

역최적 TS 퍼지 제어기의 설계

Design of Inverse Optimal TS Fuzzy Controllers

임채환, 콧기호, 박주영
고려대학교 제어계측공학과

Chae-Hwan Leem, Kiho Kwak, Jooyoung Park
Dept. of Control & Instrumentation Eng., Korea Univ.
(mirage@cie01.korea.ac.kr)

ABSTRACT

In this paper, we design TS(Takagi-Sugeno) fuzzy controllers for the systems that can be represented by the TS fuzzy model. We use inverse optimal approach in which the cost function is determined later than the Lyapunov function and its corresponding control input satisfying the design requirements such as stability and decay rate. The obtained design procedure is in the form of solving LMI(Linear Matrix Inequalities), thus very efficient in practice.

Keywords : TS Fuzzy Control, Inverse Optimal Approach, LMI

I. 서론

TS(Takagi-Sugeno) 퍼지 시스템은 모델을 구성하는 각 퍼지 IF-THEN 규칙의 전체부가 퍼지 규칙 고유의 형태를 띠는 반면에 각 결론부는 퍼지 개념이 배제된 선형 상태 방정식 형태인 $\dot{x} = A_i x + B_i u$ 형태로 표현되는 시스템으로써, 국소적 선형 시스템들의 퍼지 결합으로 해석될 수 있는 특징을 갖는다. TS 퍼지 시스템의 설계방법 중 최근 가장 주목받는 방법중 하나는 PDC(parallel distributed computation) 기법이다[1]. PDC 기법은 궁극적으로 전체 시스템을 만족시키는 퍼지 제어를 제공할 수 있기는 하지만, 일단 퍼지 제어기의 국소 이득들을 선택한 이후에 이들이 안정도들을 만족하였는지 확인하는 시행착오를 거쳐야 한다는 단점이 있다. 이러한 문제를 선형 행렬 부등식(LMI, linear matrix inequality) 기반의 PDC 설계 방법[2] 등으로 많은 부분 해결이 되었으며 계속 연구되어지고 있다.

본 논문에서는 TS 퍼지 제어기에 관한 깊은 이해를 바탕으로 효과적인 설계 방법론을 제시하고자 한다. 제어대상이 되는 시스템이 TS 퍼지 모델로 표현되면, 최적제어 문제의 해가 TS 퍼지 제어기 형태를 취하게 된다는 것과 이를 바탕으로 안정도, 감쇠율 등을 종합적으로 만족

하는 제어기 설계 방법론을 제안한다.

II. 본론

TS 퍼지 제어기에서 $z_i(t) \in R$ 와 M_{ij} 은 각각 전체부 변수와 퍼지 집합이고, r 은 IF-THEN 규칙의 개수이며, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^p$ 는 각각 상태 벡터와 입력 벡터라 할 때, 전체 시스템의 상태 방정식은 다음과 같이 표현된다:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1)$$

하중함수 w_i 는 음이 아니고 $\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$, $\forall t > 0$ 을 만족하고, 하중함수를 정규화 하면 상태 방정식(1)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (2)$$

본 논문에서는 최적제어와 관련된 문제중 하나인 비선형 상태방정식으로 표현되는 시스템 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 피드백 제어입력 $u(x)$ 를 구하고자 한다:

[조건1]. 평형점 $x = 0$ 가, 전역적 점근 안정인 (globally asymptotically stable) 상태가 된다.

[조건2] 다음과 같은 비용함수(cost function) J 를 최소화한다:

$$J = \int_0^{\infty} \{l(x) + u^T R(x) u\} dt. \quad (3)$$

여기에서 $l(x)$ 는 x 에 관하여 양의 정부호 함수이고, $R(x) = R(x)^T > 0, \forall x \neq 0$ 를 만족하는 대칭행렬이다. 이러한 문제는 다음과 같은 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 방정식을 이용하여 풀 수 있다.

보조정리 1[3]: 시스템 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 에 대하여, HJB 방정식

$$\begin{cases} l(x) + L_f V(x) - \\ (1/4)L_g V(x)R^{-1}(x)(L_g V(x))^T = 0 \\ V(0) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

을 만족하고,

$$u^*(x) \triangleq -(1/2)R^{-1}(x)(L_g V(x))^T \quad (5)$$

로 정의되는 제어입력이 시스템의 평형점 $x=0$ 를 전역적 점근 안정이게 하는 양의 정부호 함수 $V(x) \in C^1(R^n)$ 가 존재한다고 하자. 이 경우에, u^* 는 비용함수 (3)을 최소화시키는 최적 안정 제어입력(optimal stabilizing control input)이 된다.

보조정리 2[3]: 시스템 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 과 양의 정부호 함수 $l(x)$ 에 대하여, 다음의 두 조건을 모두 만족하는 양의 정부호 함수 $V(x) \in C^1(R^n)$ 가 존재하는 경우를 생각하자.

조건1: $l(x) \triangleq -L_f V(x) + (1/4)\{L_g V(x)\}\{L_g V(x)\}^T > l(x) (> 0), \forall x \neq 0$

조건2: 제어입력 $u^*(x) \triangleq -(1/2)\{L_g V(x)\}^T$ 는 평형점 $x=0$ 을 전역적 점근 안정이게 한다.

이 경우 u^* 는 다음의 비용함수

$$J = \int_0^{\infty} \{l(x) + u^T u\} dt \quad (6)$$

를 최소화시키는 최적안정 제어입력이다.

TS퍼지시스템 (2)를 고쳐 쓰면,

$$\dot{x}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) \right\} + \left\{ \sum_{i=1}^r h_i B_i \right\} u(t) \quad (7)$$

$$f(x) \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) \right\}, \quad g(x) \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^r h_i B_i \right\} \quad (8)$$

이 된다. $V(x)$ 가 양의 정부호인 $x^T P x$ 형태라고 가정하고 $l(x) = x^T L x, L > 0$ 인 경우에 보조정리를 적용하면 조건1은 다음과 동치가 된다.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i (A_i^T P + P A_i) - \\ \sum_{i,j=1}^r h_i h_j P B_i B_j^T P < -L < 0 \end{cases} \quad (9)$$

그리고, 조건2에 제시된 제어입력 u^* 은

$$u^* = \sum_{i=1}^r h_i (-B_i^T P) x \quad (10)$$

이 된다. 따라서 우리는 그동안 퍼지적인 사고와 편의를 고려하여 사용해왔던 TS 퍼지 제어가 사실은 이상에서 설명한 바와 같은 최적화 문제의 해의 형태를 띠고 있음을 확인할 수 있다.[4]

이상에서 설명한 내용들은 다음과 같은 정리로 종합 될 수 있다.

정리 1 : 주어진 퍼지시스템(7)과 양의 정부호 함수 $l(x) = x^T L x$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 대칭행렬 P 가 존재하는 경우를 생각하자.

$$\begin{cases} P > 0 \\ \sum_{i=1}^r h_i (A_i^T P + P A_i) - \sum_{i,j=1}^r h_i h_j P B_i B_j^T P + L < 0 \end{cases} \quad (11)$$

이 경우에 TS 퍼지 제어기 u^* 는 함수

$$l(x) \triangleq -x^T \left\{ \sum_{i=1}^r h_i (A_i^T P + P A_i) - \sum_{i,j=1}^r h_i h_j P B_i B_j^T P \right\} x \quad (12)$$

에 의해 정의되는 비용함수(6)를 최소화시키고 평형점 $x=0$ 을 전역적 점근 안정이게 하는 최적 안정 제어 입력이다.

정리 1을 이용한 제어기 설계방법은, $l(x)$ 를 미리 고정하지 않은 상태에서 (11)을 만족하는 P 와 제어입력 u^* 를 구한 후 다음 단계에서 $l(x)$ 를 (12)와 같이 정해주므로 역최적화 방법이 된다. 정리 1의 내용은, 최적 제어기 (10)이 안정도뿐만 아니라 여타 성능요건을 충족시킬 수 있도록 개선하는 방향으로 확장할 수 있다. 본 논문에서는, '페루프의 감쇠율(decay rate)이 $\beta (> 0)$ 보다 크다'는 설계요건이 추가되는 경우를 고려한다. 시스템의 감쇠율은, 모든 상태 궤적 $x(t)$ 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\beta t) \|x(t)\| = 0$$

을 만족하는 β 값들 중 가장 큰 값(즉, sup값)을 의미한다. 양의 정부호인 이차 함수 $V(x) = x^T P x$ 를 이용하면, 감쇠율이 하한값(a lower bound)은 다음에 소개하는 논리에 의하여 구할 수 있다:

0이 아닌 모든 상태 궤적에 대해

$$dV(x(t))/dt < -2\beta q V(x(t)), \quad \forall t \geq 0$$

이 만족되는 경우를 생각하자. 이 경우에 일계(first order) 선형 미분 방정식의 해의 성질과 $V(x)$ 가 양의 정부호 이차식을 활용하면, 위의 식은 결국 시스템의 감쇠율이 β 이상 되도록 하기 위한 충분조건이 됨을 알 수 있다. 우리가

고려하는 페루프와 양의 정부호인 이차식 $V(x) = x^T P x$ 에 대하여,

$$M_{ij}(P) \triangleq A_i^T P + P A_i - P B_i B_j^T, \forall i, j$$

$$N_{ij}(P) \triangleq \{M_{ij}(P) + M_{ji}(P)\}/2, \forall i \neq j$$

로 정의되는 행렬 $M_{ij}(P)$ 과 $N_{ij}(P) = \{N_{ji}(P)\}^T$ 를 사용하여 $dV(x(t))/dt$ 를 전개하면,

$$\begin{aligned} dV(x)/dt &= x^T \left\{ \sum_{i,j=1}^r h_i h_j (A_i^T P + P A_i - 2P B_i B_j^T P) \right\} x \\ &\leq x^T \left\{ \sum_{i,j=1}^r h_i h_j (A_i^T P + P A_i - P B_i B_j^T P) \right\} x \\ &= x^T \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2 M_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j N_{ij}(P) \right\} x \end{aligned}$$

이 된다. 따라서,

$$\begin{cases} P > 0 \\ \sum_{i=1}^r h_i^2 M_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j N_{ij}(P) < -2\beta P \quad (< 0) \end{cases}$$

이 성립하면 페루프의 감쇠율이 β 이상일 것을 보장할 수 있다. 그리고, 정리 1의 조건 (11)과 위의 감쇠율 조건으로부터, 주어진 행렬 $L > 0$ 과 양수 β 에 대하여 조건,

$$\begin{cases} P > 0 \\ \sum_{i=1}^r h_i^2 M_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j N_{ij}(P) < -2\beta P - L \quad (< 0) \end{cases}$$

이 성립할 경우에는 안정도와 감쇠율 조건, 그리고 $l(x) > \lambda(x), \forall x \neq 0$ 이 모두 만족됨을 알 수 있다. 이상의 내용을 정리하면 다음과 같이 요약된다.

정리 2 : 퍼지시스템(7)과 주어진 행렬 $L > 0$ 및 양수 β 에 대하여, 다음조건을 만족하는 대칭행렬 P 가 존재하는 경우를 생각하자.

$$\begin{cases} P > 0 \\ \sum_{i=1}^r h_i^2 M_{ii}(P) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j N_{ij}(P) + 2\beta P + L < 0 \end{cases} \quad (13)$$

이 경우에 TS 퍼지 제어기 입력(10)은 다음을 만족한다.

(1) $\lambda(x) = x^T L x$ 보다 큰 양의 정부호 함수

$$\begin{aligned} \lambda(x) \triangleq & -x^T \left\{ \sum_{i=1}^r h_i (A_i^T P + P A_i) \right. \\ & \left. - \sum_{i,j=1}^r h_i h_j P B_i B_j^T P \right\} x \end{aligned}$$

에 의해 정의되는 비용함수(6)를 최소화시킨다.

(2) 평형점 $x=0$ 을 전역적 점근 안정이게 한다.

(3) 페루프의 감쇠율이 β 이상일 되도록 한다.

이상 정리의 조건들을 활용하면 다음과 같은 설계 방법을 구할 수 있다.

[설계방법]

(1) 주어진 행렬 $L > 0$ 과 양수 β 에 대하여 다음 조건을 만족하는 $Q = Q^T$ 와 $X = X^T > 0$ 을 구한다.

$$\begin{cases} Q > 0 \\ \Psi_{ii}(Q) + 2\beta Q + X < 0, \forall i \\ \Gamma_{ij}(Q) + 2\beta Q + X < 0, \forall i < j \\ \begin{bmatrix} X & Q \\ Q & L^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (14)$$

(여기에서 Ψ_{ii} 와 Γ_{ij} 는 각각 다음과 같이 정의되는 항이다.

$$\Psi_{ii}(Q) \triangleq Q A_i^T + A_i Q - B_i B_i^T \quad (15)$$

$$\Gamma_{ij}(Q) \triangleq \{Q(A_i + A_j)^T + (A_i + A_j)Q - B_i B_j^T - B_j B_i^T\}/2 \quad (16)$$

그리고, (14)의 세 번째 그룹의 부등식 중 $h_i h_j = 0, \forall x$ 가 성립하는 순서쌍 (i, j) 의 경우에는, 모든 $t \geq 0$ 에 대해서 $h_i(x(t)) h_j(x(t)) = 0$ 이 되므로 설계과정에서 고려할 필요가 없다.)

(2) 각 이득값이 $K_i = -B_i Q^{-1}, i=1, \dots, r$ 인

TS 퍼지 제어기 $u = \sum_{i=1}^r h_i K_i x$ 는 퍼지시스템

(7)에 대하여 정리 2의 (1)-(3)을 만족시키는 제어기이다.

III. 예 제

지금까지 여러 가지 설계 조건이 만족시킬 수 있는 TS 퍼지시스템의 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 이들은 LMI의 형태를 이루고 있고, MATLAB의 LMI Control Toolbox[5] 등을 이용하여 손쉽게 해를 구할 수 있다. 참고 문헌[6]의 예제 2에서 고려된 비선형 진동 시스템(mass-spring-damper system)의 운동 방정식은 다음과 같다:

$$M\dot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = \phi(\dot{x})u \quad (20)$$

여기에서 M 은 질량, $g(x, \dot{x}) = D(c_1 x + c_2 \dot{x})$ 은 damper에 대한 비선형항, $f(x) = c_3 x + c_4 x^3$ 은 스프링에 대한 비선형항, $\phi(\dot{x}) = 1 + c_5 \dot{x}^3$ 은 입력에 대한 비선형항을 나타낸다. 이 TS 퍼지 모델에 사용된 퍼지 집합의 멤버십 함수는 그림 1과 같이 정의되었다.

위의 퍼지시스템은 다음과 같은 상태 방정식을 갖게된다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^6 h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (21)$$

이러한 퍼지시스템에 대하여, 감쇠율에 대한 하한값 $\beta=0.3$ 과 비용함수에 대한 조건 $\lambda(x) \geq \lambda(x) = 0.01x_1^2 + x_2^2$ 를 설계조건으로 하여 [설계방법]의 선형행렬 부등식(14)을 풀면 Q 가 얻어

진다. 이렇게 얻어진 최적 제어기를 시스템(21)에 적용하면, 그림 2의 결과를 얻게 된다.

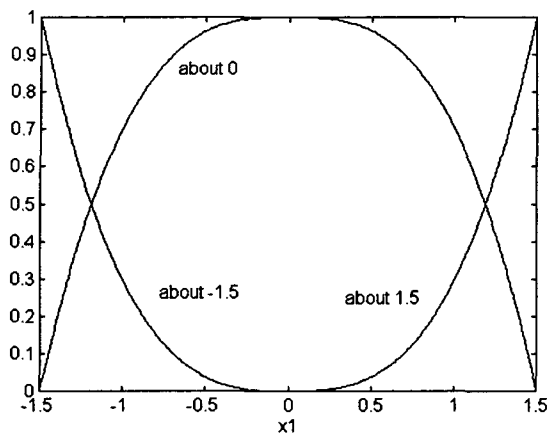


그림 1. x_1 에 대한 퍼지 집합

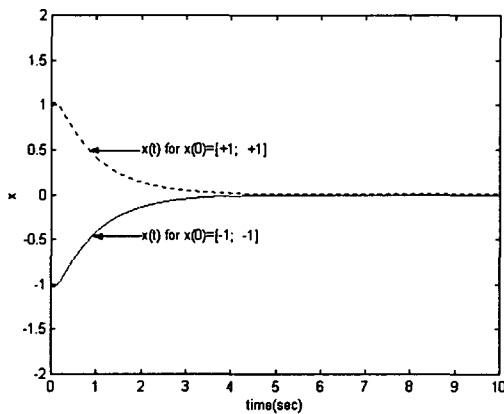


그림 2. 각 초기 조건에 따른 시스템의 응답

IV. 결론

본 논문에서는, TS 퍼지모델로 표현될 수 있는 비선형 시스템에 대해서 일정한 설계 요건이 만족되는 TS 퍼지 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 본 논문에서는 역최적화 방법을 이용하여 안정도와 감쇠율등의 설계 요건을 만족하는 최적 TS 퍼지 제어기를 선형 행렬 부등식을 푸는 형태로 확립하였다. 이러한 선형 행렬 부등식은 MATLAB의 LMI control toolbox와 같은 보편적인 소프트웨어로 구현이 가능한 장점이 있다.

V. 참고문헌

[1] H. Wang, K. Tanaka and M. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues." IEEE Transactions of Fuzzy Systems, vol.

4, pp. 14-23, 1996.
 [2] K. Tanaka, T. Ikeda and H. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based design," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 6, pp. 250-265, 1998.
 [3] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. Kokotovic, Constructive Nonlinear Control, (Springer-Verlag, New York, 1997).
 [4] Y. Park, J. Park, and M.-J. Tak, "Optimal stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems with application to spacecraft control," Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Denver, Colorado, USA, vol. 2, pp. 1910-1918, 2000.
 [5] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, LMI Control Toolbox, (Math Works Inc., Natick, MA, 1995)
 [6] K. Tanaka, T. Ikeda and H. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H_∞ control theory and linear matrix inequalities," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 4, pp. 1-13, 1996.