

# 고차 형상함수를 이용한 가스 미케니컬 페이스 시일의 윤활해석

이안성 · 양재훈\* · 최동훈\*\*

한국기계연구원, \*한양대학교 대학원, \*\*한양대학교 기계공학부

## A Lubrication Analysis of Gas Mechanical Face Seals using a High-Order Shape Function

An Sung Lee, Jae-Hun Yang\* and Dong-Hoon Choi\*\*

Korea Institute of Machinery and Materials, \*Graduate School of HanYang Univ.,

\*\*School of Mechanical Engineering, HanYang Univ.

### Abstract

For the treatment of high compressibility number in the Reynolds equation, a new class of exponential high-order shape functions has been recently introduced in the literatures. In this paper a FE lubrication analysis method of high speed gas mechanical face seals is developed, implementing these shape functions. Their validity and usefulness are presented using 1-D gas bearing models. And a validation of developed 2-D analysis code is shown with a gas flat and spiral groove face seal models.

**Key words** : Gas Lubrication, Compressibility Number, Perturbation Method, High-Order Shape Function, Galerkin Finite Element Method, Spiral Groove Face Seal (SGFS)

기호설명

\* : 차원

$N_g$  : number of grooves

$\Omega$  : rotating speed [rpm]

$\omega$  : rotating speed [rad/s]

$\alpha_g$  : groove width ratio,  $W_g/(W_r+W_g)$

$\Lambda$  : compressibility number,  $\frac{6\mu\omega}{p_o} \left(\frac{r_o}{C}\right)^2$

$\Gamma$  :  $2\Lambda$

$Q_r$  : dimensionless leakage,

$$Q_r^* \times \frac{-12\mu R_g T}{C^3 p_o^2}$$

$F_z$  : dimensionless opening force,

$$F^* \times \frac{1}{p_o r_o^2}$$

$K_z$  : dimensionless axial stiffness

$$\text{coefficient, } K_z^* \times \frac{C}{p_o r_o^2}$$

### 1. 서론

산업화가 급속히 진행됨에 따라 세계적으로 환경오염이 큰 사회 문제로 대두되고 있으며, 같은 맥락에서 정유·석유화학 공장 등의 회전기계에서 배출되는 유해 유체에 대한 엄격한 배출규제가 시행되고 있다. 미케니컬 페이스 시일은 회전기계에서 축과 하우징 사이의 틈새를 통해 발생하는 작업 유체의 누설을 정밀 제어하기 위해 사용되는 트라이보-요소(tribo-element)로써, 기체를 윤활 매체로 하는 비접촉 시일들은 흔히 드라이 가스 시일로 불린다. 드라이 가스 시일은 항공용 가스터빈에서 압축 공기의 베어링 내 유입을 최소화해 브리딩 시스템을 간소화할 목적으로 사용되기 시작했으며, 현재는 그 적용 영역이 확대되어 유해한 유체를 취급하는 압축기, 펌프, 믹서 등에서 시일 시스템

내에 완충(buffer) 가스를 주입해 작업 유체의 완전 누설 제로를 달성하는 용도로 크게 활용되고 있다. 이러한 드라이 가스 시일에서는 가스의 점성이 액체에 비해 상당히 작아 안정된 윤활막 형성을 위해 필요한 hydrodynamic 효과가 작기 때문에, 이의 극복을 위해 spiral groove, T-groove, reverse triangle groove와 같은 다양한 형태의 self-acting hydrodynamic lifting mechanism을 갖는 face seal에 대한 기술개발이 선진 시일 메이커를 중심으로 활발히 진행되고 있다.

1970년대 이래 윤활 문제의 해석도구로 유한요소법이 보편적으로 사용되고 있다. 유한요소법은 복잡한 형상의 구현이 쉬울 뿐 아니라 다양한 경계조건의 체계적인 취급이 가능하다. Booker와 Huebner[1]는 윤활 문제에 대한 유한요소법의 적용 가능성과 유효성을 보였으며, Rhode와 Oh[2]는 다른 수치해석 기법에 대비한 유한요소법의 우수성을 제시하였다. Reddi와 Chu[3]는 처음으로 압축성 윤활 문제에 유한요소법을 적용하였으며, 저속(압축성 계수  $\Lambda=10$ ) 회전하는 가스 베어링의 윤활 해석을 수행하였다. 그러나, 고속에서는 Reynolds 방정식에 포함된 Couette 대류 유동항의 지배적인 영향으로 압력 해의 진동현상이 발생하게 되어, 일반적으로 고속 적용의 가스 시일 또는 베어링에서 안정적 설계 해석결과를 얻는데는 어려움이 따르게 된다. 이러한 문제를 해결하고자 지금까지 여러 가지 방법들이 제시되었다. 통상적인 h-FEM은 사용된 요소의 수를 늘려 해의 수치적 안정을 가져오며[4], 보다 발전된 p-FEM은 요소의 두 절점 사이에 고차 미분항을 포함시켜 얻어진 고차 형상함수를 사용하여 적은 요소 수로도 안정된 해를 가져온다[5]. Heinrich와 Zienkiewicz[6]는 대류전달 유동문제에서 upwind scheme을 사용하여 안정적인 수치 해를 얻었다. Garcia-Suarez 외[7]는 자기 기록장치에 사용되는 가스 slider 베어링의 윤활 해석에 upwind scheme을 적용하였다. Bonneau 외[8]는 가스 spiral groove thrust bearing과 face seal의 윤활 해석에 upwind scheme을 적용하였으며, 특히 중·저속( $\Lambda=100$  이하)으로 운전되는 시일에 대해서 안정적 수치 해를 얻었다. 그러나, upwind scheme은 정식화 과정

이 까다롭고 Couette 대류항에 인위적으로 첨가되는 수치적 확산항(numerical diffusion term)에 대한 조절을 필요로 하기 때문에 적용이 쉽지 않다. 한편, 최근에 새로운 지수형태의 고차 형상함수(high-order shape function)를 적용한 고속 압축성 유체의 유한요소 윤활 해석기법이 제안되었다[9~11]. 여기서, 고차 형상함수는 개개 단위 요소 내의 평균 압력과 막 두께를 적용하여 선형화된 정상상태 편미분 Reynolds 방정식으로부터 유도되며, upwind scheme과 달리 인위적인 항이 포함되지 않고 기존의 유한요소 정식화에 쉽게 적용될 수 있다.

본 연구에서는 향후 고속에서 운전되는 가스 spiral groove face seal (SGFS)의 성능 해석을 목적으로 Faria가 제안한 고차 형상함수를 적용한 Galerkin FE 윤활 해석기술이 개발된다. 고차 형상함수 적용의 유효성과 효율성 검증을 위해 1차원 slider bearing과 Rayleigh step bearing의 해석이 수행되며, 2차원 개발 해석코드의 검증을 위해 평면 시일과 SGFS의 일부 성능해석이 수행된다.

## 2. 지배 방정식 및 FE 정식화

### 2.1 Spiral Groove 기하형상

Fig. 1은 가스 윤활 spiral groove face seal의 기하형상과 설계인자들을 나타내고 있다. 그림에서 groove는 stator ring에 위치하며, 주어진 groove 형상에 대해 mating rotor ring이 시계방향으로 회전할 때 hydrodynamic pumping 효과가 발생한다.

Groove의 경계를 형성하는 spiral의 지배함수[13]는

$$r = r_i e^{\theta \cdot \tan \alpha} \quad (1)$$

여기서,  $\alpha$ 는 spiral의 연장선과 외경원의 접선 사이의 각이며,  $W_g$ 와  $W_r$ 는 외경원에서의 groove와 ridge의 폭을 나타낸다.  $r_i$ ,  $r_g$ ,  $r_o$ 는 각각 inner, groove, outer radius이며  $C$ 와  $C_g$ 는 ridge clearance와 groove depth를 나타낸다. 한편, 여기서 정의된 형상 설계인자들은 시일의 성능에 많은 영향을 미치므로 성능인자라고도 한다.

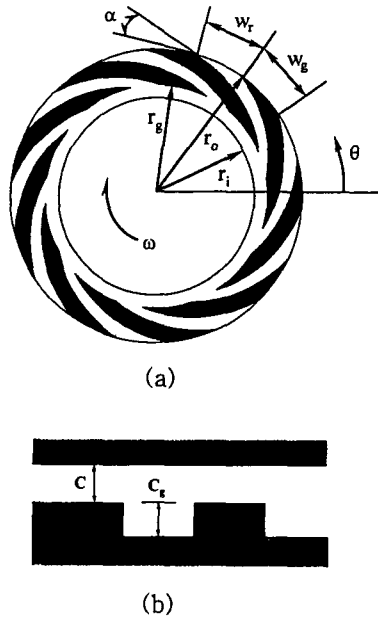


Fig. 1 Geometry and design parameters of a spiral groove face seal

## 2.2 유한요소 유틀 정식화

작동가스의 등온, 등점성, 그리고 이상기체를 가정한 가스 미세기체 페이스 시일의 레이놀즈 방정식은

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{PH^3}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( RPH^3 \frac{\partial P}{\partial R} \right) \quad (2) \\ & = \frac{\Lambda}{R} \frac{\partial (RPH)}{\partial \theta} + \Gamma \frac{\partial (RPH)}{\partial \tau} \end{aligned}$$

여기서, 무차원 변수의 정의는

$$\begin{aligned} P &= \frac{p}{p_0}, \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad H = \frac{h}{C}, \quad (3) \\ \tau &= \omega t, \quad \Lambda = 6\mu\omega r_0^2 / (p_0 C^2) \end{aligned}$$

식 (2)로 부터 동특성 해석을 수행하기 위해 섭동법이 적용된다. 섭동법은 기준 평형위치로부터의 미소 섭동을 고려하여 섭동된 레이놀즈 방정식을 구하고, 섭동 방정식으로부터 동적 상수를 계산하는 방법이다. Fig. 2는 두 seal ring 사이의 상대 위치와 단면에서의

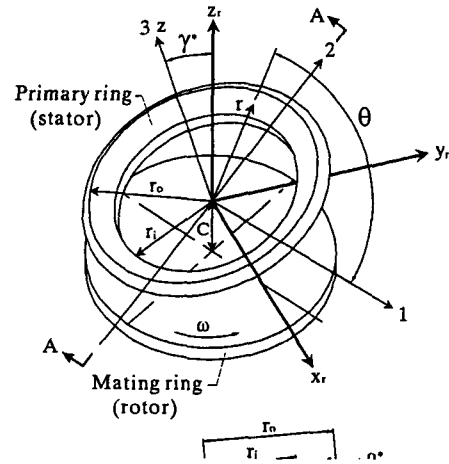


Fig. 2 Relative position between two seal ring faces and sectional film geometry

가스 막 형상을 나타내고 있다. 평형상태 막 두께로부터의 축방향 섭동  $\Delta Z$  와 틸팅 섭동  $\Delta V$  를 고려하면, 막 두께와 이의 시간미분은 다음으로 정의된다.

$$H = H_0 + \Delta Z + \Delta V R \sin \theta \quad (4.a)$$

$$\dot{H} = \Delta \dot{Z} + \Delta \dot{V} R \sin \theta \quad (4.b)$$

여기서,  $H_0$ 는 정적 평형상태에서의 막 두께로

$$H_0 = 1 + v_0 R \sin \theta + \beta (R - R_i) \quad (5)$$

식 (5)에서 무차원화된 코닝과 틸팅은 다음과 같다.

$$v_0 = \frac{v^* r_0}{C}, \quad \beta = \frac{\beta^* r_0}{C} \quad (6)$$

한편, 막 두께의 섭동에 대한 압력의 1차수 전개로부터,

$$P = P_0 + P_z \Delta Z + P_v \Delta V + P_z \Delta \dot{Z} + P_v \Delta \dot{V} \quad (7)$$

식 (4)와 (7)을 식 (2)에 대입하고 정리하면, 섭동된 레이놀즈 방정식이 얻어진다. 미소 섭동에 대한 0차수 레이놀즈 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{P_0 H_0^3}{R} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R P_0 H_0^3 \frac{\partial P_0}{\partial R} \right) \quad (8) \\ & = \frac{\Lambda}{R} \frac{\partial (R P_0 H_0)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

섭동된 레이놀즈 유허방정식의 수치적 해를 구하기 위해, 각 요소에 다음의 Galerkin weighted residual 적분을 적용하여 유한요소 정식화가 수행된다.

$$\iint W \mathcal{R} dA = 0 \quad (9)$$

여기서,  $W$ 는 가중치로 형상함수가 사용되며, 오차함수  $\mathcal{R}$ 은 각 섭동식의 좌·우변의 차로 정의된다. 식 (9)의 부분적분 전개와 정리를 거쳐, 유한요소 유허 방정식이 얻어진다. 0차수 유허 행렬 방정식은 다음으로 표현된다.

$$[k^e] \{P_0^e\} = \{r_0^e\} \quad (10)$$

여기서,

$$[k^e] = \iint \left\{ \frac{P_0 H_0^3}{R^2} \frac{\partial [N]^T}{\partial \theta} \frac{\partial [N]}{\partial \theta} + P_0 H_0^3 \frac{\partial [N]^T}{\partial R} \frac{\partial [N]}{\partial R} \right\} dA \quad (10.a)$$

$$\begin{aligned} \{r_0^e\} &= \Lambda \iint \frac{\partial [N]^T}{\partial \theta} P_0 H_0 dA \\ & - \Lambda \int [N]^T R P_0 H_0 m dS \quad (10.b) \\ & + \int [N]^T \frac{P_0 H_0^3}{R} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} m dS \\ & + \int [N]^T P_0 H_0^3 \frac{\partial P_0}{\partial R} l dS \end{aligned}$$

### 2.3 High-Order 형상함수

정상상태 압축성 직각좌표 레이놀즈 방정

식에 단위 요소 내의 평균 압력과 막 두께를 적용하면, 다음의 선형화된 편미분 레이놀즈 방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 p_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_e}{\partial y^2} = v \frac{\partial p_e}{\partial x} \quad (11)$$

여기서,  $v = \frac{6\mu U}{\rho_{avg} h_{avg}^2}$  이고,  $p_{avg}$ 와  $h_{avg}$ 는 요소 내의 평균 압력과 막 두께이다. 식 (11)의 해는 변수분리법을 적용하여 다음으로 표현된다.

$$p_e(x, y) = (A e^{vx} + B)(Cy + D) \quad (12)$$

여기서,  $A, B, C, D$ 는 상수로써, 다음의 노드 경계조건을 적용하여 구해진다.

$$\begin{aligned} p_e(-1, -1) &= 1; \text{ otherwise } p_e = 0 \\ p_e(1, -1) &= 1; \text{ otherwise } p_e = 0 \\ p_e(1, 1) &= 1; \text{ otherwise } p_e = 0 \\ p_e(-1, 1) &= 1; \text{ otherwise } p_e = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

결과적으로, 2차원 natural coordinate상의 4절점 고차 형상함수가 얻어진다.

$$\begin{aligned} \Psi_1^e &= \frac{1}{2}(1-\eta) \left( \frac{e^{\lambda_e} - e^{\lambda_e \xi}}{e^{\lambda_e} - e^{-\lambda_e}} \right) \\ \Psi_2^e &= \frac{1}{2}(1-\eta) \left( \frac{e^{\lambda_e \xi} - e^{-\lambda_e}}{e^{\lambda_e} - e^{-\lambda_e}} \right) \\ \Psi_3^e &= \frac{1}{2}(1+\eta) \left( \frac{e^{\lambda_e \xi} - e^{-\lambda_e}}{e^{\lambda_e} - e^{-\lambda_e}} \right) \\ \Psi_4^e &= \frac{1}{2}(1+\eta) \left( \frac{e^{\lambda_e} - e^{\lambda_e \xi}}{e^{\lambda_e} - e^{-\lambda_e}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,  $\lambda_e = 6\mu U L_e / \rho_e h_e^2$ 는 local speed 또는 Peclet number라 하며,  $L_e$ 는 요소의 속도방향 평균길이이다. 유도된 고차 형상함수의 특징은  $\lambda_e \rightarrow 0$ 일수록 형상함수는 통상의 bilinear 형상함수의 성질에 근접해지고,  $\lambda_e \rightarrow \infty$ 일수록 형상함수는 full upwind

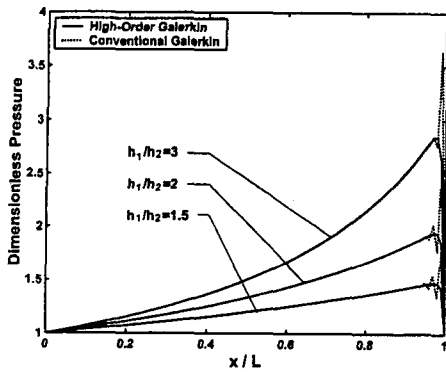


Fig. 3 Pressure distribution of a 1-D gas slider bearing at  $\Lambda=1000$

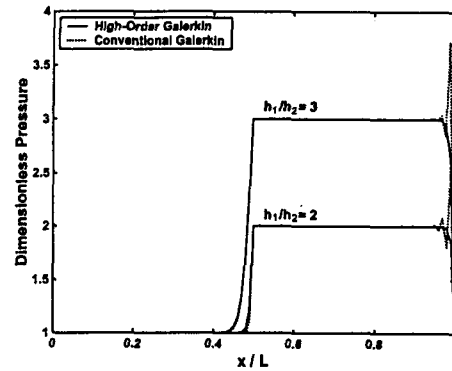


Fig. 4 Pressure distribution of a 1-D gas Rayleigh step bearing at  $\Lambda=1000$

scheme의 사용과 일치하는 경향을 보인다.

#### 2.4 성능 계산

Mechanical face seal의 성능을 평가하기 위한 인자로는 개방력, 복원 모멘트, 발열량, 누설량, 강성계수, 그리고 감쇠계수 등이 있다. 누설량은 시일의 대표적인 성능인자로 허용 누설량을 만족해야 한다. 그리고 강성계수는 시일의 동적 안정성을 위해 매우 중요하게 평가되는 성능인자이다. 각 성능 특성을 구하기 위한 일부 식들은 다음과 같다. 개방력 :

$$F_z = \iint P_0 dA \quad (15)$$

복원 모멘트 :

$$M_x = \iint P_0 R \sin\theta dA \quad (16)$$

축방향 강성과 감쇠 계수 :

$$K_z = -\frac{\partial F_z}{\partial Z}, \quad D_z = -\frac{\partial F_z}{\partial \dot{Z}} \quad (17)$$

틸팅 강성과 감쇠 계수 :

$$K_v = -\frac{\partial M_x}{\partial v}, \quad D_v = -\frac{\partial M_x}{\partial \dot{v}} \quad (18)$$

누설량 (반경 방향) :

$$Q_r = -\sum r_i \quad (19)$$

식 (19)에서 하첨자  $i$  는 누설경로에 있는

경계위치의 절점들을 나타낸다. 한편, 요소에 대한 0 차수 레이놀즈 행렬방정식은 전체 시스템 방정식으로 조립되며, Newton-Raphson 방법에 의해 해가 구해진다.

### 3. High-Order FE 유효해석의 검증

사용된 고차 형상함수의 유효성과 효율성, 그리고 개발된 해석 코드의 검증을 위해, 몇몇 예제에 대해 해석을 수행하고 결과를 비교하였다.

#### 3.1 1차원 Slider/Rayleigh Step Bearing의 압력 분포

Fig. 3은 1차원 가스 slider bearing의 압력분포 해석결과로,  $\Lambda=1000$  에서 3가지 입·출구 막 두께의 비를 고려하였으며, 사용 요소의 수는 100개이다. 그림으로부터 통상적인 bilinear 형상함수를 사용한 경우는 베어링의 trailing edge 부근에서 압력의 심한 진동이 관찰되나 고차 형상함수를 사용한 경우는 압력의 진동이 관찰되지 않는다. Fig. 4는 1차원 가스 Rayleigh step bearing의 압력분포 해석결과로,  $\Lambda=1000$  에서 2가지 입·출구 막 두께의 비를 고려하였으며, 사용 요소의 수는 100개이다. Slider 베어링과 마찬가지로 통상적인 bilinear 형상함수를 사용한 경우 trailing edge 부근에서 압력의 심한 진동이 관찰되며 고차 형상함수를 사용한 경우는 압력의 진동이 관찰되지 않는다.

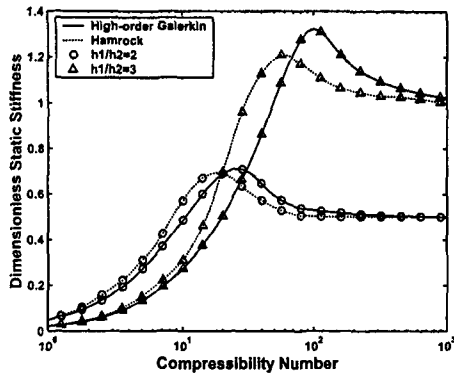


Fig. 5 Static stiffness of a 1-D gas Rayleigh step bearing at  $\Lambda=1000$

### 3.2 1차원 Rayleigh Step Bearing의 정적 강성

Fig. 5는 1차원 가스 Rayleigh step bearing의 압축성 계수에 따른 정적 강성을 보여주며, 해석에 사용된 요소의 수는 100개이다. 여기서 고차 형상함수 결과와 함께 비교된 Hamrock[13]의 결과는 선형화 과정을 거쳐 구해진 해석 해로부터 얻어진 것이다. 그림으로부터 두 방법 모두 압축성 계수의 증가에 따라 정적 강성의 매우 유사한 변화 경향을 보여 주고 있으며, 다만  $h1/h2=3$  보다  $h1/h2=2$ 에서 두 방법의 결과가 보다 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

### 3.3 2차원 평면 시일의 누설량

개발된 고차 형상함수를 적용한 해석 코드의 검증을 위해 누설량을 계산하여 이를 해석적으로 구한 누설량과 비교하고, 사용된 요소의 수에 따른 수치해의 수렴성을 알아보 고자 한다. 비교 시일 모델은 해석적 누설량의 계산이 가능한 가스 narrow flat face seal이다. 시일 mean 반경에서의 반경방향

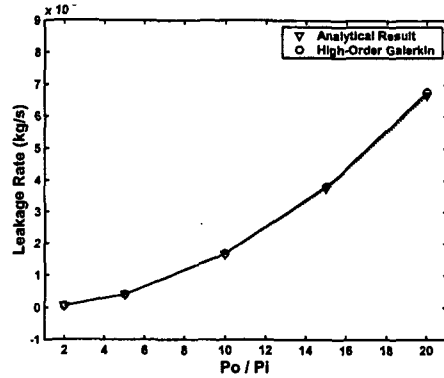


Fig. 6 Leakage versus boundary pressure ratio of a gas narrow flat face seal

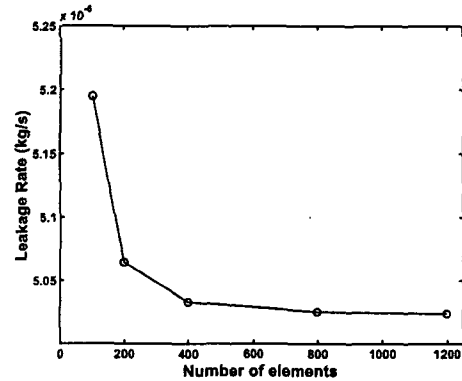


Fig. 7 Leakage convergence over used number of elements for a gas narrow flat face seal

해석적 누설량은

$$\dot{m} = \frac{-\pi C^3 (p_o^2 - p_i^2)}{12\mu \ln(r_o/r_i)} \left( \frac{1}{R_g T} \right) \quad (20)$$

Table 1 Geometric parameters and operation conditions of a gas narrow flat face seal

$r_i = 0.09 \text{ m}$	$\Omega = 1 \text{ rpm}$	$C = 10 \text{ }\mu\text{m}$
$r_o = 0.1 \text{ m}$	$\rho = 1.12 \text{ kg/m}^3$	$\mu = 18 \times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
160 elements	Lubricant : Air	$p_i = 0.101 \text{ MPa}$
	$R_g = 287.086 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$	$p_o \text{ varies}$
	$T = 293.3 \text{ K}$	

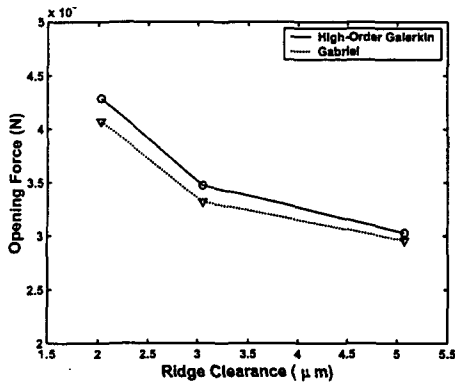


Fig. 8 Opening force versus ridge clearance for a gas spiral groove face seal

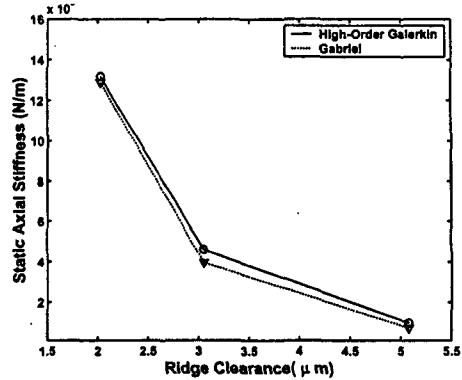


Fig. 9 Static axial stiffness versus ridge clearance for a gas spiral groove face seal

여기서,  $R_g$  는 가스 상수이며  $T$  는 기체의 절대온도이다. Table 1은 계산에 사용된 평면시일의 기하형상과 운전조건을 나타낸다. Fig. 6은 시일의 경계 압력비( $P_o/P_i$ )에 따른 누설량을 나타내고 있으며, 해석에 사용된 요소의 수는 총 160개이다. 두 방법에서 계산된 누설량은 약 1.14 %이하의 오차로 잘 일치하고 있다. Fig. 7은  $P_o/P_i=2$  일 때 사용된 요소 수의 증가에 따른 누설량의 수렴상태를 보여주고 있으며, 해석 예의 경우 요소 수가 400개 이상일 때 거의 수렴된 누설량을 제공하고 있다. 이로부터 고차 형상함수를 사용하여 압력의 진동을 제거한 경우라도 신뢰성 높은 누설량을 얻기 위해서는 사용된 요소 수를 증가시키면서 수렴성을 검토해야 함을 알 수 있다.

#### 4. 가스 스파이럴 그루브 페이스 시일의 해석

Table 2 Geometric parameters and operation conditions of a gas spiral groove face seal (Gabriel, 1978)

$r_i=0.05842 \text{ m}$	$\Omega=28600 \text{ rpm}$	$C=2.03\sim 5.08 \text{ }\mu\text{m}$
$r_g=0.069 \text{ m}$	$\rho=1.12 \text{ kg/m}^3$	$C_g=5 \text{ }\mu\text{m}$
$r_o=0.07778 \text{ m}$	$\mu=18\times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$	$p_i=0.1013 \text{ MPa}$
$\alpha=165^\circ$	Lubricant : Air	$p_o=4.5852 \text{ MPa}$
$N_g=10$		$\Lambda = 16 \sim 103$
$a_g=0.5$		

가스 시일의 개방력 및 강성은 액체 시일에 비해 상당히 작다. 따라서, 가스 미케니컬 페이스 시일의 경우 hydrodynamic 효과를 극대화 하기 위해 시일 면에 hydrodynamic pad or groove를 가지는 경우가 일반적이다. 여기서는, Gabriel[12] 논문에서 제시된 가스 spiral groove face seal을 대상으로 시일 틈새에 따른 개방력과 축방향 강성을 계산하고 결과를 비교하였다. Table 2는 계산에 사용된 시일의 기하형상과 운전조건을 나타낸다. 사용된 요소의 총 수는 1100개로 반경방향과 원주방향으로 각각 11개와 100개의 분할을 갖는다.

Fig. 8과 Fig. 9는 ridge 틈새(막 두께)에 따른 시일의 개방력과 정적 축방향 강성을 나타내며, ridge 틈새가 증가함에 따라 개방력과 축방향 강성 모두 감소하는 것을 볼 수 있다. 고차 형상함수를 적용한 결과들과 Gabriel의 결과들은 개방력에 대해서는 5.4%

이하 오차로 일치하고 축방향 강성에 대해서는 14.0%이하 오차로 일치한다.

## 5. 결론

본 논문에서는 향후 고속에서 운전되는 가스 spiral groove face seal (SGFS)의 성능 해석을 목적으로 개개 요소에 대한 단순화된 Reynolds 방정식으로부터 직접 유도된 고차 형상함수를 적용하여 Galerkin FE 유효 해석기술을 개발하였다. 먼저 고차 형상함수 적용의 유효성과 효율성 검증을 위해 1차원 slider bearing과 Rayleigh step bearing의 해석을 수행하였으며, 2차원 개발 해석코드의 검증을 위해 평면 가스 시일의 누설을 계산하였다. 그리고 SGFS를 대상으로 시일 틈새에 따른 개방력과 축방향 강성 해석을 수행하였다.

## 참고 문헌

- Booker, J. F., and Huebner, K. H., "Application of Finite Element Methods to Lubrication : An Engineering Approach," ASME Journal of Lubrication Technology, pp. 313~323, 1972.
- Rohde, S. M., and Oh, K. P., "Higher Order Finite Element Methods for the Solution of Compressible Porous Bearing Problem," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, pp. 903~911, 1974.
- Reddi, M. M., and Chu, T. Y., "Finite Element Solution of the Steady State Compressible Lubrication Problem," ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 92, pp. 495~503, 1970.
- Zirkelback, N. L., and San Andres, L., "Effect of Frequency Excitation on the Force Coefficients of Spiral Groove Gas Seals," ASME Trans. Journal of Tribology, Vol. 121, pp. 853~863, 1999.
- Nguyen, S. H., "p-Version Finite Element Analysis of Gas Bearings of Finite Width," ASME Trans. Journal of Lubrication Technology, Vol. 113, pp. 417~420, 1991.
- Heinrich, J. C., and Zienkiewicz, O. C., "Quadratic Finite Element Schemes for Two-Dimensional Convective Transport Problems," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 1831~1844, 1977.
- Garcia-Suarez, C., Bogy, D. B., and Talke, F. E., "Use of an Upwind Finite Element Scheme for Air Bearing Calculations," ASLE Special Publication SP-16 : Tribology and Mechanics of Magnetic Storage Systems, B. Bhushan, D. Bogy, N. S. Eiss and F. E. Talke, eds., pp. 90~96, 1984.
- Bonneau, D., Huitric, J., and Tournerie, B., "Finite Element Analysis of Grooved Gas Thrust Bearings and Grooved Gas Face Seals," ASME Trans. Journal of Tribology, Vol. 115, pp. 348~354, 1993.
- Faria, M. T. C., Finite Element Analysis of High-Speed Grooved Gas Bearings, Ph.D. dissertation, Texas A&M University; College Station, TX, 1999.
- Faria, M. T. C., and San Andres, L., "On the Numerical Modeling of High-Speed Hydrodynamic Gas Bearings," ASME Trans. Journal of Tribology, Vol. 122, pp. 124~130, 2000.
- Faria, M. T. C., "An Efficient Finite Element Procedure for Analysis of High-Speed Spiral Groove Gas Face Seals," ASME Trans. Journal of Tribology, Vol. 123, pp. 205~210, 2001.
- Gabriel, R. P., "Fundamentals of Spiral Groove Noncontacting Face Seals," ASLE Trans., Vol. 35, No. 7, pp. 367~375, 1978.
- Muijderman, E. A., Spiral Groove Bearing, Springer-Verlag, New York, 1966.
- Hamrock, B. J., Fundamentals of Fluid Film Lubrication, McGraw-Hill, New York, 1994.