

면진 구조물의 최적설계에 관한 연구(I)

A Study on the Optimum Design of Base Isolated Structures (I)

정정훈*
Chung, Jung-Hoon

김병현**
Kim, Byung-Hyun

양용진***
Yang, Young-Jin

ABSTRACT

A probabilistic optimum design method of the base isolation system consisting of linear spring, viscous damper and frictional element is presented. For the probabilistic approach, the base excitation is assumed to be a stationary Gaussian filtered random process. For optimum design, the objective function and constraints are derived based on the stochastic responses of the system. As a numerical example, the optimum design problem of a three-story base isolated shear type structure is formulated and solved by the sequential quadratic programming method. As a result, the effects of variation of design variables such as parameters of the base isolation system and the mass of base on the objective function and constraints are investigated and the optimum parameters of the base isolation system under study are derived.

1. 서 론

Isolator 및 댐퍼를 이용한 구조물의 내진 설계를 위해서는 주어진 설계요구 조건하에서 최적의 성능을 갖는 isolator 및 댐퍼의 최적 설계기술이 필요하다.

내진 설계를 위한 설계지진하중을 시간이력의 형태로 사전에 알기가 매우 어렵기 때문에 설계 지진하중을 random process로 가정하고 확률론적 방법에 의거한 면진 구조물의 최적설계 방법이 Constantinou[1]에 의해 제안된 이래 국외의 경우 현재까지 많은 연구가 진행되고 있다[예로써 2-5]. 국내의 경우에는 최근에 구조물의 내진 설계를 위한 한 방법으로서 구조물에 점탄성 감쇠기와 가새(brace)를 설치하는 경우에 대해 확률론적 방법에 의거한 최적 설계에 대한 연구가 수행된 바[6] 있으나 면진 구조물(base isolated structure)의 최적 설계에 대한 연구는 현재까지 전무한 상황이다.

본 논문에서는 면진 구조물의 최적 설계에 관한 일차적인 연구로서 Ikonomou가 제안한 "Alexisismon" isolator[1]와 같이 선형스프링, 점성감쇠 및 Coulomb 마찰요소의 복합체로 이상화시킬 수 있는 isolator를 적용한 면진 구조물의 최적 설계 문제를 확률론적 방법에 의거하여 정식화하였다. 이를 위해 지진하중을 stationary Gaussian filtered white noise로 가정하고, 평균, 표준편차 등의 통계학적 물리량으로 표현되는 면진 구조물의 응답을 이용하여 설계요구조건에 따른 구속(constrained) 최적화 문제를 정식화하였다. 수치계산 예로써 3층 shear type 면진 구조물에 대해

* 한국기계연구원 구조시스템연구부 진동연구그룹, 선임연구원, 정회원

** 한국기계연구원 구조시스템연구부 진동연구그룹, 책임연구원, 정회원

*** 한국기계연구원 구조시스템연구부 진동연구그룹, 위촉연구원

isolator들의 특성치들과 base의 질량을 설계변수로 택하여 최적 설계를 수행하였다. 최적화 문제를 풀기 위해 MATLAB Optimization Toolbox[7]에서 제공하는 sequential quadratic programming 최적화 기법을 사용하였으며, 수치계산을 통해 설계변수의 변화가 목적함수 및 구속조건에 미치는 영향을 검토하고, 수치계산 대상구조물에 대한 최적의 isolator 특성치를 도출하였다.

2. 확률론적 방법에 의거한 최적화 문제의 정식화[1]

본 연구에서는 Fig. 1에 보인 바와 같이 선형스프링-점성감쇠-Coulomb 마찰요소의 복합체로 이상화시킬 수 있는 isolator를 적용한 단일 방향으로만 거동하는 shear type 면진 구조물을 고려한다. 지반가속도는 식 (1)로 주어지는 Kanai-Tajimi의 power spectral density(PSD)를 갖는 stationary Gaussian filtered white noise로 가정한다.

$$S_g(\omega) = G_0 \frac{1 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2}{[1 - (\omega/\omega_g)^2]^2 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2}; \quad \omega > 0 \quad (1)$$

여기서 G_0 는 ground intensity, ω_g , ξ_g 는 각각 지반가속도를 지배하는 진동수 및 감쇠비이다.

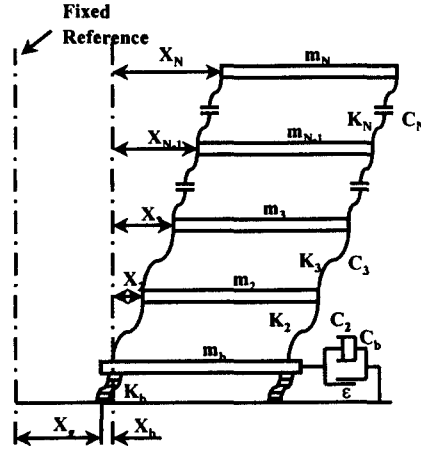


Fig. 1 A base isolated structure under study

상부구조물 (m_2, m_3, \dots, m_N)의 강성 및 질량을 $K_i = \alpha_i K_N$, $m_i = \beta_i m_N$ ($i=2, 3, \dots, N$)이라 하고, 응답은 최저차 모드만의 지배를 받으며 즉, $\{x\} = \{\phi\}y$ 이고 감쇠는 $[C] = \frac{2\xi_1}{\omega_1}[K]$ 형태의 구조 감쇠를 가정한다. 여기서 $\{\phi\}$, y , ω_1 , ξ_1 은 각각 상부구조물의 고정지지부(fixed-base) 최저차 고유모드, 모달변위, 고유원진동수 및 모달감쇠비이다. 이상의 가정과 지반가속도가 filtered white noise임을 고려하고 상부구조물의 고정지지부 고유모드의 직교관계식을 이용하면 대상 구조물의 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_b + 2\xi_b\omega_b \dot{x}_b + \omega_b^2 x_b + \varepsilon \Psi g \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) - 2\xi_1\omega_1 d\mu \dot{y} - \omega_1^2 d\mu y - 2\xi_g\omega_g \dot{x}_f - \omega_g^2 x_f &= 0 \\ a \ddot{x}_b + \ddot{y} + 2\xi_1\omega_1 \dot{y} + \omega_1^2 y - 2a\xi_g\omega_g \dot{x}_f - a\omega_g^2 x_f &= 0 \\ \ddot{x}_f + 2\xi_g\omega_g \dot{x}_f + \omega_g^2 x_f &= -\ddot{x}_g \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 \ddot{x}_g 는 G_0 의 power spectral density를 갖는 white noise, x_f 는 필터의 응답, x_b 는 base의 지반에 대한 상대변위이고,

$$\mu = \frac{m_N}{m_b}, \quad \omega_b^2 = \frac{K_b}{m_b}, \quad \xi_b = \frac{C_b}{2\sqrt{K_b m_b}},$$

$$\Psi = 1 + \mu \sum_{i=2}^N \beta_i, \quad a = \sum_{i=2}^N \beta_i \phi_i / \sum_{i=2}^N \beta_i \phi_i^2, \quad d = \phi_2 \alpha_2 \sum_{i=2}^N \beta_i \phi_i^2 / b, \quad b = \frac{1}{K_N} \{\phi\}^T [K] \{\phi\}$$

이다.

확률론적 방법에 의한 최적화 문제의 정식화를 위해서 식 (2)의 첫 번째 식에서 마찰요소에 의한 비선형력을 통계학적으로 등가의 특성을 갖는 점성 감쇠력으로 선형화 시키면, 식 (2)의 첫 번째 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ddot{x}_b + 2(\xi_b + \xi_e)\omega_b \dot{x}_b + \omega_b^2 x_b - 2\xi_1 \omega_1 d \mu \dot{y} - \omega_1^2 d \mu y - 2\xi_g \omega_g \dot{x}_f - \omega_g^2 x_f = 0 \quad (3)$$

여기서 등가점성감쇠계수 ξ_e 는 오차 $e = 2\xi_e \omega_b \dot{x}_b - \varepsilon \Psi h \operatorname{sgn}(\dot{x}_b)$ 의 자승에 대한 평균값을 base의 지반에 대한 상대변위 역시 Gaussian random process임을 감안하여 ξ_e 에 대해 최소화시킴으로써 다음과 같이 계산된다.

$$\xi_e = \frac{\varepsilon \Psi g}{(2\pi)^{1/2} \omega_b \sigma_{x_b}} \quad (4)$$

여기서 σ_{x_b} 는 base의 지반에 대한 상대속도의 표준편차이다.

식 (2) 및 (3)으로부터 y 및 x_b 에 대한 복소주파수 응답함수(complex frequency response function) $H_y(\omega)$ 및 $H_x(\omega)$ 가 계산되면 이로부터 y , x_b 및 \dot{x}_b 에 대한 분산(variance)을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= G_0 \int_0^\infty |H_y(\omega)|^2 d\omega \\ \sigma_x^2 &= G_0 \int_0^\infty |H_x(\omega)|^2 d\omega \\ \sigma_{\dot{x}}^2 &= G_0 \int_0^\infty \omega^2 |H_x(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (5)$$

한편, base의 최대 상대변위는 다음과 같이 주어진다.

$$x_m = \sigma_x \left[2 \ln \left(\frac{-T}{\pi \ln p} \cdot \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \right) \right] \quad (6)$$

여기서 T 는 어떤 사건이 발생하는 시간, p 는 시간 T 동안 x_m 이 넘지 않을 확률이다.

최적 설계를 위한 목적함수로서 비면진(unisolated)시의 상부구조물의 모달변위의 표준편차 σ_0 에 대한 면진시의 모달변위의 표준편차 σ_y 의 비 즉, $\frac{\sigma_y}{\sigma_0}$ 를 택하고 구속조건으로서 base의 최대 상대변위 x_m 가 어떠한 값 x_{cr} 보다 작아야 한다는 조건을 택함으로써 면진 구조물에 대한 구속 최적화 문제를 정식화 할 수 있다. 이를 위해 식 (5)의 적분을 해석적으로 수행하면 최적화를 위한 목적함수 및 구속조건의 계산식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \left[\left(\frac{C_1 S_2 + C_2 S_3 + C_3 S_4}{D_0 R^2 (4\xi_g^2 D_1 + D_2)} (D_2 D_3 - R^2 D_1^2) \right)^{1/2} \right] \quad (7)$$

$$\frac{x_m \omega_1^{3/2}}{\pi^{1/2} C_0^{1/2}} = \left[\frac{B_2 S_1 + B_3 S_2 + B_4 S_3 + B_5 S_4}{D_0} \ln \left(\frac{-T}{\pi \ln p} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_x} \right) \right]^{1/2} \quad (8)$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_x} = \omega_1 \left[\frac{B_2 S_5 + B_3 S_1 + B_4 S_2 + B_5 S_3}{B_2 S_1 + B_3 S_2 + B_4 S_3 + B_5 S_4} \right]^{1/2} \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1^2 + \Omega^2 R^2 A_2 A_3 - A_1 A_2 A_4 \\ S_2 &= A_1 A_3 + \Omega^2 R^2 A_2^2 - A_1 A_2 A_5 \\ S_3 &= -A_1 A_2 + A_3^2 + A_2^2 A_4 - A_2 A_3 A_5 \\ S_4 &= S_1 - A_1 A_2 A_4 - A_1 A_3 A_5 + A_3^2 A_4 - \Omega^2 R^2 A_2^2 A_5 + A_2^2 A_4^2 \\ &\quad + A_1 A_2 A_5^2 - A_2 A_3 A_4 A_5 \\ S_5 &= -\Omega^2 R^2 A_1 A_2 + A_1^2 A_5 + \Omega^2 R^2 A_3^2 - A_1 A_3 A_4 \\ A_1 &= (\xi_b + \xi_e) \Omega R^2 + \xi_1 \Omega^2 R^2 + \xi_g \Omega^2 R \\ A_2 &= (\xi_b + \xi_e) \Omega + \xi_1 (1 + ad\mu) + \xi_g R \\ A_3 &= (\xi_b + \xi_e) \Omega R^2 + \xi_1 R^2 (1 + ad\mu) + (\xi_b + \xi_e) \Omega + \xi_1 \Omega^2 + \xi_g R (1 + ad\mu) \\ &\quad + \xi_g \Omega^2 R + 4\xi_1 (\xi_b + \xi_e) \xi_g \Omega R \\ A_4 &= R^2 (1 + ad\mu) + \Omega^2 R^2 + \Omega^2 + 4\xi_1 (\xi_b + \xi_e) \Omega R^2 + 4\xi_g (\xi_b + \xi_e) \Omega R + 4\xi_1 \xi_g \Omega^2 R \\ A_5 &= R^2 + \Omega^2 + 1 + ad\mu + 4\xi_1 (\xi_b + \xi_e) \Omega + 4\xi_g (\xi_b + \xi_e) \Omega R + 4\xi_1 \xi_g R (1 + ad\mu) \\ B_1 &= R^4 (1 + ad\mu)^2 \\ B_2 &= 4\xi_g^2 R^2 \\ B_3 &= [R^2 + 4\xi_1 \xi_g R (1 + ad\mu)]^2 - 8\xi_g R (1 + ad\mu) (\xi_1 R^2 + \xi_g R) \\ B_4 &= 4(1 + ad\mu)^2 (\xi_1 R^2 + \xi_g R)^2 - 2R^2 (1 + ad\mu) [R^2 + 4\xi_1 \xi_g R (1 + ad\mu)] \\ B_5 &= \frac{R^2}{\Omega^2} (1 + ad\mu)^2 \\ C_1 &= 16(\xi_b + \xi_e)^2 \xi_g^2 \Omega^2 R^2 \\ C_2 &= 4\xi_g^2 \Omega^4 R^2 + 4(\xi_b + \xi_e)^2 \Omega^2 R^4 \\ C_3 &= \Omega^2 R^2 \\ D_0 &= A_1^3 + 2\Omega^2 R^2 A_1 A_2 A_3 - 2A_1^2 A_2 A_4 - A_1^2 A_3 A_5 - \Omega^2 R^2 A_3^3 \\ &\quad + A_1 A_3^2 A_4 + \Omega^4 R^4 A_2^3 - 2\Omega^2 R^2 A_1 A_2^2 A_5 - \Omega^2 R^2 A_2^2 A_3 A_4 \\ &\quad + A_1 A_2^2 A_4^2 + A_1^2 A_2 A_5^2 + \Omega^2 R^2 A_2 A_3^2 A_5 - A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ D_1 &= \xi_1 + \xi_g R \\ D_2 &= \xi_1 + 4\xi_1^2 \xi_g R + \xi_g R^3 + 4\xi_1 \xi_g^2 R^2 \\ D_3 &= \xi_1 R^2 + \xi_g R \quad \Omega = \frac{\omega_b}{\omega_1} \quad R = \frac{\omega_g}{\omega_1} \end{aligned} \quad (10)$$

한편, 식 (4)의 등가점성감쇠계수는 다음과 같이 계산된다.

$$\xi_e = \frac{\varepsilon \Psi g}{\pi \omega_b} \left[\frac{2\omega_1}{G_0} \cdot \frac{D_0}{B_2 S_5 + B_3 S_1 + B_4 S_2 + B_1 S_3} \right]^{1/2} \quad (11)$$

최적화를 위한 설계변수로는 본 연구에서는 isolator의 특성을 나타내는 Ω , ξ_b , ε 과 base의 질량을 나타내는 μ 을 택하였다.

이상으로부터 확률론적 방법에 의거한 면진 구조물의 최적 설계는 다음과 같은 구속 최적화문제로 귀착된다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \frac{\sigma_y}{\sigma_0} \\ & \text{Subject to } x_m \leq x_{cr} \\ & \quad \Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2 \\ & \quad \xi_{b1} \leq \xi_b \leq \xi_{b2} \\ & \quad \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2 \\ & \quad \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2 \end{aligned} \quad (12)$$

3. 수치계산 예 및 고찰

수치계산 예로써 Fig. 2에 보인 균일 3층 shear type 면진 구조물의 최적 설계를 수행하였다. 수치계산에 있어서 식 (12)의 구속조건으로써 다음의 경우를 고려하였다.

$$x_m \leq 30cm, \quad 0.01 \leq \Omega \leq 1.0, \quad 0 \leq \xi_b \leq 0.2, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 0.04, \quad 0.1 \leq \mu \leq 2.0$$

또한, 상부구조물의 고정지지부 최저차 고유진동수 값 $\omega_1 = 27.96 rad/sec$, 모달감쇠비 $\xi_1 = 0.02$ 을 사용했으며, 지반가속도의 psd에 있어서 $G_0 = 50 cm^2/sec^3$, $\xi_g = 0.65$ 을, 식 (6)의 T 및 p 는 각각 25sec 및 0.9를 사용하였다.

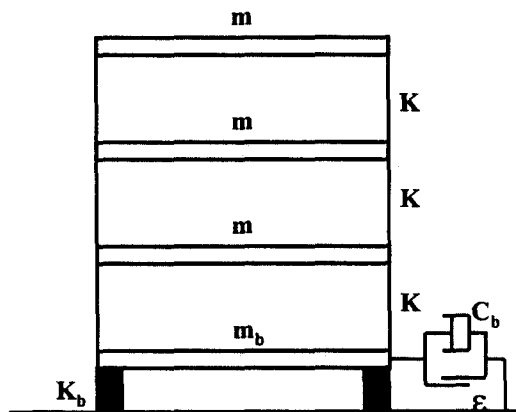


Fig. 2 Numerical example : A uniform three-story base isolated shear type structure

식 (12)로 주어지는 구속 최적화 문제를 풀기 위해 Constantinou[1]는 penalty function을 도입하여 비구속(unconstrained) 최적화 문제로 치환하는 방법을 사용하였으나, 본 연구에서는 MATLAB Optimization Toolbox[7]에서 제공하는 sequential quadratic programming 최적화기법(MATLAB의 'fmincon' 함수)을 사용하였다. Sequential quadratic programming 최적화기법은 현재 구속 최적화 문제의 해법으로써 가장 효율적인 방법으로 알려져 있다[7].

최적 해를 구하기에 앞서서 설계변수들의 변화가 목적함수 및 구속조건에 미치는 영향을 검토하였다. 이를 위해 Fig. 3 및 Fig. 4에 각각 설계변수 변화에 따른 목적함수 및 구속조건의 변화를 도시하였다. 이들 그림에서 설계변수 ξ_b 의 값은 0.1로 고정하였다. Fig. 3에서 보듯이 지반가속도의 지배 진동수(ω_g)가 상부구조물의 고정지지부 최저차 고유진동수(ω_1)에 비해 매우 작은 경우 ($R = \omega_g/\omega_1 = 0.1$)의 목적함수의 변화는 지반가속도가 white noise($R \rightarrow \infty$)인 경우와 매우 다를 수 있으며, 수치계산 모델의 경우 R 이 1이상이면 white noise 경우와 거의 같아져 감을 알 수 있다. 또한 R 이 1이상인 경우 $\Omega = \omega_b/\omega_1$ 은 작을수록 $\mu = m_N/m_b$ 이 클수록 즉, isolator의 강성이 작고 base가 가벼울수록 목적함수는 작아짐을 알 수 있다. 한편, 목적함수와는 달리 R 의 변화에 따라 구속조건 즉, base의 최대 상대변위의 변화는 상대적으로 작으며, 이 경우에는 Ω 는 클수록 μ 는 작을수록 base의 최대 상대변위가 작아짐을 알 수 있다. 특히, 구속조건의 경우에는 마찰요소가 추가됨($\varepsilon \neq 0$)으로써 base의 최대 상대변위가 현저하게 줄어들음을 알 수 있다.

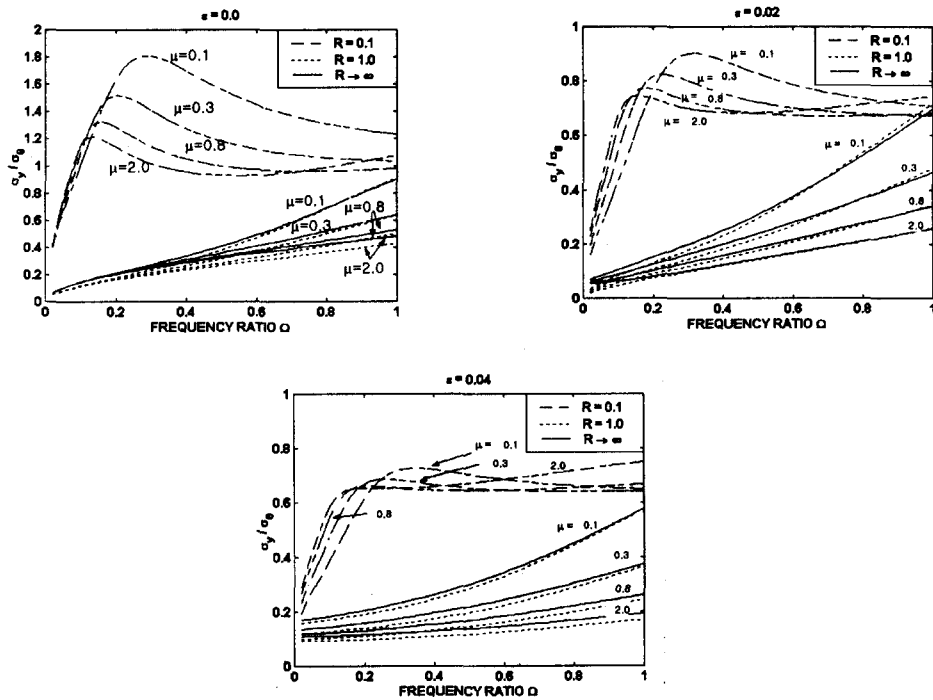


Fig. 3 Variation of the objective function w.r.t. those of the design variables

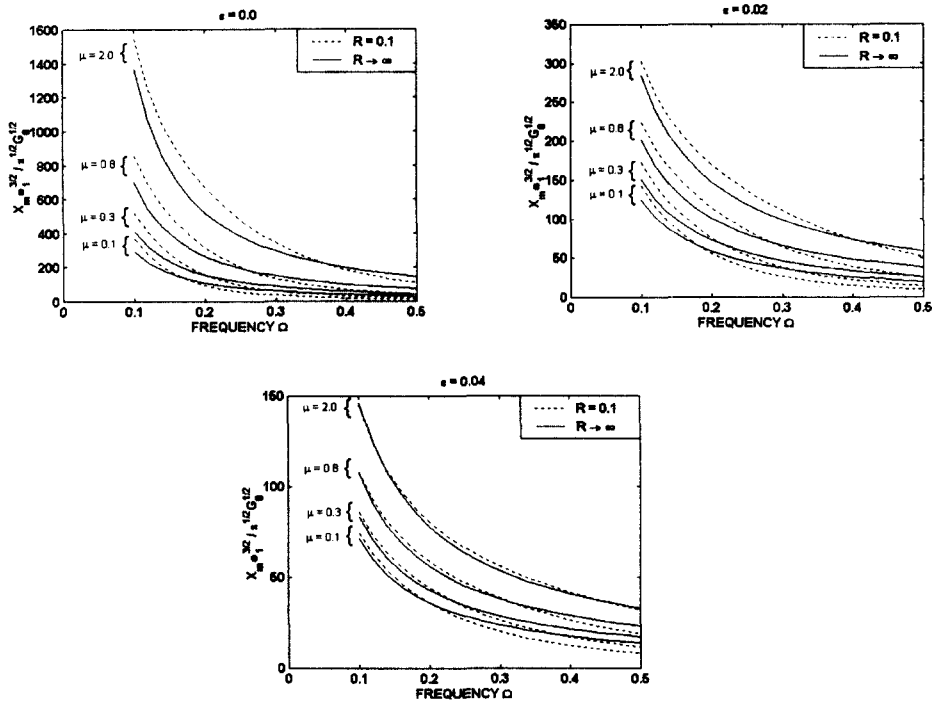


Fig. 4 Variation of the constraints w.r.t. those of the design variables

Table 1에는 마찰계수 ϵ 은 설계변수에 포함하지 않고 최적 설계를 수행한 결과를 정리하였다. Table 1에서 보듯이 R 에 상관 없이 마찰요소가 없는 경우의 최적 설계는 isolator의 점성감쇠와 base의 무게가 허용범위 내에서 최대값을 가져야 함을 알 수 있으며, 마찰요소가 있는 경우는 isolator의 점성감쇠는 필요 없고 base의 무게는 최소 값을 갖음을 알 수 있다. 한편, 적절한 마찰계수(이 경우 대략 0.02)를 갖는 마찰요소를 추가해야 면진 효과를 크게 개선시킬 수 있음을 알 수 있다. 이를 위해 Table 2에는 마찰계수 ϵ 를 설계변수에 포함하여 최적 설계를 수행한 결과를 정리하였다. Table 2에서 보듯이 최적의 마찰계수를 택함으로써 면진 효과가 다소 개선됨을 알 수 있으며, 이 경우에도 isolator의 점성감쇠는 필요 없고 base의 무게는 최소 값을 갖아야 최적 설계가 이루어짐을 알 수 있다.

4. 결 언

본 논문에서는 선형스프링, 점성감쇠 및 Coulomb 마찰요소의 복합체로 이상화시킬 수 있는 isolator를 적용한 면진 구조물의 최적설계 문제를 확률론적 방법에 의거하여 정식화하고 수치계산에 의해 균일 3층 shear type 면진 구조물에 대해 최적 설계를 수행하였다. 최적 설계결과 지반가속도의 지배 진동수에 따라 최적 설계 결과가 달라지며, 수치계산 대상모델의 경우 R 이 1이상이면 지반가속도가 white noise인 경우와 거의 같은 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다. 또한 적절한 마찰계수(수치계산 대상모델의 경우 0.017~0.02)를 갖는 마찰요소를 추가함으로써 더욱 우수한 면진

설계결과를 얻을 수 있었으며, 이 경우 isolator의 점성감쇠는 필요치 않으며 base의 무게는 가벼워야 최적 설계가 이루어짐을 알 수 있었다.

본 연구는 면진 구조물의 최적 설계에 대한 일차적인 연구로 수행되었으며, 이를 바탕으로 hysteretic 거동을 보이는 isolator를 적용한 면진 구조물과 3차원 면진 구조물의 최적 설계에 관한 연구를 수행할 예정이다. 아울러 3차원 면진 구조물에 대한 isolator의 특성치에 대한 최적 설계 기법이 정립되면 isolator의 최적 배치설계로 확장할 예정이다.

Table 1 Optimum design of a three story base isolated structure for the case of exclusion of the friction as a design variable

| | Coefficient of friction ϵ | Optimum design | | | σ_y/σ_0 | Constraint X_m (cm) |
|--------------------------------|------------------------------------|----------------|----------|-------|---------------------|-----------------------|
| | | ξ_b | Ω | μ | | |
| $R \rightarrow \infty$ (WN) | 0.00 | 0.2 | 0.0680 | 0.1 | 0.0896 | 30 |
| | 0.02 | 0.0 | 0.0820 | 2.0 | 0.0592 | 30 |
| | 0.04 | 0.0 | 0.0367 | 2.0 | 0.1095 | 30 |
| $R=1$ | 0.00 | 0.2 | 0.0682 | 0.1 | 0.0725 | 30 |
| | 0.02 | 0.0 | 0.0823 | 2.0 | 0.0474 | 30 |
| | 0.04 | 0.0 | 0.0394 | 2.0 | 0.0926 | 29 |
| $R=0.1$ | 0.00 | 0.2 | 0.0787 | 0.1 | 0.7283 | 30 |
| | 0.02 | 0.0 | 0.0870 | 2.0 | 0.3799 | 30 |
| | 0.04 | 0.0 | 0.0360 | 2.0 | 0.4937 | 30 |

Table 2 Optimum design of a three story base isolated structure for the case of inclusion of the friction as a design variable

| | Optimum design | | | | σ_y/σ_0 | Constraint X_m (cm) |
|--------------------------------|----------------|----------|-------|------------|---------------------|-----------------------|
| | ξ_b | Ω | μ | ϵ | | |
| $R \rightarrow \infty$ (WN) | 0.0098 | 0.0943 | 2.0 | 0.0176 | 0.0575 | 30 |
| $R=1$ | 0.001 | 0.0949 | 2.0 | 0.0174 | 0.0459 | 30 |
| $R=0.1$ | 0.000 | 0.0870 | 2.0 | 0.0200 | 0.3799 | 30 |

후 기

본 연구는 과학기술부의 지원 하에 국가지정연구실사업으로 수행 중인 “제진장치를 활용한 제진 설계기술 개발”과제의 일환으로서 수행되었다.

참고문헌

1. Constantinou, M. C., "Random Vibration and Optimization of Design of Aseismic Base Isolation Systems", Ph. D. Thesis of Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, May 1984.
2. Xiaoming, L., "Optimization of the stochastic Response of A Bridge Isolation System with Hysteretic Dampers", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.18, pp951-964, 1989.
3. Inaudi J. A. and Kelly, J. M., "Optimum Damping in Linear Isolation Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.22, pp583-598, 1993.
4. Jangrid, R. S., "Optimum Damping in A Non-Linear Isolation System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.189, No.4, pp477-487, 1996.
5. Jangrid, R. S., "Optimum Frictional Elements in Sliding Isolation Systems", *Computers and Structures*, Vol.76 pp651-661, 2000.
6. 박지훈, 이상현, 강경수, 황재승, 김진구, "점탄성 감쇠기와 설치용 가새의 최적설계", *한국지진 공학회 논문집 제5권 제3호*, pp45-56, 2001.
7. The MathWorks Inc., *Optimization Toolbox for Use with MATLAB User's Guide*, The MathWorks Inc., 1999.