

유전 알고리즘을 이용한 동적시스템의 TSK 퍼지 모델링

TSK Fuzzy Modeling of Dynamic System using GA

강정옥*, 이상민*, 조중선**

*창원대학교 제어계측공학과 대학원

**창원대학교 제어계측공학과

Jeong-Ok Kang*, Sang-Min Lee*, Joong-Seon Joh**,

**Dept. of Control and Instrumentation Eng, Changwon National University
(jsjoh@sarim.changwon.ac.kr)

ABSTRACT

본 논문에서는 TSK (Takagi-Sugeno-Kang) 형태의 퍼지모델을 유도하는데 있어서, 동적시스템의 비선형 미분방정식을 선형화시 off-equilibrium에서 발생할수 있는 상수항을 배제하고, TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수들을 GA(Genetic Algorithm)을 이용하여 최적화한후 이를 퍼지를 이용하여 합성함으로써, 실제 동적시스템을 묘사하는 비선형 미분방정식에 최적 근사화된 TSK 퍼지 모델링기법을 제시한다.

Keywords : TSK 퍼지모델, PDC, 유전자 알고리즘

I. 서론

일반적으로 퍼지 모델링은 다양한 비선형 시스템을 기술하고 제어하는데 많이 이용된다. 특히 TSK (Takagi-Sugeno-Kang) 퍼지모델[1]은 기존 동적시스템의 비선형 미분방정식이나 상태방정식을 이용하기 용이하고, 이렇게 설계된 TSK 퍼지모델을 제어하기 위한 TSK 퍼지제어기는 선형시스템의 제어 이론을 적용하기 용이한 PDC (Parallel Distributed Compensation) 기법[2]과 함께 널리 사용되며, 또한 LMI 기법[3,4] 등을 이용한 안정성에 관한 활발한 연구가 진행되고 있다. 그러나 실제 제어대상인 동적시스템을 표현하는 TSK 퍼지모델에 관한 연구는 미미한 실정이다.

TSK 퍼지제어기를 구성하기 위해서는 먼저 제어대상인 동적시스템을 부분별 선형화된 다수의 TSK 퍼지모델로 유도 또는 설계하여야 된다. 그러나 동적시스템의 모델링이 비선형 미분방정식일 경우, 이를 부분 선형화하기 위해 일반적으로 많이 사용되는 테일러 시리즈 전개를 사용하면 TSK 퍼지모델들의 후건부가 상수항이 존재하는 affine 형태의 모델이 되어 일반

적인 선형제어이론을 적용하기가 용이하지 않게 된다[5].

따라서 본논문에서는 동적시스템의 비선형 미분방정식으로부터 후건부가 부분선형화된 TSK 퍼지모델을 유도하는 기법을 제시한다. 또한 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수들을 유전자 알고리즘을 이용하여 최적화시키고, 최적화된 다수의 TSK 퍼지모델들을 합성하는 퍼지규칙을 사용함으로써, 실제 동적시스템의 거동에 대해 최적 근사화된 거동을 묘사할 수 있는 TSK 퍼지모델을 제시한다.

이는 실제 동적시스템의 거동을 충분히 묘사함으로써 보다 나은 TSK 퍼지제어기의 설계를 용이하도록 하고자하며, 이를 실제 동적시스템의 모델링 거동과 비교함으로써 그 효용성을 보인다.

II. TSK 퍼지모델링

일반적으로 동적시스템을 묘사하는 비선형 미분방정식을 이용하여 부분선형화된 TSK 퍼지모델을 나타낼 때, TSK 퍼지모델의 규칙을 유도하는 방법은 Wang [2]등이 사용한 방법 1

과 테일러 시리즈 1차전개를 이용하는 방법 2가 주로 사용된다.

Method 1

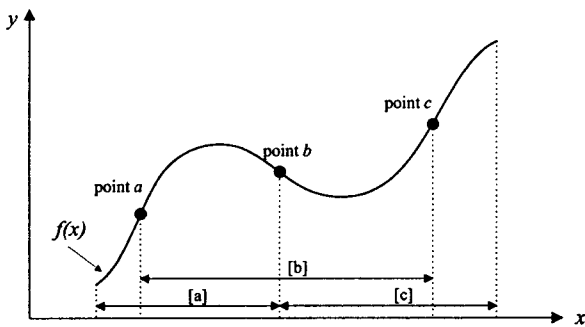
Plant Rule i :
 if $x_1(t)$ is M_1^i and ... and $x_n(t)$ is M_n^i
 then $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$, $i = 1, \dots, r$

Method 2

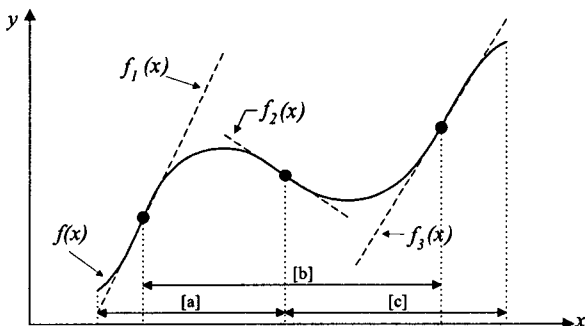
Plant Rule i :
 if $x_1(t)$ is M_1^i and ... and $x_n(t)$ is M_n^i
 then $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + c$, $i = 1, \dots, r$

여기서 c 는 비평형점에서 발생하는 상수이다. 이때 각각의 방법들로 나타낸 TSK 퍼지모델의 규칙들이 (1)과 같을 경우 묘사되는 동적시스템이 가지는 비선형 미분방정식의 출력에 대응하는 각 TSK 퍼지모델의 출력은 그림 1과 같다.

Plant Rule 1 : if x is $[a]$, then $y = f_1(x)$
 Plant Rule 2 : if x is $[b]$, then $y = f_2(x)$ (1)
 Plant Rule 3 : if x is $[c]$, then $y = f_3(x)$



(a) Wang 등이 사용한 TSK 퍼지모델



(b) 테일러 시리즈를 이용한 TSK 퍼지모델

그림 1. TSK 퍼지모델링을 이용한 동적시스템의 비선형 미분방정식 묘사

그러나 Wang 등이 사용한 방법 1의 경우, 비선형 미분방정식으로 표현되는 모든 동적시스템을 표현하는 일관된 방법이기보다는 단순히 TSK 모델규칙들이 가지는 특정포인트들에서만 동적시스템의 출력을 일치시켰으며, 방법 2의 경우는 부분선형화하고자 하는 포인트가 평형점이 아닐 경우 상수항의 발생으로 인해 선형 제어기법을 적용하기가 용이하지 않다.

따라서 본 논문에서는 이 두가지 방법들의 혼용하여 일반화시킨 TSK 퍼지모델링기법을 제시하고자 한다. 즉 동적시스템의 비선형 미분방정식의 부분선형화시, 동작점이 평형점일 경우 TSK 퍼지모델의 후건부를 테일러 시리즈 1차전개를 이용하고, 동작점이 평형점이 아닐 경우 TSK 퍼지모델의 후건부를 다음과 같이, 선형부분과 비선형부분으로 구분한뒤 동작점에 대하여 일반화시킴으로써 상수항이 존재하지 않는 부분선형모델을 유도하고자 한다. 즉 TSK 퍼지모델의 i 번째 규칙이 다음과 같을 경우

Plant Rule i :
 if $x_1(t)$ is M_1^i and ... and $x_n(t)$ is M_n^i
 then $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$, $i = 1, \dots, r$

동적시스템의 비선형 미분방정식을 다음과 같이 선형방정식과 비선형방정식으로 구분하여 유도한다.

$$\dot{x} = f_{lin}(x, u) + f_{non}(x, u) \quad (2)$$

이때

$$f_{lin}(x, u) = A_{lin} \cdot x + B_{lin} \cdot u \quad (3)$$

$$f_{non}(x, u) = A_{non}(x, u) \cdot x + B_{non}(x, u) \cdot u \quad (4)$$

이다. 따라서

$$\dot{x} = [A_{lin} + A_{non}(x, u)] \cdot x + [B_{lin} + B_{non}(x, u)] \cdot u \quad (5)$$

가 되며, 이를 특정 동작점인 x^* , u^* 에 대응하면

$$\dot{x} = [A_{lin} + A_{non}(x, u)]_{x=x^*, u=u^*} \cdot x + [B_{lin} + B_{non}(x, u)]_{x=x^*, u=u^*} \cdot u \quad (6)$$

가 된다.

이상에서 제시한 TSK 퍼지모델 도출방법을 Wang [2]등이 제시한 역도립진자시스템에 대하

여 적용해보고, 테일러 시리즈를 이용한 TSK 퍼지모델의 출력과 비교해본다.

예제 1. Wang 등이 제시한 역도립진자시스템의 비선형 미분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - amlx_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1)u}{4l/3 - aml \cos^2(x_1)} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 x_1 은 역도립진자의 각도, x_2 는 도립진자의 각속도, $g = 9.8m/s^2$, m 은 도립진자의 무게, M 은 카트의 무게, $2l$ 은 도립진자의 길이이며, u 는 카트에 가해지는 힘이고, $a=1/(m+M)$ 이다. 이때 본 시뮬레이션에서 사용된 파라미터들의 값은 $m=2.0kg$, $M=8.0kg$, $2l=1.0m$ 이다.

그리고 TSK 퍼지모델의 규칙은 Wang [2] 등의 논문에서 제시한 것과 동일하게 4개의 규칙을 사용하였으며, 이때 입력변수인 x_1 의 초기 소속함수는 그림 3과 같다. Rule 1의 후건부에 제시된 방정식은 역도립진자시스템의 비선형 미분방정식의 테일러 시리즈 1차전개를 통하여 유도되었으며, Rule 2~4의 후건부 방정식은 식 (6)에 의해서 유도된 것이다.

- Rule1: If x_1 is about 0
Then $\dot{x} = A_1x + B_1u$
- Rule2: If x_1 is about $\pm\pi/2$ ($|x_1| < \pi/2$)
Then $\dot{x} = A_2x + B_2u$
- Rule3: If x_1 is about $\pm\pi/2$ ($|x_1| > \pi/2$)
Then $\dot{x} = A_3x + B_3u$
- Rule4: If x_1 is about π
Then $\dot{x} = A_4x + B_4u$

여기서

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix} \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이며, $\beta = \cos(88^\circ)$ 이다. 구해진 각각의 TSK 퍼지모델과 실제 비선형 미분방정식을 역도립진자시스템의 운영영역에서 비교한 것이 그림 2이며, TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수는 그림 4와 같다. 그림 2에서 보듯이 테일러 시리즈

전개로 상수항을 가지고 있는 TSK 퍼지모델보다 상수항을 가지지않는 제안된 TSK 퍼지모델이 실제 비선형 미분방정식을 더욱 잘 묘사함을 알 수 있다. (Q.E.D.)

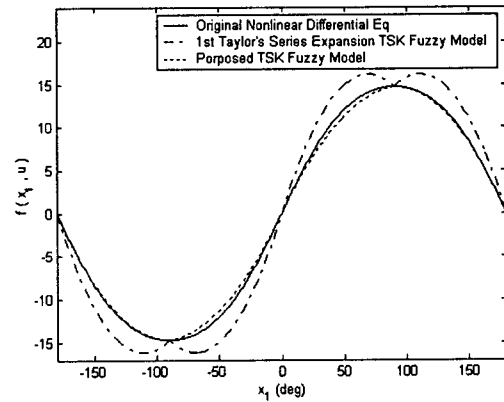


그림 2. 각 TSK 퍼지모델의 출력비교

III. TSK 퍼지모델의 최적화

본장에서는 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수의 형상을 GA를 이용하여 최적화함으로써 실제 동적시스템의 거동에 대하여 최적화시키는 방법을 제시한다. 또한 최적화된 다수의 TSK 퍼지모델들중에서 모델규칙으로 선정된 동작점에 최적근사화된 TSK 퍼지모델의 전건부들을 일반적인 퍼지이론을 이용하여 합성함으로써 보다 최적화된 TSK 퍼지모델을 도출하는 방법을 제시한다.

먼저 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수들이 다양한 형상을 가질수 있도록 삼각형 퍼지함수를 그림 3와 같이 구성한다.

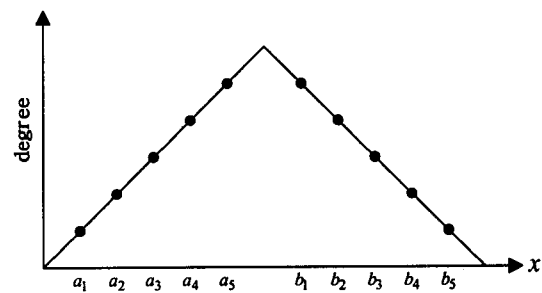


그림 3. GA를 위한 삼각형 퍼지함수

즉, 삼각형 퍼지함수의 꼭지점과 밑변의 끝점은 TSK 퍼지모델의 규칙에서 설정된 동작점으로 고정되고, 삼각형 퍼지함수의 각변의 형상을 5개의 염색체들($a_1 \sim a_5$, $b_1 \sim b_5$)을 한조로 구성하여, 이를 GA를 이용하여 동적시스템의 거동에 근사화되도록 최적화한다. 이때 동적시스템의 거동은 제어를 행하지않는 상태이다.

이렇게 GA를 이용하여 TSK 퍼지모델의 전

건부 소속함수를 최적화시 다양한 형태의 다수의 최적화모델을 구할 수 있다. 이는 GA의 특성상 단일 최적모델보다는 최적에 가까운 다수의 모델이 유도되기 때문이다. 따라서 이러한 최적근사화된 다수의 TSK 퍼지모델들의 전건부 소속함수들중 하나를 취하지 않고, TSK 퍼지모델 규칙으로 설정된 다수의 동작점에 최적 근사화된 각각의 전건부 소속함수들을 동작점을 입력변수로 하는 퍼지규칙을 구성하여 다수의 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수들을 합성한 TSK 퍼지모델을 도출하는 것이다.

IV. 시뮬레이션

본장에서 시뮬레이션 예제는 II장에서 제시한 역도립진자시스템의 TSK 퍼지모델을 사용한다.

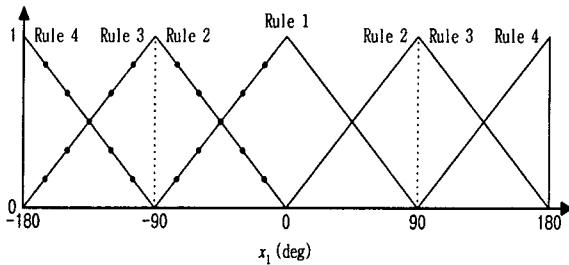


그림 4. TSK 퍼지모델의 초기 소속함수

TSK 퍼지제어의 입력변수인 x_1 의 입력범위인 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 에 대해서 TSK 퍼지모델 규칙이 좌우대칭이므로, 그림 4에서 보는바와 같이 좌측 $-180^\circ \sim 0^\circ$ 사이의 소속함수가 가지는 각변들의 형상 파라미터 20개에 대해서만 GA를 이용하여 최적근사화를 수행한다. 이때 GA의 평가는 역도립진자시스템의 비선형 미분방정식과 TSK 퍼지모델에 대해서 제어입력이가해지지 않은상태에서의 함수출력의 차를 최소화하는 것으로 한다. 이렇게해서 동작영역 45° 에 최적화된 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수의 예가 그림 5와 같다.

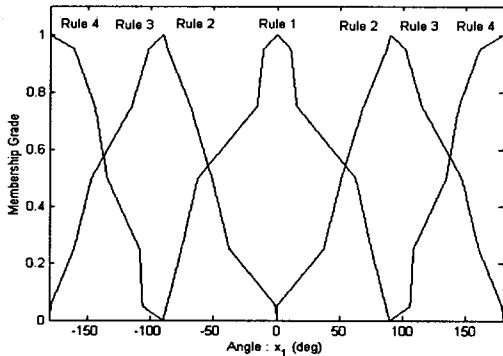


그림 5. 동작영역 45° 에 최적화된 소속함수

본 시뮬레이션에서는 역도립진자시스템의 동작영역을 $10^\circ, 45^\circ, 80^\circ$ 에 최적근사화시킨 3가지의 TSK 퍼지모델을 GA를 이용하여 도출하였다. 이를 다음의 퍼지규칙을 이용하여 진동작영역에 대해서 최적근사화된 TSK 퍼지모델을 도출하였으며, 전건부 소속함수는 그림 6과 같다.

- Rule 1: If x_1 is -80° , Then Model 3
- Rule 2: If x_1 is -45° , Then Model 2
- Rule 3: If x_1 is -10° , Then Model 1
- Rule 4: If x_1 is 10° , Then Model 1
- Rule 5: If x_1 is 45° , Then Model 2
- Rule 6: If x_1 is 80° , Then Model 3

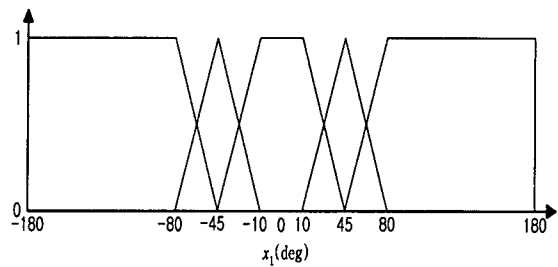


그림 6. TSK 퍼지모델의 합성을 위한 전건부 소속함수

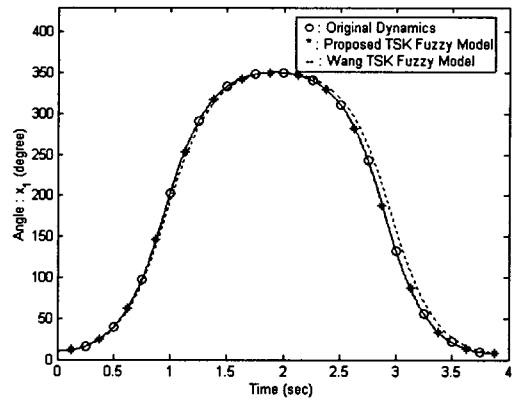


그림 7. 초기위치 10° 에 대한 각 TSK 퍼지모델의 거동비교

이상의 제안된 TSK 퍼지모델의 대하여 Wang 등이 제안한 TSK 퍼지모델과의 제어입력이 없는 상태에서의 각 초기위치에 대한 거동을 비교한 것이 표 1과 같다. 표 1은 실제 역도립진자시스템의 비선형 미분방정식의 거동과 각각의 TSK 퍼지모델의 거동을 여러 가지 초기위치에 대하여 거동의 차에 따른 LMS값을 비교한 것으로 전 초기동작영역에 대해서 제안된 TSK 퍼지모델이 실제의 시스템을 잘 묘사함을 보여주고 있다. 또한 그림 7에서는 초기동

표 1.여러가지 초기위치에 대한 각 모델별 성능평가

퍼지모델 초기위치	Wang Model	10° 최적근사화 Model	45° 최적근사화 Model	80° 최적근사화 Model	제안된 합성 Model
10°	225.4874	1.0854	15.3143	14.8282	1.0862
20°	249.4967	0.9659	6.0541	5.6952	3.1519
30°	217.0891	0.7162	0.7665	0.7713	0.7895
40°	170.3152	1.0517	0.9915	1.0504	0.8356
50°	124.1631	1.6052	1.0002	1.0546	1.0463
60°	85.4018	3.7003	2.3582	2.6587	2.5271
70°	56.0598	6.8912	1.0097	0.9516	0.9854
80°	35.8583	38.0235	2.4925	1.6035	1.6014
sum	1163.8714	54.0394	29.987	28.6135	12.0234

작영역 10°에서 제어입력이 없는 상태의 각각의 시스템 거동을 비교한 것이다.

V. 결론

이상에서 본논문은 비선형 시스템의 모델링을 위해 널리 사용되고 있는 TSK 퍼지모델링에 대하여 새로운 기법을 제시하였다.

동적시스템의 비선형 미분방정식을 TSK 퍼지모델화시, 평형점에서는 테일러 시리즈 1차 전개를 통하여 상수항이 존재하지 않는 TSK 퍼지모델을 취하고, 비평형점에서는 비선형 미분방정식을 선형부분과 비선형부분으로 나눔으로써 역시 상수항이 존재하지 않는 TSK 퍼지모델을 취하였다.

또한 TSK 퍼지모델의 후건부뿐만 아니라 전건부의 소속함수의 형상을 GA를 이용하여 최적근사화하고, GA를 이용하여 최적근사화된 다수의 TSK 퍼지모델들을 퍼지규칙을 이용하여 합성함으로써, 실제 동적시스템의 거동에 보다 최적근사화된 모델을 구할 수 있었다.

후기 : 본 연구는 한국과학재단 지정 창원대학교 공작기계기술연구센터의 지원에 의한 것입니다.

VI. 참고문헌

[1] Takagi, T. and Sugeno, M., "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control," *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern.*, vol. 15, no. 1, pp. 116-132, 1985

[2] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin, "An Analytical Framework of Fuzzy Modeling and Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues," *Proc. American Control Conf.*, Seattle, Washington, pp. 2272-2276, 1995

[3] J. Joh, R. Langari, and W. J. Chng, "A New Design Method for Continuous Takagi-Sugeno Fuzzy Controller with Pole Placement Constraints: An LMI Approach," *Proc. 1997 IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics*, Orlando, Florida, pp. 2969-2974, 1997

[4] J. Joh, S. K. Hong, Y. Nam, and W. J. Chung, "On the Systematic Design of Takagi-Sugeno Fuzzy Control Systems," *Proc. Int. Symp. on Engineering of Intelligent Systems/EIS'98*, Tenerife, Spain, pp. 113-119, 1998

[5] Johansen TA, Shorten R, and Murray-Smith R, "On the Interpretation and Identification of Dynamic Takagi-Sugeno Fuzzy Models," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 8 no. 3, pp. 297-313, 2000