

## Cu-Al 전도체 형상에 따른 홀손실과 수직 홀전류 해석

### Analysis on the Hall Losses and Transverse Hall Current with Cu-Al Conductor Configuration

김상결\*, 정동회\*, 정일형\*, 이호식\*\*, 정택균\*\*\*, 김태원\*\*\*, 이준웅\*\*\*\*

(Sang-Keol Kim\*, Dong-Hoe chung\*, Il-Hyung Jung\*, Ho-Sik Lee\*\*, Taek-Gyun chung\*\*\*, Tae-Wan Kim\*\*\*, Joon-Ung Lee\*\*\*\*)

#### Abstract

An anomalous magnetoresistance effect has been theoretically studied at very low temperatures for composite normal metal conductors. This anomalous behavior is due to transverse Hall currents in the composite which would result in increased losses and higher effective resistance for the composite conductor.

In this paper, transverse current flow and effective resistance with Cu-Al conductor configuration were analyzed using FEM(finite element method) for predicting the Hall losses to be resulted in anomalous magnetoresistance effect. And they are plotted three dimensionally to be visualized.

**Key Words** : Hall effect, Magnetoresistance, FEM(Finite element method)

#### 1. 서 론

최근 극저온에서 관찰되는 일반 금속 전도체에 대한 자기저항효과의 연구가 활발하게 진행되고 있으며, 특히 1989년 이후에는 고순도 알루미늄과 고저항 금속과의 합성 전도체에서 발생하는 이상자기저항 효과에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다<sup>1-3)</sup>. 그 대표적인 연구가 고저항 Al-Fe-Ce 합금자켓으로 둘러싸인 고순도 알루미늄 코어로 이루어진 사각 전도체에 대하여 이루어졌다. 자계가 걸리지 않은 상태에서의 저항값은 고저항 자켓으로 둘러싸인 고순도 코어의 예상 저항값과 일치하였다. 그러나 자계가 걸린 상태에서의 저항은 단순한 병렬회로 모델에 의한 예측과는 달리 예상값을 크게 초과했을 뿐만 아니라, 커다란 선형적 증가를 나타냈다. 이런 거동은

합성체에서  $I^2R$  손실의 증가와 더 높은 유효저항을 가져오는 합성체내 수직 홀전류에 기인한다고 제안되었다<sup>2)</sup>.

본 논문에서는 Al-Fe-Ce 합금자켓과 고순도 알루미늄 코어 전도체보다 더욱 안정화된 Cu-Al 전도체에 대하여 이상자기저항 현상의 원인이라고 생각할 수 있는 홀효과에 의한 손실을 유한요소법을 사용하여 해석하였다.<sup>4)</sup>

홀전류에 대한 해석 및 유효저항의 예측은 변분법과 유한요소법에 의하여 이루어졌으며, 전도체는 Kaneko<sup>5)</sup>가 제안하였던 매우 간단한 Cu-Al 이중구조와 사각 자켓 코어 구조를 적용하여 수직전류 흐름과 유효저항을 분석하였고, 이를 도시화 하였다.

#### 2. 홀 메커니즘

##### 2.1 홀효과에 의한 전압과 전류 관계

정상상태에서 수직 홀메커니즘을 지배하는 방정식은  $\nabla \times E = 0$  와  $\nabla \cdot J = 0$  (1)

\* 광운대학교 전기공학과  
\*\* 홍익대학교 전기제어공학과  
\*\*\* 홍익대학교 물리학과  
\*\*\*\* 한국전기전자재료학회

이며, 전계와 전류의 관계는  $J = \sigma E$  로 나타낼 수 있다. 도전을  $\sigma$  는 다음에 주어지는 저항률  $\rho$  의 역수와 같다.

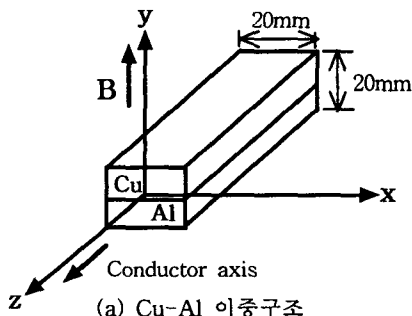
$$\sigma^{-1} = \rho = \begin{bmatrix} \rho_{\perp} & 0 & \rho_h \\ 0 & \rho_{//} & 0 \\ -\rho_h & 0 & \rho_{\perp} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서, B는 양(+)의 y방향으로 인가한 외부 자계이다. 홀계수  $R_h$ 는  $\rho_h = BR_h$  이고,  $\rho_{//}$ 와  $\rho_{\perp}$ 는 자계에 평행 및 수직인 저항률이다.

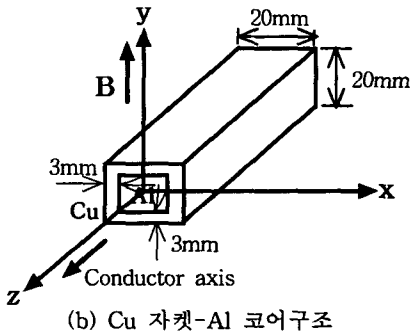
z축을 전도체의 축으로 하면,  $\nabla \times E = 0$  이 되고  $E_z$ 는 x-y평면 전체에 대해 균일하게 된다. 전도체는 매우 긴 것으로 가정하였고, 전류밀도와 저항률은 전도체 길이에 따른 위치에 대해 변하지 않는다.

또한  $\nabla \times E = 0$  이므로 E는 스칼라 퍼텐셜의 변화도로 표현될 수 있다(즉,  $E = -\nabla U$  ). 이것을  $\nabla \cdot J = 0$  에 대입하면 퍼텐셜이 만족되는 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_{\perp}}{\rho_h^2 + \rho_{\perp}^2} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho_{//}} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_h}{\rho_h^2 + \rho_{\perp}^2} E_z \right) \quad (3)$$



(a) Cu-Al 이층구조



(b) Cu 자켓-Al 코어구조

그림 1. 전도체 형상과 축배열

## 2.2 변분법에 의한 해석

변분법은 그림 1에 보인 구조의 전도체에 대한 식 (3)의 해를 구하는데 이용되었다. 이 경우에 저항률과 홀계수는 두 영역 내에서 균일하므로 식(3)은 다음식으로 다시 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left( \frac{\rho_h^2 + \rho_{\perp}^2}{\rho_{//}} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

이 식은 직각좌표계에서 분리될 수 있고, 분리된 해는 일반해를 만들기 위한 결과로 이용될 수 있다. 포텐셜 U는 물질사이의 경계와 외부 경계조건에 영향을 받으며 두 영역에 대하여 각각 다음식으로 표현될 수 있다.

$$U^{(Cu)} = \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2D}\right) \cosh\left(\frac{n\pi(y-l)}{2Dg^{(Cu)}}\right) - \frac{\rho_h^{(Cu)}}{\rho_{\perp}^{(Cu)}} E_z x \quad (5)$$

$$U^{(Al)} = \sum_n c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2D}\right) \cosh\left(\frac{n\pi(y+l)}{2Dg^{(Al)}}\right) - \frac{\rho_h^{(Al)}}{\rho_{\perp}^{(Al)}} E_z x \quad (6)$$

이들 식은 상부, 하부 그리고 측면의 외부면에서  $J_n = 0$  인 조건을 만족시킨다. 계수  $a_n$ 과  $c_n$ 은 상부와 하부 균질 영역사이의 경계에서  $J_n$ 과  $E_t$ 의 연속조건을 만족시키기 위해 이용되는데, 이들 식에서 x-y축의 기준은 전도체 중심을 x축과 y축의 영점으로 취하였다.

u와 l은 각각 Cu와 Al의 높이를 나타내고, D는 전도체의 1/2-폭이다.  $g^{(Cu)}$ 와  $g^{(Al)}$ 은 식 (4)에서 y에 대한 도함수의 계수이며 다음식으로 주어진다.

$$g = \frac{\rho_h^2 + \rho_{\perp}^2}{\rho_{//}} \quad (7)$$

이 g는 Cu와 Al에 대하여 각각 다른 값을 갖는다.

결과적으로 전계는 위치좌표에 대한 미분방정식인 식 (5)와 (6)에 의해 얻어진다.

## 2.3 유한요소법에 의한 해석

지금까지는 자계가 y축과 일치한 경우가 적용되었지만, 실제로는 자계가 y축에 일치하지 않는 경우가 일반적이다. 이 경우에 J-E 관계는 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & \sigma_{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기에서

$$\sigma_{\perp} = \frac{\rho_{\perp}}{\rho_{\perp}^2 + \rho_h^2}, \quad \sigma_{11} = \frac{1}{\rho_{//}} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi, \quad \sigma_{12} = \left( \sigma_{\perp} - \frac{1}{\rho_{//}} \right) \sin \phi \cos \phi, \quad \sigma_{13} = -\frac{\rho_h \cos \phi}{\rho_{\perp}^2 + \rho_h^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{1}{\rho_{//}} \cos^2 \phi + \sigma_{\perp} \sin^2 \phi, \quad \sigma_{23} = -\frac{\rho_h \sin \phi}{\rho_{\perp}^2 + \rho_h^2}$$

그리고  $\phi$  는 인가된 자계와 양의 y축 사이에서 z에 대해 반시계방향의 각이다.

일반적으로 유한요소법은 전계분포를 얻기 위하여 변분법에 의존한다. 그것은 문제 영역에 대하여 정의된 에너지 함수를 최소화하는데 기초를 둔다. 2차원 홀 전도 문제에 대한 에너지 함수는 스칼라 퍼텐셜에 대한 정자장의 경우에 대해서 직접 유추되었으며, 전도인 경우에 에너지 함수는 다음과 같은 2차원 적분으로 주어진다.

$$F(U) = \int_{A_c} \int \frac{1}{2} (\sigma_{11} E_x^2 + 2\sigma_{12} E_x E_y + \sigma_{22} E_y^2 + 2(\sigma_{13} E_x E_z + \sigma_{23} E_y E_z)) dA \quad (9)$$

여기에서  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$  와  $\sigma_{23}$  은 위에서 정의되었고,  $E_x$  와  $E_y$  는 x-y평면에 대하여 수평 전계성분이고,  $E_z$  는 x-y평면에 대하여 인가된 수직 전계이다.

### 3. 시뮬레이션

본 논문에서는 먼저 홀 메커니즘을 지배하는 방정식으로부터 퍼텐셜을 만족시키는 에너지 함수를 변분법과 유한요소법으로 해석하였다. 그리고 자계의 변화에 따른 전도체내 수직전류 흐름과 전류밀도 분포를 다음과 같은 과정을 거쳐 시뮬레이션하였다.

- 1) 해석영역 분할 2) 물질 특성값 대입 (저항률)
- 3) 해석대상의 특성 4) 다원연립방정식 계산
- 5) Post-Processing (전류밀도, 전류흐름)

또한, 수직전류 흐름과 전류밀도 분포는 단지 전도체 형상에 따른 비교를 위하여 한가지 자계 5[T]에 대해서만 적용시켜 해석하였고, 해석에 사용된 Cu와 Al의 파라미터를 표 1에 나타내었다.

표1. 전도체 해석에 사용된 Cu와 Al의 파라미터

	자계[T]	홀계수[ $\Omega m T^{-1}$ ]	저항률[ $\Omega m$ ]
Al	5	$1 \times 10^{-10}$	$8.464 \times 10^{-10}$
Cu	5	$-0.5 \times 10^{-10}$	$3.930 \times 10^{-10}$

## 4. 결과 및 검토

### 4.1 Cu-Al 이중구조의 수직전류 해석

그림 2는 온도 4.2[K]에서 Cu-Al 이중구조 전도체에 5[T]의 자계가 인가되었을 때, 이 단면을 통과하는 수직전류  $J_z$ 의 흐름을 유한요소해석을 통하여 나타낸 것으로, 자계에 의하여 발생된 홀효과에 의해 전류흐름이 Al층에서는 우에서 좌로, Cu층에서는 좌에서 우로 흐르게 되고, 전체적으로는 나선형태로 순환된다. 또한 Cu와 Al의 경계면 양끝부분에 전류가 집중되는 것으로 나타났다.

그림 3은 Cu-Al 이중구조 전도체의 수직 전류밀도 분포를 3차원으로 도시화 한 것이다.

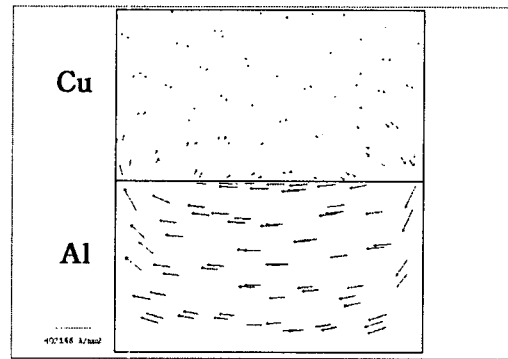


그림 2. 5[T]에서 Cu-Al 이중구조의 수직전류 흐름

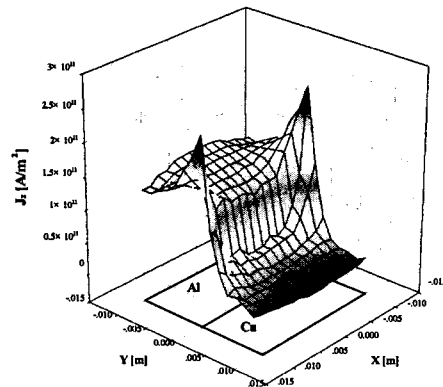


그림 3. 5[T]에서 Cu-Al 이중구조의 수직전류밀도 분포

### 4.3 Cu 사각 자켓-Al 코어구조의 수직전류 해석

그림 4는 자계가 5[T], 온도가 4.2[K]일 때, Cu 자켓-Al 코어 전도체의 수직 전류흐름에 대한 유한요소 결과를 나타낸다. 사각 자켓으로 둘러싸인 전도체인 경우, 전체적인 구조가 상하좌우 대칭이므로 전체의 해석영역을 나타내지 않고 단지 1/4만을 나타내었다. 그림에서 중앙 코어를 통과한 전류는 주로 상부와 하부 각각의 코어와 마주하는 자켓사이의 경계면의 양 모서리를 통해 외부 자켓으로 되돌아가는 것으로 나타났다. 그리고 전류의 흐름은 코어 모서리 부분에 집중하고 자켓의 중심 부분에는 전류흐름이 거의 없다는 것을 볼 수 있다. 그림 5는 그림 4에 대한 전류밀도를 3차원적으로 도시화한 것이다.

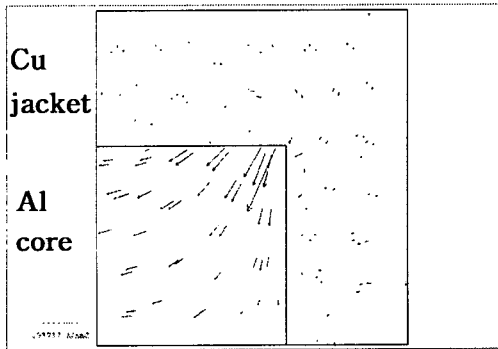


그림 5. 5[T]에서 Cu 자켓-Al 코어구조의 수직전류 흐름

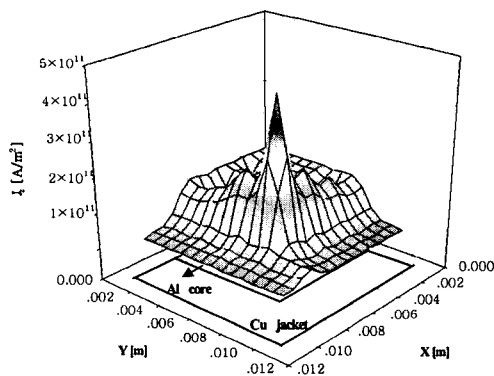


그림 6. 5[T]에서 Cu 자켓-Al 코어구조의 수직 전류 밀도 분포

### 5. 결 론

본 논문은 자계의 영향을 받는 전도체에서 홀전류를 모델링하기 위한 정확한 수치법을 개발하고, 시험적용하는 것이다. 이를 위해 앞에서 언급된 구조에 대하여 유한요소법을 사용하여 해석한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

- 1) 극저온에서 Cu-Al 전도체에 나타난 자기이상저항 현상은 자계의 증가에 따른 유효저항률의 크고 선형적인 증가에 기인한다는 것을 알 수 있었다.
- 2) 유효저항률 증가의 주요한 원인으로는 자계의 인가에 따른 수직 홀전류의 생성에 있다는 것을 알 수 있었다.
- 3) 홀효과에 의한 수직전류의 흐름 및 전류밀도의 양상을 시각화 할 수 있기 때문에 전도체 형상을 개선할 수 있을 것으로 사료된다.
- 4) 자기저항소자, 홀소자와 같이 그 특성이 자계에 의한 홀효과에 크게 지배를 받는 소자들의 형상 설계에 있어 본 연구방법을 적용함으로써 설계에 필요한 기본 데이터를 확보할 수 있을 것으로 사료된다.

### [참 고 문 헌]

- [1] M.P. Krefta, O.R. Christianson and J.H. Parker, Jr., "Steady-state Hall losses in composite cryogenic conductors", *Cryogenics*, Vol.36, No.4, pp.291-301, (1996)
- [2] John R. Brauer, Jeffrey J. Ruehl, Bruce E. MacNeal and Franz Hirtenfelder, "Finite Element Analysis of Hall Effect and Magnetoresistance", *IEEE Trans. on Electron Devices*, Vol.42, No.2, pp.328-333, (1995)
- [3] B. Krevet and W. Schauer, "Transverse magnetoresistance and its temperature dependence for high polycrystalline aluminium", *Jpn Appl Phys*, Vol.47, pp.3656, (1976)
- [4] A.M.J. Huizer and P.P. Silvester, "Numerical modeling of vertical Hall effect devices", *IEEE Electron Device Lett.*, pp.482-484, Nov., (1984)
- [5] H. Kaneko and N. Yangai, "Enhancement of magnetoresistance due to Hall current in Al-Cu composites", *Cryogenics*, Vol.32, pp.1114, (1992)