주파수 응답해석의 모드 축약법

Mode Truncation Method in Frequency Response Analysis

조태민*, 이은경*, 임경화**
*한국기술교육대학교 기계공학과 대학원
**한국기술교육대학교 제어시스템공학과

Tae Min Cho*, Eun Kyoung Lee*, Kyung Hwa Rim**,
*Graduate School of Mechanical Engineering, Korea Univ of Technology & Education
**School of Control System Engineering, Korea Univ of Technology & Education,
(rim@kut.ac.kr)

ABSTRACT

In the frequency response analysis using a modal method, it is very important to determine the number of modes involved with the formulation of a frequency response function. Most engineers are inclined to determine mode truncation with their experience. But it is difficult for non-experts to decide the mode truncation reasonably in many problems of dynamic analyses. In this study, fuzzy theory is used to standardize the empirical determination of mode truncation so that not only the experts but also non-experts can decide a proper mode truncation easily. Fuzzy rule base is based on the simulation results using finite element method. Numerical simulations show that the developed mode truncation method is a very effective method to choose the number of the considered modes.

Key Words : Fuzzy Theory, Frequency Response Analysis(주파수응답해석), Modal Method (모달법), Mode Truncation(모드 축약), Finite Element Method(유한요소법).

I. 서 론

일반적인 구조물의 해석은 대부분 수치해석을 이용하여 해를 구하게 되며, 특히 유한요소법(Finite Element Method)을 많이 사용하고 있다. 유한요소법은 복잡한 구조물을 미소한 요소로 나누어 응력이나 변형량 등을 계산한다. 구조물의 동특성을 파악하기 위하여 정규 모드(Normal Mode)해석, 과도응답해석, 주파수응답해석 등을 수행하며, 진동실험에서 얻어진 데이터를 사용하여 유한요소모델을 개선하는 방법도 활발히 연구되었다.[1,2] 유한요소법을 이용한 대부분의 상용프로그램에서 주파수 응답해석을 수행할 때 2가지의 방법을 사용한다.[3] 첫 번째 방법은 직접법(Direct Method)인데, 이것은 결과의 정확도는 높지만 많은 계산 시간을 필요로 한다. 두 번째 방법은 모달법(Modal Method)인데, 이것은 결과의 정확도는 직접법에 비하여 다소 떨어지지만, 계산 시간이 현저히 줄어드는 장점이 있다. 대부분의 현장 엔지니어들은 해석 시간의 단축을 위하여 모달법을 이용하고 있다.

모달법을 이용한 주파수응답해석에서 중요한 것은 모드 축약(Mode Truncation)의 결정이다. 그러나 이것을 적절히 결정하는 것은, 비전문가로서는 어려운 일이다. 이러한, 불명확하고 애매한 의사결정에는 퍼지이론이 적합하다.[4]

본 논문에서는 퍼지이론을 도입하여, 모달법으로 주파수 응답해석을 수행했을 때, 그 결과가 직접법의 정확도 95% 이상 수준에 이르는 모드의 범위를 찾고자 한다. 퍼지이론과 Visual C++ 6.0을 이용하여 비전문가도 손쉽게 모드의 범위를 구할 수 있는 프로그램을 개발하였다.

II. 주파수 응답해석

주파수 응답해석은, 정상상태(Steady State) 가진에 대한 구조물의 응답을 계산하기 위하여 이용되는 방법이다.

2.1 직접법을 이용한 주파수 응답해석

직접법을 이용한 주파수 응답해석에서는 복소 대수학을 이용하여 연성된 행렬 방정식의 집합을 풀어 이산화 된 가진 주파수에 대해서 구조물의 거동을 계산한다. 조화 가진이 작용하는 감쇠 강제 진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+Kx(t)=P(\omega)e^{i\omega t} \qquad (1)$$

변위를 다음과 같이 가정하면,

$$x(t)=u(\omega)e^{i\omega t} \qquad (2)$$

여기서 $u(\omega)$는 복소 변위 벡터이다. 식(2)에 대하여 미분을 하여 식(1)의 운동방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$[-\omega^2 M+i\omega C+K]u(\omega)=P(\omega) \qquad (3)$$

위의 운동 방정식에 가진 주파수 ω를 대입하면 복소 대수학을 이용하여 풀 수 있다.

2.2 모달법을 이용한 주파수응답해석

모달 주파수 응답해석은 운동방정식을 축약시키고, 비연성화 시키기 위하여 구조물의 모드를 이용한다. 변위를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$x(t)=[\varphi]\,\xi(\omega)e^{i\omega t} \qquad (4)$$

여기서 모드행렬 $[\varphi]=[\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n]$ 이며, φ_i는 i번째 정규모드형상(Normal Mode Shape)이다.

식(4)를 식(1)의 운동방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$[-\omega^2 M\varphi+i\omega C\varphi+K\varphi]\xi(\omega)=P(\omega) \qquad (5)$$

위의 식(5)를 비연성화 시키기 위하여 양변에 φ_i^T를 곱하면

$$[-\omega^2\varphi^T M\varphi+i\omega\varphi^T C\varphi+\varphi^T K\varphi]\xi(\omega)=\varphi^T P(\omega) \qquad (6)$$

c_i를 모달비례감쇠비(Modal Proportional Damping Ratio)이라고 가정하면, 각 모드의 직교성에 의해 다음과 같이 정리된다.

$$\xi_i(\omega)=\frac{p_i(\omega)}{-m_i\omega^2+i\omega c_i+k_i} \qquad (7)$$

식(7)에서 얻은 $\xi_i(\omega)$를 식(4)에 대입하면, 절점의 변위 $x(t)$를 계산 할 수 있다.[5]

2.3 주파수 응답해석에서의 모드 축약법

주파수 응답해석의 모달법에 있어서, 계산된 모든 모드가 필요하지는 않다.[3] 구조물의 거동은 저차 모드에 많이 몰려 있으므로, 적절한 수의 모드를 고려하면 직접법에 거의 근접하는 해를 구할 수 있다. 그러나 구조물의 형상과 물성치(재질, 두께, 단면형상 등), 하중조건, 구속조건에 따라서 포함할 모드의 범위는 달라지므로, 해석에 경험이 없는 비전문가의 입장에서, 적절한 모드의 범위를 찾아내는 것은 어려운 일이다. 따라서, 비전문가도 전문가의 수준에 이르는 모드 축약을 하기 위하여 퍼지이론을 이용하였다.

III. 퍼지 시스템의 구성

3.1 퍼지 입·출력 변수와 Membership함수

보통의 경우, 주파수응답해석에 앞서서 정규모드 해석이 이루어지므로, 정규 모드 해석결과를 이용하기로 하였다.

우선 퍼지 입력변수 3개를 고려하였다.

① 구조 감쇠비 : G

② 고유진동수의 분산정도 : A

③ 모드의 분포도 : K

$$A=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f[i]-f_c}{f_c}$$

여기서 f_c는 구하고자 하는 주파수응답함수(FRF)의 관심주파수 범위이다. $f[i]$는 관심주파수보다 큰 i 번째 고유진동수이며, N은 관심주파수의 1배에서 3배 사이에 있는 모드 개수이다. 한편 K는 다음과 같이 정의한다.

$$K=\frac{N}{N_c}$$

여기서 N_c는 관심 주파수 범위 내에 있는 모드의 개수이다.

6개의 각각 다른 구조물에 경계조건과 하중조건을 부여하여, 상용 유한요소법 프로그램을 이용하여 시뮬레이션 하였다.

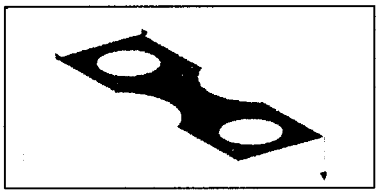


그림 1. 평판모델

그림 1은 6개의 모델 중 평판모델을 유한요소로 모델링한 것이다. 시뮬레이션 결과는 표 1과 같다. 오차는 관심영역 주파수범위에서 직접법으로 주파수응답함수를 계산했을 때와 비교하여, 모달법으로 계산했을 때의 평균 오차이다.

표 1. 평판모델의 직접법과 모달법의 오차

구조 감쇠비 (%)	관심주파수의 범위에 따른 모달법 해석의 오차 (%)		
	100 Hz	200 Hz	300 Hz
0.005	6.41	3.59	2.01
0.03	6.16	3.44	1.97
0.1	4.75	2.43	1.59

표 1에서 모달법으로 해석 시, 포함한 모드의 범위가 커짐에 따라 직접법과 비교한 오차는 작아짐을 알 수 있다. 6개의 모델에 대한 시뮬레이션 결과 구조물의 감쇠는 해석결과에 영향을 미치는 형태가 불분명하여 입력변수에서 제외하기로 하였다. 따라서 고유진동수의 분산정도와 모드의 분포도로 단일 룰 베이스를 구성하기로 하였다.

① 입력변수 A(고유진동수의 분산정도)

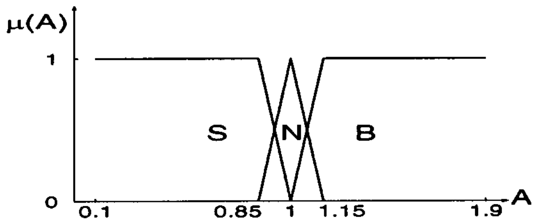


그림 2. 입력변수 A에 대한 소속함수

여기서 S : Small, N : Normal, B : Big 이다.

② 입력변수 K(모드의 분포도)

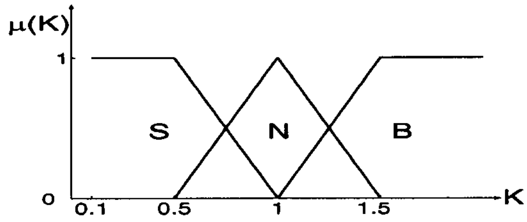


그림 3. 입력변수 K에 대한 소속함수

③ 출력변수 D(해석에 포함할 모드의 범위)

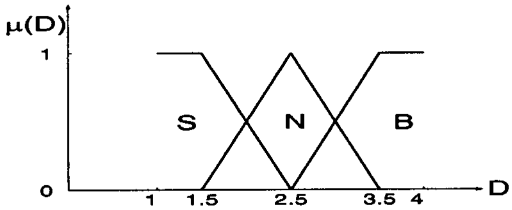


그림 4. 출력변수 D에 대한 소속함수

3.2 퍼지 룰 베이스 및 퍼지 추론

퍼지 룰 베이스는 전문가의 경험과 지식을 대체하는 부분이다. 많은 현장 전문가를 찾아서 인터뷰하여 다양한 구조물에 대한 정보를 수집하는 것이 최상의 방법이지만, 시간이 너무 많이 소모되는 단점이 있다. 따라서 본 논문에서는 상용 유한요소법 프로그램을 이용한 6개 모델의 시뮬레이션 결과를 바탕으로 퍼지 룰 베이스를 표2와 같이 구성하였다.

표 2. 퍼지 룰 베이스

변수K \ 변수A	S	N	B
S	S	S	N
N	S	N	B
B	N	B	B

추론 방법으로는 가장 일반적으로 사용되고 있는 Mamdani의 최소 최대 연산법 (Min-Max Method)을 이용하였다.

3.3 비퍼지화(Defuzzification)

비퍼지화는 가장 합리적인 해를 구할 수 있는 무게 중심법을 이용하였다.

$$D = \frac{\int \text{미소면적}d * \text{미소면적}d\text{의중심좌표값}}{\text{퍼지추론결과에의한전체면적}} \tag{8}$$

식(8)에서 D, 즉 퍼지 출력 변수의 값을 구할 수 있다. 구하고자 하는 주파수 응답함수의 최대 주파수 값에 D를 곱하면 최종적으로 해석에 포함할 모드의 주파수 범위를 구할 수 있다. 즉, 해석에 포함할 주파수 = D*주파수 응답함수의 최대 관심 주파수 값이 된다. 예를 들어, 100Hz까지의 주파수응답함수를 구하고자 할 때, 퍼지 출력 변수의 값이 D=3 이면, 해석에 포함할 주파수는 3*100이 된다. 즉 300 Hz 까지 모드를 포함하여 해석해야만 직접 법의 95% 수준에 도달하는 해석결과를 얻을 수 있다는 의미이다.

Ⅳ. 모드축약법의 검증

개발된 모드축약법의 검증을 위하여 그림 5와 그림 6의 2개 구조물을 선택하여, 상용 유한요소법 프로그램을 이용하여 100Hz까지 주파수 응답함수를 구하였다. 먼저 정규 모드 해석을 수행하였다. 그런 다음 임의의 구조물에 대하여 직접법으로 100 Hz까지 주파수 응답함수를 구하였다. 그리고, Visual C++으로 작성한 퍼지프로그램을 이용하여 모달법을 사용할 때 해석에 포함할 모드의 범위를 구한다. 이 과정에는 정규 모드 해석 결과가 이용된다. 그리고 제시한 범위 내에서 주파수 응답함수 구하여 비교하였다.

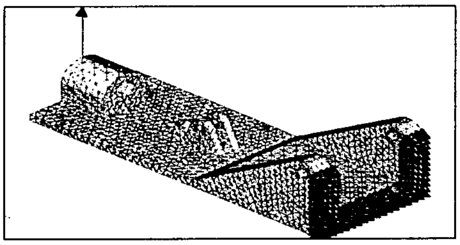


그림 5. 시뮬레이션 모델 1

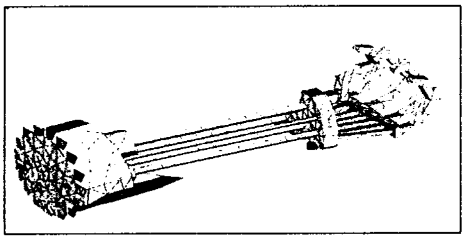
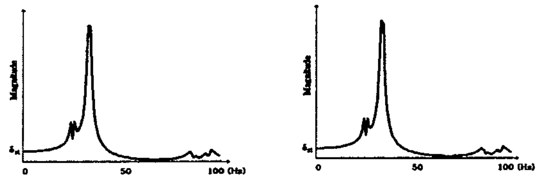


그림 6. 시뮬레이션 모델 2

퍼지프로그램을 이용한 출력 변수의 값은 표 3과 같다. 2개 모델에서 퍼지 출력 변수의 값은 상용 유한요소법 프로그램이 추천하는 일반적 범위인 3배 내외 정도와 유사함을 확인할 수 있다.[3] 제시한 주파수의 범위에 있는 모드만을 포함하여 해석한 결과가 그림 7과 표3에 있다. 그림 7은 시뮬레이션 모델 2에 대해서 직접과 모달법으로 구한 주파수 응답 함수이다. 전체적인 함수의 형태는 일치하는 것을 확인할 수 있다. 표 3에서 직접법과 모달법의 오차 계산은 100Hz 까지 각각의 주파수에 해당하는 값들을 이용하였다. 또한 100 Hz까지의 범위 중 가장 큰 값(Peak)에 대해서도 비교하였다. 여기서 모달법으로 구한 주파수 응답함수가 직접법의 95% 이상 근접함을 확인할 수 있었다.

표 3. 퍼지출력변수치와 주파수응답함수 오차

시뮬레이션 모델	퍼지 출력 변수의 값(D)	주파수응답함수의 오차 (%)	
		0~100 Hz	Peak
모델 1	2.93	2.95	0.007
모델 2	3.45	1.66	1.34



(a) 직접법 (b) 모달법

그림 7. 시뮬레이션 모델 2의 주파수 응답함수

Ⅴ. 결론

본 연구에서는 모달법으로 주파수 응답해석을 할 때, 결정하기 어려운 모드 축약을 퍼지 이론을 적용하여 구하였다. 퍼지 룰 베이스에는 전문가의 경험과 지식을 대신하여, 상용프로그램으로 시뮬레이션을 수행한 결과가 반영되었다. 결과 검증을 위하여 임의의 구조물 2개를 선정하였다. 프로그램을 실행시켜서 나온 결과대로 모달 주파수 응답해석을 하면 모두 직접법의 95% 이상 근접하는 결과를 구할 수 있었다. 비전문가가 결정하기 어려운 모드 축약을 퍼지 이론을 이용하여 전문가의 판단과 유사한 결과를 도출할 수 있음을 본 연구를 통하여 확인할 수 있었다. 더 많은 시뮬레이션 자료와 현장 전문가의 경험과 지식이 더해진다면 보다 나은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

Ⅵ. 참고문헌

[1] Mottershead, J.E., Friswell, M.I., *Model Updating in Structural Dynamics : A survey*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 167, No. 2, pp. 347~375, 1993.

[2] 서상훈, 지태한, 박영필, *주파수응답함수를 이용한 유한요소모델의 개선 및 결합부 동정*, 한국소음진동공학회지, 제 7권, 1호, pp. 61~69, 1997.

[3] *MSC/NASTRAN v69 Basic Dynamic Analysis User's Guide*, MSC, 1997.

[4] 변증남, *퍼지논리 제어*, 홍릉과학출판사, 1997.

[5] S. S. RAO, *Mechanical Vibration*, Addision - Wesley, 1995.