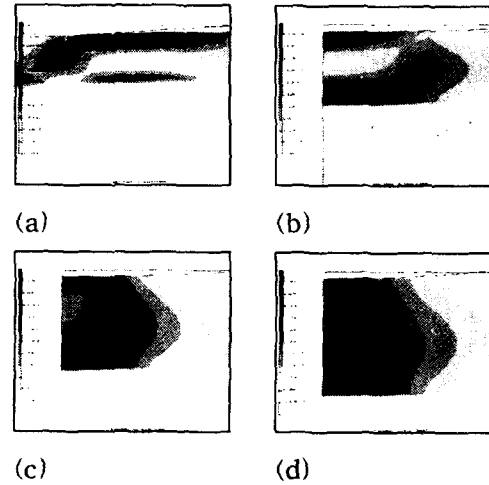


Fig. 14 Contour band of equivalent Von Mises stress when TiN film failed (a)h=0.25 $\mu\text{m}$  (b)h=0.5 $\mu\text{m}$  (c)h=1 $\mu\text{m}$ , (d)h=2 $\mu\text{m}$

이론에 기초할 경우 코팅두께에 따른 등가응력의 분포는 Fig. 14와 같다.

코팅이 얇은 경우 최초로 코팅의 손상이 발생하는 부분은 코팅표면의 접촉면 가장자리 부분이지만, 코팅이 두꺼워지면 모재와 코팅의 계면에서 손상이 가장 먼저 발생하는 것으로 나타났다.

Fig. 15은 Von Mises 이론을 이용하여 모재와 코팅의 손상을 해석하였을 때, 다양한 코팅두께에 대해 항복이 발생하는 임계 수직 하중의 크기를 보여준다.

최대 주응력설에 의한 해석 결과가 같이 모재가 항복을 일으키는 임계수직 하중은 코팅두께에 따라 선형적으로 증가하지만, 모재가 소성변형을 한 후 코팅의 파손이 시작될 때의 임계 접촉 수직력은 코팅두께가 0.25 $\mu\text{m}$  이후에서 0.5 $\mu\text{m}$ 될 때 감소하다가 0.5 $\mu\text{m}$  이상의 코팅두께에 대해서는 다시 증가하는 것을 알 수 있었다.

### 3.4 Failure Map 비교



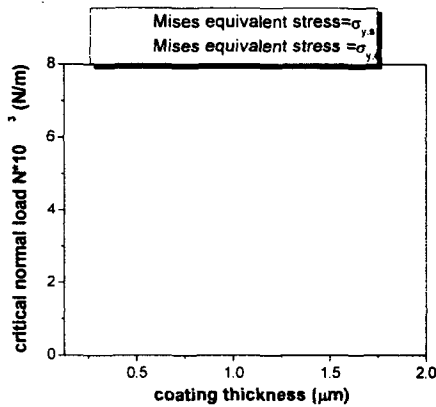


Fig. 15 Critical normal load of failure by Von Mises theory for several coating thickness

앞 절에서 제시한 것과 같이 코팅/모재 복합체를 하나의 이론으로 손상을 해석한 결과와 두 가지 이론으로 손상을 해석한 결과를 이용한 Failure Map을 Fig. 16에서 함께 나타내었다.

여기서, 코팅이 얇은 경우에는 Von Mises 이론에 기초하여 코팅의 손상을 해석한 결과와 최대 주응력설에 기초하여 손상을 해석한 결과의 임계수직하중은 같으나, 코팅이 두꺼워질수록 최대 주응력설에 기초한 경우가 Von Mises 이론에 기초한 경우 보다 작은 하중에서 코팅의 손상이 먼저 일어남을 알 수 있었다.

서로 다른 성질을 지닌 코팅/모재 복합체와 접촉한 물체가 수직하중을 받는 경우의 손상 해석에서, 복합체를 모재의 성질에 기초하여 하나의 이론에 의해 손상을 평가하는 경우보다는 각각의 재료에 적합한 손상이론으로 평가하는 경우가 보다 안전한 설계를 위한 결과를 제시한다는 것을 알 수 있었다.

#### 4. 결론

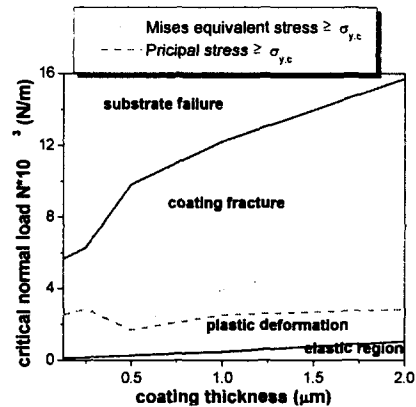


Fig. 16 Failure map for TiN on steel

유한요소법을 이용하여 수직하중을 받는 강체의 구형 돌기가 TiN 코팅된 반무한체를 누르는 경우에 대해 탄소성 해석하여 코팅표면과 내부의 응력분포를 알아보았다. 응력분포를 토대로 하여 코팅과 모재에 각각 적합한 손상이론을 적용하여 박막 코팅과 모재의 손상해석한 결과 다양한 코팅두께에 대해 손상이 시작되는 임계하중을 보여주는 Failure Map을 제시하고 기존의 연구 방법에 의한 결과와 비교하였다.

#### 기 호

|   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| E                                       | elastic modulus                      |
| $\nu$                                   | Poisson's ratio                      |
| R                                       | radius of rigid asperity             |
| d                                       | indentation depth                    |
| h                                       | coating thickness                    |
| P                                       | contact pressure                     |
| N                                       | critical normal load                 |
| $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ | stress components in plane strain    |
| $k_s$                                   | yield strength in shear of substrate |
| O, x, y                                 | cartesian coordinate                 |

## 참 고 문 헌

1. K. Komvopoulos, "Elastic-plastic finite element analysis of indented layered media" ASME, J. Tribology, vol.111, pp.430-439, 1989
2. R.B. King, T.C. O'Sullivan, "Sliding contact stresses in a two-dimensional layered elastic half-space", Int. J. Solids Structures, vol.23, No.5, pp. 581-597, 1987
3. H. Tian, N. Saka, "Finite element analysis of an elastic-plastic two-layer half-space:sliding contact". vol.148, pp.261-285, 1991
4. D.F. Diao, K. Kato and K.Hayshi, "The local yield map of hard coating under sliding contact", Thin Films in Tribology, pp.419-427, 1993
5. K. Komvopoulos, "Finite element analysis of a layered elastic solid in normal contact with a rigid surface", ASME, J. Tribology, vol.110, pp.477-485, 1988
6. Y. Sun, A. Bloyce, T.Bell, "Finite element analysis of plastic deformation of various TiN coating/substrate system under normal contact with a rigid sphere", Thin Solid Films, vol. 271, pp. 122-131, 1995