

적응요소 MLFMA를 이용한 유전체가 포함된 3차원 구조의 정전용량계산

김 한, 안 창 희
영남대학교 전자정보공학부

A fast capacitance extraction algorithm for multiple 3-dimensional conductors with dielectrics using adaptive triangular mesh

Han Kim, Chang Hoi Ahn
School of EECS, Yeungnam University
E-mail : chahn@yu.ac.kr

ABSTRACT

This paper describes to extend the MLFMA(Multi-Level Fast Multipole Algorithm) for three-dimensional capacitance computation in the case of conductors embedded in an arbitrary dielectric medium. The triangular meshes are used and refined in the area which has heavy charge density. This technique is applied to the capacitance extraction of three-dimensional structures with multiple dielectrics. The results show good convergence with the comparable accuracy, and this adaptive technique coupled with MLFMA is useful to reduce computing time and the number of elements without additional computational efforts in large three dimensional problems.

I. 서론

정보통신기술의 발전에 따라 더욱 수요가 늘어나고 있는 VLSI(very large scale integration)의 설계에 있어서, 많은 경우 유전체내에 도체들이 존재하는 복잡한 3차원 구조에서의 정확한 정전용량 계산이 필요하다. 정전용량의 수치적인 계산을 위한 방법으로는 최근에 개발되어 많은 미지수를 갖는 문제의 경우 계산이 매우 용이한 방법으로 알려진 MLFMA(Multi-Level Fast Multipole Algorithm)가 있다. 이 방법은 일반적으로 균일한 매질내의 도체 구조에 관한 정전용량의 계산에 많이 이용되어 왔는데[1-3], 최근 들어 임의의 유전체가 있는 경우와 유전체층이 있는 경우의 도체에서의 정전용량에 대

한 연구가 드물게 있어 왔다.[4,5]

본 논문에서는 유전체 구조와 함께 여러 도체가 존재하는 경우의 정전용량 계산을 수행하였다. 이 경우에 적합한 ECF(equivalent charge formulation)을 소개하였으며, 이것을 적응요소 MLFMA에 적용하는 방법을 제안하였다[6]. 임의의 유전체 구조와 함께 존재하는 도체에서의 정전용량 계산을 위해 ECF을 이용할 경우 도체-유전체 경계면뿐만 아니라 유전체-유전체 경계면에서도 요소를 나누어야 하기 때문에 매우 많은 요소를 필요로 하게 된다. 본 논문에서는 추가적인 과도한 컴퓨터 계산시간을 요구하지 않는 적절한 적응요소분할법을 적용하여 효율적으로 요소를 분할하여 복잡한 구조에서의 정전용량을 효과적으로 계산하였다.

II. 계산 이론

임의의 유전체와 도체가 존재하는 매질내에서의 자기정전용량과 상호정전용량의 계산을 위해서는 일반적으로 ECF(equivalent charge formulation)을 사용한다[4].

이 방법에서는 도체표면에서의 포텐셜 계산을 위한 등가 표면 전하를 유전체-유전체 경계면과 도체-유전체 경계면에 두고, 자유공간에서의 문제로 가정하여 해석한다. 이 경우 도체 표면에서의 포텐셜은

$$\psi(x) = \int_{S_c} \sigma_c(x') \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x-x'\|} dS' + \int_{S_d} \sigma_d(x') \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x-x'\|} dS' \quad (1)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서, S_c 와 S_d 는 각각 도체-유전체 경계면과 유전체-유전체 경계면을 나타낸다. 이 등가 자유공간 문제에 있어서 유전체-유전체 경계면에서의 포텐셜의 미분은 다음과 같은 식을 만족한다.

$$\epsilon_a \frac{\partial \psi_+(x)}{\partial n_a} - \epsilon_b \frac{\partial \psi_-(x)}{\partial n_a} = 0, \quad x \in \epsilon_a, \epsilon_b \text{ interface} \quad (2)$$

여기서, n_a 는 유전체-유전체 경계면에서의 수직인 방향을 나타내고, ϵ_a 와 ϵ_b 는 각각 경계면 양편의 두 유전체 영역에서의 유전율을 나타낸다. 포텐셜 $\psi_+(x)$ 와 $\psi_-(x)$ 는 각각 ϵ_a 와 ϵ_b 영역으로부터 경계면으로 접근하는 x 점에서의 포텐셜을 나타낸다.

수치해석적으로 σ_c 와 σ_d 를 구하기 위해서는 도체 표면과 유전체 표면을 작은 요소로 분할하는데 요소내에서는 전하밀도가 균일하다고 가정한다. 총 요소수는 $n = n_c + n_d$ 이며, 여기서, n_c 는 도체-유전체 경계면에서의 요소수이며, n_d 는 유전체-유전체 경계면에서의 요소수이다.

각 도체표면의 요소에서의 포텐셜은 다른 요소에서의 전하밀도에 의하여 구해진다. 예를 들어, 임의의 요소 j 에서의 전하에 의한 도체표면의 요소 i 에서의 포텐셜은

$$\frac{q_j}{a_j} \int_{\text{element } j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x_i-x'\|} da' \quad (3)$$

이다. 여기서 x_i 는 요소 i 의 중점이며, x' 는 요소 j 표면에서의 위치를 나타낸다. 또한 a_j 는 요소 j 에

서의 면적을 나타내고, 모든 요소 n 에 대하여 확장하여 생각할 때, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$p(x_i) = P_{11}q_1 + P_{22}q_2 + \dots + P_{ij}q_j + \dots + P_{in}q_n \quad (4)$$

여기서,

$$P_{ij} \triangleq \frac{1}{a_j} \int_{\text{element } j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x_i-x'\|} da' \quad (5)$$

이다.

유전체-유전체 경계면의 요소 i 에서 만족하는 식은

$$\epsilon_a \frac{\partial p(x_{ia})}{\partial n_i} - \epsilon_b \frac{\partial p(x_{ib})}{\partial n_i} = 0 \quad (6)$$

이다. 여기서, n_i 는 요소 i 면의 수직방향이며, x_{ia} 와 x_{ib} 는 각각 ϵ_a 와 ϵ_b 인 영역으로부터 접근시킨 x 점을 나타낸다. 요소 j 에서의 계산을 위해 $i \neq j$ 라면 x_{ia} 와 x_{ib} 는 x_i 로 근사할 수 있다. 모든 요소에 대한 식으로 나타내면

$$D_{11}q_1 + D_{22}q_2 + \dots + D_{ij}q_j + \dots + D_{in}q_n = 0 \quad (7)$$

이 된다. 여기서,

$$D_{ij} \triangleq (\epsilon_a - \epsilon_b) \times \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{1}{a_j} \int_{\text{element } j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x_i-x'\|} da', \quad i \neq j \quad (8)$$

이다. 또한 $i=j$ 경우에 만족하는 식은

$$D_{ii} \triangleq \frac{(\epsilon_a + \epsilon_b)}{2 a_i \epsilon_0} \quad (9)$$

이다[7].

모든 요소 n 에 대하여 식(4)와 식(7)으로 구한 선형 행렬식은

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n,1} & \dots & P_{n,n} \\ D_{n_c+1,1} & \dots & D_{n_c+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n_d} & \dots & D_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n_c} \\ q_{n_c+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n_c} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

과 같이 된다. 계산의 편의를 위해서 식 (8)에 $1/(\epsilon_a - \epsilon_b)$ 를 곱하여 식 (10)을 다시 구하면,

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n,1} & \cdots & P_{n,n} \\ E_{n_c+1,1} & \cdots & E_{n_c+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{n1} & \cdots & E_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n_c} \\ q_{n_c+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p(n_c) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

여기서, E_{ij} 는 $i \neq j$ 일 때의 요소 j 의 전하에 의한 요소 i 의 중점 x_i 에서의 전계의 법선성분을 나타낸다. 이것은

$$E_{ij} \triangleq \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{1}{a_i} \int_{\text{panel } j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x_i - x'\|} da', \quad i \neq j \quad (12)$$

으로 나타낼 수 있으며, 만약 $i=j$ 라면 식(12)는

$$E_{ii} \triangleq \frac{(\epsilon_a + \epsilon_b)}{2 a_i \epsilon_0 (\epsilon_a - \epsilon_b)} \quad (13)$$

이 된다. 식 (11)은

$$Aq = b \quad (14)$$

의 선형행렬식으로 나타내면,

$$A \triangleq \begin{bmatrix} P \\ E \end{bmatrix}, \quad b \triangleq \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

이다. 이 선형행렬식은 CGA(conjugate gradient algorithm)과 같은 반복적인 행렬식 계산 알고리즘에 의해서 계산되어 진다.

III. MLFMA 적용

식 (11)의 행렬방정식은 반복법을 이용하여 풀 수 있는데, (k) 번째 반복시의 $Aq^{(k)}$ 행렬은

$$Aq^{(k)} = \begin{bmatrix} Pq^{(k)} \\ Eq^{(k)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

로 표현될 수 있다. $Pq^{(k)}$ 는 모든 요소의 전하에 의한 도체표면요소에서의 포텐셜을 구하기 위한 것인데, 이것은 MLFMA를 이용하여 계산되어질 수 있는 부분이다. $Eq^{(k)}$ 는 모든 유전체 표면의 요소 중점에서의 전계의 법선성분의 계산으로 이루어진다. 이것은 본 논문에서 소개된 modified MLFMA에 의해서 계산되는 부분이다.

3-1. $Pq^{(k)}$ 계산

Fast multipole 알고리즘의 주요 개념은 far field

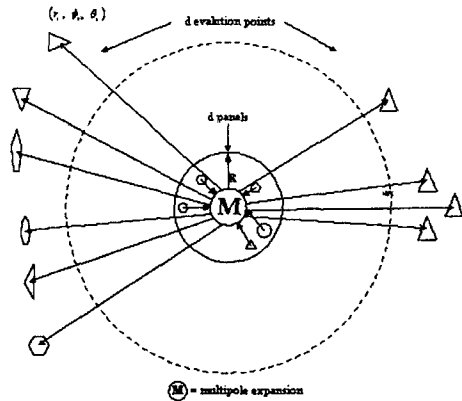


그림 1. Multipole expansion에 의한 포텐셜

근사에 있다. 그림 1과 같이, 안쪽구의 d 개 요소그룹에서의 전하에 의한 i 번째 요소의 중점 (r_i, θ_i, ϕ_i) 에서의 포텐셜을 고려할 때, 이들 d 개의 요소들에서의 표면전하에 의한 포텐셜은 다음과 같은 truncated multipole expansion에 의해서 표현되어 진다.

$$\psi(r_i, \theta_i, \phi_i) \approx \sum_{n=0}^l \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m}{r_i^{n+1}} Y_n^m(\theta_i, \phi_i)$$

여기서, $Y_n^m(\theta_i, \phi_i)$ 는 surface spherical harmonics이며, M_n^m 는 d 개의 요소들의 전하에 의한 multipole 계수이다. l 은 expansion order이다. Multipole 계수 M_n^m 은

$$M_n^m = \sum_{j=1}^d q_j \rho_j^n Y_n^m(a_j, \beta_j) \quad (18)$$

이다. 여기서, ρ_j, a_j, β_j 는 j 번째 전하의 구좌표이다. 이렇게 구해진 multipole 계수는 다른 요소들의 포텐셜 계산에도 쓰여진다. 예를 들어, 그림 1에서와 같이 d 개의 도전된 요소들로부터 d 개의 요소에서의 포텐셜을 구해야 한다면, d^2 에 비례하는 연산이 필요할 것이나 multipole expansion을 사용하면 d 에 비례하는 연산만으로 계산되어진다.

Local expansion은 multipole expansion과 일반적으로 매우 유사하게 표현되어 질수 있다. 구의 외부에서의 전하에 의한 구에서의 포텐셜은 다음과 같은 truncated local expansion에 의해서 근사적으로 구해진다.

$$\psi(r_j, \theta_j, \phi_j) \approx \sum_{n=0}^l \sum_{m=-n}^n L_n^m Y_n^m(\theta_j, \phi_j)$$

여기서, r_j, θ_j, ϕ_j 는 j 번째 요소에 대한 구좌표이

다. 그리고, L_n^m 는 구반경 밖의 d 개의 전하로부터의 local expansion 계수이며 구하는 식은

$$L_n^m = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{q_i}{\rho_i^{n+1}} Y_n^{-m}(a_i, \beta_i) \quad (20)$$

이다. 여기서, ρ_i, a_i, β_i i 번째 전하의 좌표이다.

앞서 언급한 multipole expansion과 local expansion을 이용하여 n 개 요소의 전하로부터 n 개 요소의 포텐셜을 구하기 위한 fast 알고리즘을 적용하여 $Pq^{(k)}$ 행렬을 계산한다.

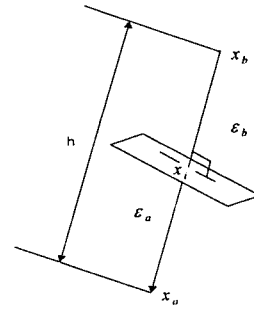


그림 2 유전체-유전체 경계면의 요소

3-2. $E_q^{(k)}$ 계산

유전체-유전체 경계면의 임의의 요소 i 에서의 전계의 법선성분 E_{ni} 의 계산은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$E_{ni} = E_{oi} + E_{ii}q_i \quad (21)$$

여기서, E_{oi} 는 요소 i 를 제외한 모든 요소에 의한 요소 i 에서의 전계의 법선성분이다. E_{oi} 를 구하기 위한 식(12)에서의 미분은 차분으로 근사될 수 있는데, 그림 2에서와 같이 요소의 중점에서 수직인 방향으로 같은 거리만큼 떨어진 두 점 x_a 와 x_b 를 이용하면 다음과 같이 된다.

$$E_{oi} \approx \frac{p(x_a) - p(x_b)}{h} \quad (22)$$

이것을 $E_{ii}q_i$ 에 더하여 요소 i 에서의 총 전계의 법선성분을 구한다.

다른 방법으로는 미분한 multipole algorithm 표현을 통하여 유전체-유전체 경계면의 임의의 요소에서의 전계의 법선성분을 계산하는 것이다. multipole expansion에 의한 포텐셜의 표현은

$$p_{mul}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \times [\bar{M}_n^m \cos(m\phi) + \tilde{M}_n^m \sin(m\phi)] \quad (23)$$

이다[1]. 이것을 미분하여 normal electric field를 구한 식은

$$E_{mul} \triangleq n \cdot \nabla \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \times [\bar{M}_n^m \cos(m\phi) + \tilde{M}_n^m \sin(m\phi)] \right) \quad (24)$$

이 된다.

이와 유사하게 local expansion에 의한 포텐셜의

표현은

$$p_{mul}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \times [\bar{L}_n^m \cos(m\phi) + \tilde{L}_n^m \sin(m\phi)] \quad (25)$$

이다. 이것을 미분하여 전계의 법선성분을 구한 식은 앞서서와 동일한 방법으로 구해진다.

VI. 적용 요소 MLFMA

임의의 유전체 구조와 함께 여러 도체가 존재하는 경우에 정전용량을 계산하기 위해서는 일반적으로 매우 많은 수의 요소를 필요로 한다. 따라서 유전체가 포함된 3차원 문제에서는 계산시간이 매우 증가하게 되는데, 이를 줄이기 위한 방법으로, 본 논문에서는 앞서 서술한 fast multipole algorithm에 적합한 적용요소분할법을 제안 하였다.

MLFMA의 장점인 계산시간이 빠르다는 것을 최대한 활용하기 위해서는 최소한의 부가적인 계산만으로 오차예측과 요소개선이 이루어져야 한다. 이를 위해서, 본 연구에서는 각 요소의 전하밀도를 비교하여 상대적으로 큰 영역(주로 모서리, 꼭지점 및 마주보는 면)에 요소를 세분화하였다. 이때, 요소개선은 자동요소분할법을 이용하여 수행된다.

먼저, 초기 요소 분할이 이루어진 후에 정전용량 계산을 위한 Pq^k 와 E_q^k 의 계산이 이루어지고, 도체표면에서의 전하밀도값이 구해진 다음, 정전용량 행렬이 만들어진다. 그 후에 전하밀도가 높은 곳에서의 요소개선이 이루어진다. 이러한 계산을 수렴이 이루어 질 때까지 반복한다[6].

V. 계산결과 및 결론

본 논문에서 언급한 방법들의 평가를 위해 그림

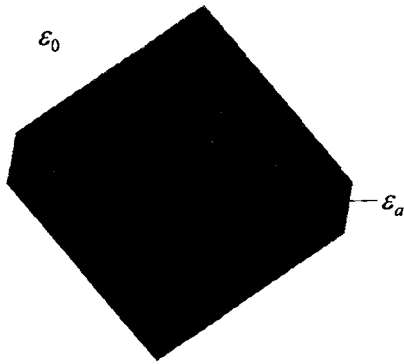


그림 3. 유전체층위의 두 도체

3과 같이 유전체 구조와 함께 두 도체가 존재하는 경우의 정전용량을 계산하여 보았다.

그림 3에서 위의 두 도체는 같은 크기이며 길이, 폭 및 높이는 각각 $3\mu m$, $1\mu m$ 및 $1\mu m$ 이다. 아래의 유전체층의 유전율은 $\epsilon_a = \epsilon_0\epsilon_r = 2.64\epsilon_0$ 두었고, 가장 아래쪽에는 가로×세로가 $5\mu m \times 5\mu m$ 이며 두께가 $1\mu m$ 인 도체판이 있다. 그림 4은 두 도체사이의 정전용량값의 수렴도를 나타내고 있다. 요소수에 따른 정전용량값이 균일하게 요소분할한 경우보다 적응요소분할법에 의해 분할한 경우가 더 빠른 수렴을 얻을 수 있음을 보여준다. 표 1은 수렴된 정전용량값을 나타내며, 표 2는 CPU 계산시간을 나타낸다.

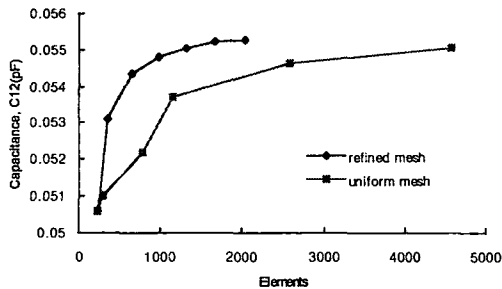


그림 4. 요소수에 따른 정전용량값의 수렴도

	Capacitance Matrix Entry [fF]	
	C11	C12
Uniform Triangular Mesh (4576 elements)	0.1594	- 0.0550
Adaptive Triangular Mesh (2028 elements)	0.1598	- 0.0552

표 1. 수렴된 정전용량값

	Elements	CPU times[sec]
Uniform Triangular Mesh	4576	156.7
Adaptive Triangular Mesh	2028	93.4

표 2. CPU계산시간 비교(P-III 800MHz)

본 논문에서는 임의의 유전체 구조와 함께 여러 도체가 존재하는 경우의 정전용량을 효율적으로 계산하기 위해서 MLFMA에 적합한 적응요소분할법을 제안하여, 수치해석 결과를 보였다.

Reference

- [1] K. Nabors and J. White, "FastCap: A multipole accelerated 3-D capacitance extraction program," IEEE Trans. Computer-Aided Design, vol. 10, pp. 1447-1459, Nov. 1991.
- [2] K. Nabors, S. M. Kim, and J. White, "Fast capacitance extraction of general three-dimensional structures," IEEE Trans. on MTT. Vol.40, pp.1496-1506, July 1992.
- [3] J. Dull, K. Glivan, J. M. Song and W. C. Chew, "Parallel fast multipole capacitance solver," IEEE Trans. on Antennas and propagation society international symposium 1998. IEEE, Vol.3, pp. 1766-1769, Feb. 1998.
- [4] K. Nabors and J. White, "Multipole-accelerated capacitance extraction algorithms for 3-D structures with multiple dielectrics," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 39, pp. 946-954, Nov. 1992.
- [5] Y. C. Pan and W. C. Chew, "A fast multipole method based calculation of the capacitance matrix for multiple conductors above stratified dielectric media," IEEE Trans. on MTT. Vol.49, pp.480-490, March 2001.
- [6] H. Kim and C. H. Ahn, "MLFMA for capacitance extraction using adaptive triangular mesh," JKEES, vol. 1, no. 1, May 2001.
- [7] R. Kress, *Linear Integral Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1989.