재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 고장지름[1]

정호영*0 김희철* 박정흠**
*한국외국어대학교 컴퓨터및정보통신공학부(sm8876@cse.hufs.ac.kr hckim@hufs.ac.kr)
**가톨릭대학교 컴퓨터·전자공학부(jhpark@tcs.cuk.ac.kr)

Fault Diameter of Recursive Circulants $G(2^m, 2^k)$

Hoyoung Jung*, Hee-Chul Kim*, Jung-Heum Park**
*School of Computer and Information Communications Engineering, Hankuk University of Foreign Studies
**School of Computer Science and Electronic Engineering, The Catholic University of Korea

요 약

본 논문에서는 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서 노드에 고장이 났을 경우 임의의 두 노드사이의 고장이 없는 최단경로의 길이를 분석한다. $m > k+1$인 $G(2^m, 2^k)$에서 $m = nk+r$이라 하자. 여기서 $n \geq 1$이고, $1 \leq r \leq k$이다. $m > k+1$인 $G(2^m, 2^k)$에서 임의의 연결도-1 개 이하의 노드에 고장이 있을 경우, 모든 두 노드 사이의 고장이 없는 가장 짧은 경로들의 길이의 최대값, 즉 $G(2^m, 2^k)$의 고장지름은, n이 짝수이면 $dia_{m,k}+2$ 이하이고, n이 홀수이면 $dia_{m,k}+3$ 이하이다. 여기서 $dia_{m,k}$는 $G(2^m, 2^k)$의 지름이다.

1. 서 론

대규모 계산 수행의 필요가 증가함에 따라, 고성능의 컴퓨터를 구성하는 방법 중 특히 복수개의 처리장치들을 특정한 상호연결망을 통하여 구성한 후, 상호간의 메시지 교환을 통하여 대규모의 연산을 병렬로 빠르게 처리하는 방식이 선호되고 있다[1]. 이와 같은 상호연결망 구조로는 선형 배열, 링, 스타, 트리, 메쉬, 하이퍼큐브 등과 재귀원형군이 있다[2]. 다중 컴퓨터 네트워크에서 고장 감내에 관한 척도로 그 연결망 구조의 연결도가 있다. 연결도가 $\chi(G)$인 연결망은 임의의 $\chi(G)-1$개 혹은 그 이하의 노드에 고장이 발생하더라도 연결망이 분리되지 않는다. 재귀원형군 $G(N,d)$의 연결도 $\chi(G)$는 분지수 $\delta(G)$와 같다고 알려져 있다[3]. 고장 감내에 관한 다른 척도로 고장지름이 있다. 그래프 G의 지름 $dia(G)$는 모든 두 노드 사이의 가장 짧은 경로들의 길이의 최대값이고, 고장지름 $fd(G)$는 임의의 $\chi(G)-1$개 이하의 노드를 삭제하고 남은 그래프의 최대 지름을 말한다. n-차원 하이퍼큐브 Q_n의 지름은 n이고 고장지름은 $n+1$로 알려져 있다[4]. 그리고 재귀원형군 $G(2^m, 4)$의 지름 $dia(G)$는 $\lceil (3m-1)/4 \rceil$이고 고장지름 $fd(G)$는 $dia(G)+1$이다[2,5]. $G(2^m, 2^k)$의 고장지름은 $k \geq 2$일때, $dia(G)$ 이하로 알려져 있다[6].

본 논문에서는 [6]에서 제시한 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 고장지름의 결과를 개선한다. 2장에서 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 기본적인 성질에 대해 알아보고, 3장에서는 $G(2^m, 2^k)$의 고장지름의 새로운 상한값을 제시한다.

2. 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 기본적인 성질

이 장에서는 $G(2^m, 2^k)$의 기본적인 성질을 소개한다. 재귀원형군 $G(N,d)$는 N개의 노드를 가지고 $E=\{(v,w) \mid v + d^k = w \pmod N,\ 0 \leq k \leq \lceil \log_d N \rceil - 1\}$인 에지의 집합을 가지는 그래프이다.

성질 1. $m \geq k$인 $G(2^m, 2^k)$,는 $G(2^{m-k}, 2^k)$와 동형인 G_i $(1 \leq i \leq 2^k)$들의 재귀적 구조로 이루어져 있다. $m \geq 2k$인 G_i도 역시 재귀적 구조를 가진다[6]. 즉 $m \geq 2k$인 G_i는 $G(2^{m-2k}, 2^k)$와 동형인 $G_{i,1}, G_{i,2}, \cdots, G_{i,2^k}$로 이루어져있다.

성질 2. $2^{k-1}+1 < i \leq 2^k$인 G_i는 G_1에 대해 G_{2^k-i+2}와 위치적으로 대칭적이다. 또한, $2^{k-1}+1 < i \leq 2^k$인 $G_{i,j}$는 $G_{1,1}$에 대해 $G_{2^k-i+2,(j+1) \bmod 2^k}$와 위치적으로 대칭적이다

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$는 노드 대칭적이므로[2], 성질1 과 성질 2에 의하여 $m \geq 2k$인 $G(2^m, 2^k)$에서 모든 두 노드 u,v 사이의 경로를 구하는 것은 $u \in G_{1,1}$인 어떤 노드 u로부터 다른 모든 $v \in G_{i,j}$ $(1 \leq i,j \leq 2^{k-1}+1)$까지의 서로 다른 경로를 구하는 것과 같다.

3. 고장지름

[1] 이 논문은 한국과학재단 지역대학 우수과학자 지원연구(2000-1-30300-014-3)의 연구비를 지원받았음

이 장에서는 $m > k+1$인 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$의 고장지름을 분석한다. 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$의 지름은 $dia_{m,k}$로, 고장지름은 $fd_{m,k}$로 표기한다. $dia_{m,k}$는 다음과 같은 성질이 있다[6]: $m \ge 2k$일 때, $dia_{m,k} = dia_{m-k,k}+2^{k-1}$이면 $dia_{m-k,k} = dia_{m-2k,k}+2^{k-1}-1$이고, $dia_{m,k} = dia_{m-k,k}+2^{k-1}-1$이면 $dia_{m-k,k} = dia_{m-2k,k}+2^{k-1}$이다. 고장지름의 성질로서 그래프 G에서 임의의 두 노드 사이의 길이가 f이하인 $\chi(G)$개의 서로 소인 경로가 존재하면 고장지름 $fd(G) \le f$이다 [7].

소정리 1. $m \le k$ 일 경우 분지수, 지름, 고장지름은 각각 $\delta(G)=2$, $dia_{m,k}=2^{m-1}$, $fd_{m,k}=2^m-2$이다.

소정리 2. $m=k+1$일 경우, 분지수, 지름, 고장지름은 각각 $\delta(G)=3$, $dia_{m,k}=2^{k-1}$, $fd_{m,k}=2^k-1$이다.

소정리 3. $k+1<m\le 2k$일 경우, 분지수, 지름, 고장지름은 각각 $\delta(G)=4$, $dia_{m,k} = dia_{m-k,k}+2^{k-1}-1 = 2^{m-k-1}+2^{k-1}-1$, $fd_{m,k} \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}+2=dia_{m,k}+3$이다.

소정리 4. $m=2k+1$일 경우, 분지수, 지름, 고장지름은 각각 $\delta(G)=5$, $dia_{m,k}=dia_{m-2k,k}+2^k-1=dia_{m-k,k}+2^{k-1}=2^k$, $fd_{m,k}\le 2^k+2=dia_{m,k}+2$이다.

소정리 5. $2k+1<m\le 3k$일 경우, 분지수,지름, 고장지름은 각각 $\delta(G)=6$, $dia_{m,k} = dia_{m-2k,k} + 2^k - 1 = dia_{m-k,k} + 2^{k-1} = 2^{m-2k-1} + 2^k - 1$, $fd_{m,k} \le dia_{m-2k,k} + 2^k + 1 = dia_{m-k,k} + 2^{k-1} + 2 = dia_{m,k} + 2$이다.

소정리 6. $m = 3k+1$일 경우, 분지수, 지름, 고장지름은 각각 $\delta(G) = 7$, $dia_{m,k} = dia_{m-2k,k} + 2^k-1 = dia_{m-k,k} + 2^{k-1} - 1 = 2^k + 2^{k-1} - 1$, $fd_{m,k} \le dia_{m-2k,k} + 2^k + 2 = dia_{m-k,k} + 2^{k-1} + 2 = dia_{m,k} + 3$이다.

정리 1. $m>k+1$인 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$에서 $m = nk+1$일 때, n이 짝수이면 $fd_{m,k}\le dia_{m,k} + 2$이고 n이 홀수이면 $fd_{m,k}\le dia_{m,k} + 3$이다.

증명. N에 관한 수학적 귀납법에 의하여 증명한다.
위의 재귀원형군 $G(2^{nk+1},2^k)$는 분지수가 홀수이다.
i) n=2, n=3일 경우의 고장지름은 소정리 4,6에 의해 각각 $fd_{2k+1,k}\le dia_{2k+1,k}+2$, $fd_{3k+1,k}\le dia_{3k+1,k}+3$이 성립한다.

ii) 모든 p(p<n)에 대하여 위 정리가 성립한다고 가정하자. 이것은 $G(2^{pk+1},2^k)$ 에서 임의의 두 노드 u와 v 사이의 노드가 중복되지 않는, 길이가 $dia_{pk+1,k}+c$ 이하의 경로가 분지수 만큼 존재한다는 것을 의미한다. c는 p가 짝수이면 2이고, 홀수이면 3이다. $G(2^{nk+1},2^k)$에 대해 위 정리가 성립함을 n이 홀수일 경우와 짝수일 경우로 나누어 보인다.

(1) n이 홀수일 경우
$G(2^{nk+1},2^k)$의 지름 $dia_{nk+1,k}=dia_{(n-1)k+1,k}+2^{k-1}-1$이다. $G(2^{nk+1},2^k)$는 그래프 $G(2^{(n-1)k+1},2^k)$에 2개의 에지가 연결되어 있는 형태이다. 그림 1 (a)와 같이 v에서 $G_2{}^k$에 인접한 에지로부터 출발하는 경로, G_2에 인접한 에지로부터 출발하는 경로, G_1에 인접한 에지들($\delta(G)-2$개)로부터 출발하는 경로를 각각 $P_1,P_2,P_3,\cdots, P_{\delta(G)}$라 하자. u와 v가 서로 위치적으로 대칭일 경우, v가 u와 대칭인 노드와 인접할 경우, 나머지 그렇지 않을 경우로 구분하여 알아본다.

(1-1) u와 v가 서로 위치적으로 대칭일 경우
각 $P_1,P_2,P_3,\cdots, P_{\delta(G)}$에 대해, 경로 P_1은 $u-G_2{}^k-G_2{}^k$에서v와 대칭인 노드$-G_2{}^k{}_{-1}-\cdots-v$, 경로 P_2는 $u-G_2-\cdots G_{i-1}-v$, 경로 $P_3,\cdots,P_{\delta(G)}$는 u-u에서 G_1에 인접한 노드들$-G_2-\cdots-G_i-v$이다. 각 경로의 길이는 경로 P_1은 2^k이하($n\ge5$에 대해 $dia_{(n-1)k+1,k}\ge 2^k+2^k-1$이므로 $2^k\le dia_{(n-1)k+1,k}+2^{k-1}+2$이다), 경로 P_2는 2^{k-1}이하, 경로 $P_3,\cdots,P_{\delta(G)}$는 $2^{k-1}+2$이하이다.

(1-2) v가 u와 대칭인 노드와 인접할 경우
경로 P_1은 $u-G_2{}^k-G_2{}^k$에서v와 대칭인 노드$-G_2{}^k{}_{-1}-\cdots-v$, 경로 P_2는 $u-G_2-\cdots G_i-v$, 경로 $P_3,\cdots,P_{\delta(G)}$중에 하나의 경로는 u-u에서 G_1에 인접한 노드들$-G_2-\cdots-G_{i-1}-v$이고, 나머지 $\delta(G)-3$가지의 경로는 u-u에서 G_1에 인접한 노드들$-G_2-\cdots-G_i-v$이다. 각 경로의 길이는 경로 P_1은 2^k+1이하, 경로 P_2는 $2^{k-1}+1$이하, 경로 $P_3,\cdots,P_{\delta(G)}$는 $2^{k-1}+2$이하이다.

(1-3) (1-1)또는 (1-2)이 아닌 경우
경로 P_1은 $u-G_2{}^k-G_2{}^k$에서 v와 대칭이고 G_1에 속한 노드에 인접한 노드로의 경로$-G_1-\cdots-v$, 경로 P_2는 $u-G_1-\cdots-G_{i+1}-G_{i+1}$에서 v에 인접한 노드로의 경로-v, 경로 $P_3,\cdots,P_{\delta(G)}$는 u-u에서 G_1에 인접한 노드들$-G_i-v$로의 서로 다른 경로이다. 각 경로의 길이는, 경로 P_1은 $1 + dia_{(n-1)k+1,k} + 1+2^{k-1}$ 이하, 경로 P_2는 $2^{k-1}+1+dia_{(n-1)k+1,k}+1$이하, 경로 $P_3,\cdots,P_{\delta(G)}$는 $1+2^{k-1}+fd_{(n-1)k+1,k}-1=2^{k-1}+dia_{(n-1)k+1,k}+2$이하이다. 그러므로 n이 홀수일 경우 $fd_{nk+1,k}\le dia_{nk+1,k}+3$ 이 성립한다.

(2) n이 짝수일 경우
$G(2^{nk+1},2^k)$의 지름 $dia_{nk+1,k}=dia_{(n-1)k+1,k}+2^{k-1}=dia_{(n-2)k+1,k}+2^k-1$이다. $G(2^{nk+1},2^k)$는 그래프 $G(2^{(n-1)k+1},2^k)$에 2개의 에지가 연결되어 있는 형태이다. 그림 1 (b)와 같이 v에서 각각 $G_2{}^k$, G_2, $G_{1,2^k}$, $G_{1,2}$에 인접한 에지로부터 출발하는 경로, $G_{1,1}$에 인접한 에지들($\delta(G)-4$개)로부터 출발하는 경로를 각각 $P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,\cdots, P_{\delta(G)}$라 하자. 이 경우 $v\in G_i$에 대하여 $1\le i\le 2^{k-1}$인 경우와 $i=2^{k-1}+1$ 나누어 알아보며, 다시 $i=2^{k-1}+1$인 경우에는 $v\in G_2{}^{k-1}{}_{+1,j}$에 대하여 각각 $1\le j<2^{k-1}$, $j=2^{k-1}$, $j=2^{k-1}+1$인 경우로 나누어 살펴본다.

(2-1) $v\in G_i(1\le i\le 2^{k-1})$ 인경우(그림 1 (a)참조),
각 $P_1,P_2,P_3,\cdots, P_{\delta(G)}$의 경로는 위 (1)의 n이 홀수일 경우와 동일하며, 각 경로의 길이는, P_1은 2^k이하($n\ge4$에 대해 $dia_{(n-1)k+1,k}\ge 2^k+2^{k-1}-1$이므로 $2^k\le dia_{(n-1)k+1,k}+$

$2^{k-1}+1$이다), P_2는 $2^{k-1}+dia_{(n-1)k+1,k}+1$이하, 경로 $P_3,\cdots,P_{\delta(G)}$는 $2^{k-1}+fd_{(n-1)k+1,k}-1=2^{k-1}+dia_{(n-1)k+1,k}+2$이하이다.

(2-2) $v\in G_{2^{k-1}+1}$인 경우, $v\in G_{2^{k}-1+1,j}$에 대하여 각각 $1\le j<2^{k-1}$, $j=2^{k-1}$, $j=2^{k-1}+1$인 경우로 나누어 살펴본다.

(2-2-1) $v\in G_{2^{k-1}+1,j}(1\le j<2^{k-1})$인 경우(그림 1 (b)참조), 각 $P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,\cdots,P_{\delta(G)}$에 대해, 경로 P_1은 $u-G_{2^k,2^k}-G_{2^k,1}-\cdots-G_{2^k,j+1}-\cdots-G_{i,j+1}-G_{i,j+1}$에서 v와 인접한 노드로의 경로-v, 경로 P_2는 $u-\cdots-G_{i,1}-\cdots-G_{i,j-1}-v$이거나 $u-\cdots-G_{i,1}-\cdots-G_{i,j}-G_{i,j}$에서 $|P_5\cdots P_{\delta(G)}|-1$개의 경로와 노드의 중복이 없는 v로의 경로, P_3은 $u-G_{1,2^k}-G_{2^k,2^k-1}-\cdots-G_{i+1,2^k-1}-G_{i+1,2^k}-G_{i+1,1}-G_{i+1,j}-G_{i+1,j}$에서 v와 인접한 노드로의 경로-v, 경로 P_4는 $u-G_{1,2}-\cdots-G_{1,j}-\cdots-G_{i-1,j}-G_{i-1,j}$에서 v와 인접한 노드로의 경로-v, 경로 $P_5,\cdots,P_{\delta(G)}$는 u-u에서 인접한 $G_{1,1}$로의 노드들$-\cdots-G_{i,1}-\cdots-G_{i,j}-v$로의 서로 다른 경로이거나, u-u에서 인접한 $G_{1,1}$로의 노드들$-\cdots-G_{i,1}-\cdots-G_{i,j-1}-G_{i,j-1}$에서 v와 인접한 노드로의 경로이다. 각 경로의 길이는, 경로 P_1은 $1+1+2^{k-1}-1+2^{k-1}-1+dia_{(n-2)k+1,k}+1$이하, 경로 P_2는 $2^{k-1}+2^{k-1}-2+fd_{(n-2)k+1,k}=dia_{(n-2)k+1,k}+2^k$이하, 경로 P_3는 $1+1+2^{k-1}-2+1+1+2^{k-1}-2+dia_{(n-2)k+1,k}+1$이하, 경로 P_4는 $2^{k-1}-2+2^{k-1}-1+dia_{(n-2)k+1,k}+1$이하, 경로 $P5\cdots P_{\delta(G)}$는 $1+2^{k-1}+2^{k-1}-2+fd_{(n-2)k+1,k}-1=dia_{(n-2)k+1,k}+2^k+1$이하이다.

(2-2-2) $v\in G_{2^{k-1}+1,j}(j=2^{k-1})$인 경우(그림 1 (c)참조) 경로 $P_2,P_4,P5\cdots P_{\delta(G)}$는 (2-2-1)과 같고 경로 P_1은 $u-G_{2^k,2^k}-\cdots-G_{2^k,j}-\cdots-G_{i+1,j}-G_{i+1,j}$에서 v와 인접한 노드로의 경로-v, 경로 P_3는 $v-G_{1,2^k}-\cdots-G_{i,2^k}-\cdots-G_{i,j+1}-G_{i,j+1}$에서 v와 인접한 노드로의 경로-v 이다. 각 경로의 길이는, 경로 P_1은 $1+2^{k-1}+2^{k-1}-2+dia_{(n-2)k+1,k}+1$, 경로 P_2는 $2^{k-1}+2^{k-1}-1+fd_{(n-2)k+1,k}=2^k+dia_{(n-2)k+1,k}+1$이하, 경로 P_3는 $1+2^{k-1}+2^{k-1}-1+dia_{(n-2)k+1,k}+1$이하, 경로 P_4는 $2^{k-1}-1+2^{k-1}-1+dia_{(n-2)k+1,k}+1$이하, 경로 $P5\cdots P_{\delta(G)}$는 $1+2^{k-1}+2^{k-1}-1+fd_{(n-2)k+1,k}-1=dia_{(n-2)k+1,k}+2^k+1$이하이다.

(2-2-3) $v\in G_{2^{k-1}+1,j}(j=2^{k-1}+1)$인 경우(그림 1 (d)참조) 경로 P_3,P_4는 (2-2-2)와 같고, 경로 P_1은 $u-G_{2^k,2^k}-\cdots-G_{2^k,j}-\cdots-G_{i+1,j}-v$이거나, $u-G_{2^k,2^k}-\cdots-G_{2^k,j}-\cdots-G_{i,j}-G_{i,j}$에서 $|P_5\cdots P_{\delta(G)}|-1$과 노드의 중복이 없는 v로의 경로, 경로 P_2는 $v-\cdots-G_{i,1}-\cdots-G_{i,j-1}-G_{i,j-1}$에서 v와 인접한 노드로의 경로-v, 경로 $P_5\cdots P_{\delta(G)}$는 $u-G_{1,1}$에서 u와 인접한 노드들$-G_{2^k,2^k}-\cdots-G_{2^k,j}-\cdots-G_{i,j}-G_{i,j}$에서 v로의 서로 다른 경로들이거나, $u-G_{1,1}$에서 u와 인접한 노드들$-G_{2^k,2^k}-\cdots-G_{2^k,j}-\cdots-G_{i+1,j}-G_{i+1,j}$에서 v와 인접한 노드로의 경로-v이다. 각 경로의 길이는, 경로 P_1은 $1+2^{k-1}-1+2^{k-1}-1+fd_{(n-2)k+1,k}=dia_{(n-2)k+1,k}+2^k+1$이하, 경로 P_2는 $2^{k-1}+2^{k-1}-1+dia_{(n-2)k+1,k}+1$이하, 경로 P_3는 $1+2^{k-1}+2^{k-1}-2+dia_{(n-2)k+1,k}+1$이하, 경로 P_4는 $2^{k-1}+2^{k-1}-1+dia_{(n-2)k+1,k}+1$이하, 경로 $P_5\cdots P_{\delta(G)}$는 $1+1+2^{k-1}-1+2^{k-1}-1+fd_{(n-2)k+1,k}-1=2^k+dia_{(n-2)k+1,k}+1$이하이다. $n>k+1$인 $G(2^{nk+1},2^k)$에 대해 $m=nk+1$일때 n이 짝수이면 $fd_{nk+1,k}\le dia_{nk+1,k}+2$, n이 홀수이면 $fd_{nk+1,k}\le dia_{nk+1,k}+3$이 성립한다. ■

정리 2. $m>k+1$인 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$에서, $m=nk+r, 1<r\le k$일때, n이 짝수이면 $fd_{m,k}\le dia_{m,k}+2$이고 n이 홀수이면 $fd_{m,k}\le dia_{m,k}+3$이다.

증명. 위의 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$는 분지수가 홀수이다. 정리 1과 비슷한 방법으로 증명할 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 $m>k+1$인 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$에서 고장지름에 관하여 연구하였다. $m>k+1$인 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$에서 $m=nk+r, 1\le r\le k$일 때, $G(2^m,2^k)$의 고장지름 $fd_{nk+1,k}$는 n이 짝수이면 $dia_{m,k}+2$이하이고, n이 홀수이면 $dia_{m,k}+3$이하임을 보였다.

5. 참고문헌

[1] 윤현수, 정재훈, "대규모 메시지 전송 수퍼 컴퓨터의 구조," 정보과학회지 9, pp. 63-73, 1991.
[2] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive Circulant: a new topology for multicomputer networks," in *Proc. ISPAN'94*, Kanazawa Japan, pp.73-80, 1994.
[3] 정성우, 김숙연, 박정흠, 좌경룡, "Recursive circulant 그래프의 연결도," 한국정보과학회 봄 학술발표논문집, vol. 19, no. 1, pp. 591-594, 1992.
[4] A. Latifi, "Combinatorial analysis of the fault-diameter of n-cube," IEEE Transaction on computers, vol. 42, pp. 27-33, 1993.
[5] 김희철, 김상범, 좌경룡, "재귀원형군의 고장지름," 한국정보과학회 가을 학술발표논문집, vol. 21, no. 2, pp. 663-665, 1994.
[6] 박정흠, 좌경룡, "재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 경로," 정보과학회논문지(A) 제 26권 제 8 호, pp. 1009-1023, 1999
[7] M.S. Krishnamoorthy and B. Krishnamurthy, "Fault diameter of interconnection networks," Comput. Math. Applic. 13(5/6), pp. 577-582, 1987.

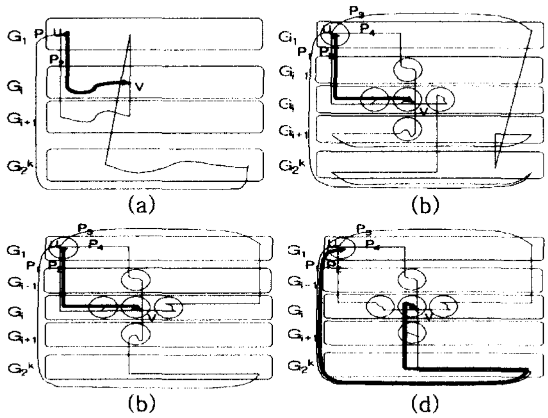

그림 1.