유전체 봉이 삽입된 원통형 공동 공진기에서의 non-decaying 모드 해석을 이용한 공진 모드 구분

A Resonant Mode Identification in Cylindrical Cavity Resonators with Concentric-rod using Non-decaying Mode Analysis

이원희, 김태신, 강민우*, 구경완*, 허정
(Won-Hui Lee, Tai Shin Kim, Min Woo Kang*, Kyung-Wan Koo*, Jung Hur)

Abstract

We described a method resonant mode identification in dielectric-rod loaded cylindrical cavity resonators. Resonant frequency of dielectric loaded cavity is calculated by analyzing the characteristic equation. The characteristic equation is solved by using the ContourPlot graph of Mathematica. As the result of comparing calculation value and experimental value of resonant frequencies, we know that the field representation of non-decaying mode is exact. The contour graph method is not a method using approximated representation of electromagnetic field variation at the outer area of dielectric in the resonators but a method using exact representation.

Key Words : mode, dielectric-rod, cylindrical cavity resonators, ContourPlot graph, non-decaying mode

1. 서 론

유전체가 삽입된 공진기는 속이 빈 공진기에 비해 소형 제작이 가능하고 또한 높은 Q 값(quality factor)을 갖는다. 이러한 이유로 성능이 뛰어난 필터나 안정된 발진기, 그리고 초전도체의 특성 측정 등에 이용된다. 특히 유전체 봉이 삽입된 원통형 공동 공진기는 유전체에 전자계가 집속되므로, 옆면 도체벽과 윗면 도체벽에서의 손실을 줄일 수 있어서 빈 공진기보다 높은 Q 값을 얻을 수 있다. 이러한 공진기를 설계하면서 정확한 Q 값과 모드 구분, 공진주파수를 계산하기 위해서는 공진기 내부의 정확한 전자계 표현이 선행되어야 한다.

본 논문에서는 non-decaying 모드 해석을 이용하여 전자계 표현을 정확히 구하고, 상용 수학툴인 Mathematica의 contour graph를 이용하여 공진 모드를 구분하였다. 유전체 봉이 삽입된 원통형 공진기 내부의 정확한 전자계 식의 표현과 공진 모드 구분을 정확히 한다면, 유전체 봉을 삽입한 공진기를 이용한 유전체 공진기 필터나 공진기법으로 구현한 안테나의 해석을 정확히 할 수 있으며, 정확한 설계 및 제작이 가능하리라 생각된다.

건국대학교 전자 · 정보통신공학과
* 영동대학교 정보 · 전자공학부
(서울시 광진구 화양동 1번지 건국대학교,
Fax: 02-3437-5235, Tel: 02-450-3208,
E-mail : blue@kkucc.konkuk.ac.kr)

2. 유전체 봉이 삽입된 원통형 공진기의 전자계 표현

동심 유전체 봉(concentric dielectric rod)이 삽입된 원통형 공진기의 전자계는 속이 빈 원통형 공진기(cylindrical cavity resonator)와 거의 유사하게 표현할 수 있다. 차이점은 공동 공진기 내부의 중심에 놓인 동심 유전체 봉 안쪽 영역과 바깥쪽 영역에서의 전자계가 다르고, 전자계는 비유전율이 높은 쪽으로 집속되기 때문에, 감쇠하는 형태의 정재파를 형성한다는 것이다. 매질의 변화는 각 매질에서의 전파상수 k가 변화함을 의미하고, 이러한 구조에 대해서는 반지름 방향의 전파상수 k_ρ가 다르다는 것을 의미한다. 즉, 영역의 변화에 따라 전자계는 변화하게 되므로, 각 영역에 대하여 파동함수를 결정한 후 경계조건을 적용하여 그 구조에 대한 특성을 결정지을 수 있다. 해석하고자 하는 구조는 그림 1과 같다.

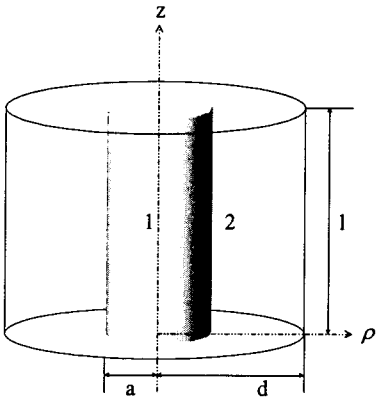

그림 1. 동심 유전체 봉이 삽입된 원통형 공진기

동심 유전체 봉이 삽입된 원통형 공진기는 그림 1에서와 같이 영역 1과 영역 2로 구분한다. 영역 1과 2에서 축 방향의 전자계를 일치시키고, 반지름 방향의 전자계 변화만을 살펴보기 위하여 그림에서와 같이 동심 유전체 봉과 공진기 사이의 축 방향의 틈(gap)은 존재하지 않는다. 즉, 동심 유전체 봉과 공진기의 윗면 도체 벽을 밀착시킨 형태로써, 공진기의 높이와 동심 유전체 봉의 높이는 일치한다. 동심 유전체 봉은 ε_1, μ_1인 매질로, 영역 2는 ε_2, μ_2인 매질로 구성되었다. 소멸모드에서는 반드시 $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ 이어야 하지만, non-decaying 모드 표현에서는 유전율의 대소 관계에 무관하다. 그림에서 a는 동심 유전체 봉의 반지름, d는 공동 공진기의 반지름, l은 공동 공진기 및 동심 유전체 봉의 높이를 나타낸다.

TM모드에 대한 전자계 표현은 각 영역의 파동함수 Ψ_1과 Ψ_2를 가정하고 이들간의 경계조건을 통해서 완전하게 구할 수 있다. 영역 1에서는 ρ방향의 변화를 1종 Bessel함수로 표현하였으나 영역 2에서는 $a \le \rho \le d$의 범위이기 때문에 $\rho=0$ 에서 무한대의 값을 가지는 2종 Bessel함수를 제외시킬 이유가 없다. 그러므로 영역 2에서는 ρ방향의 전자계 표현을 1종 Bessel함수와 2종 Bessel 함수의 조합으로 표현하게 된다. 이를 이용하여 각 영역의 전자계 표현을 구해보면 영역 1과 영역 2에서의 파동함수 Ψ_1과 Ψ_2는

$$\Psi_1 = AJ_n(k_{\rho 1}\rho)\cos k_z z \cos n\phi \quad (1)$$

$$\Psi_2 = (BJ_n(k_{\rho 2}\rho) + CY_n(k_{\rho 2}\rho))\cos(k_z z)\cos(n\phi) \quad (2)$$

로 가정한다. 여기에서

$k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu}$, $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu}$, $k_{\rho 1} = k_1$, $k_{\rho 2} = k_2$ 이다.

각각의 전자계를 구하면 먼저 1영역에서는

$$E_{\rho 1} = -\frac{Ak_z k_{\rho 1}}{j\omega\varepsilon} J_n'(k_{\rho 1}\rho)\sin(k_z z)\cos(n\phi) \quad (3)$$

$$E_{\phi 1} = \frac{Ank_z}{j\omega\varepsilon\rho} J_n(k_{\rho 1}\rho)\sin(k_z z)\sin(n\phi) \quad (4)$$

$$E_{z1} = \frac{A(k_1^2 - k_z^2)}{j\omega\varepsilon} J_n(k_{\rho 1}\rho)\cos(k_z z)\cos(n\phi) \quad (5)$$

$$H_{\rho 1} = -A\frac{n}{\rho} J_n(k_{\rho 1}\rho)\sin(k_z z)\sin(n\phi) \quad (6)$$

$$H_{\phi 1} = -Ak_{\rho 1} J_n'(k_{\rho 1}\rho)\sin(k_z z)\cos(n\phi) \quad (7)$$

으로 구해지고, 영역 2에 대해서는

$$E_{\rho 2} = -\frac{k_z k_{\rho 2}}{j\omega\varepsilon}(BJ_n'(k_{\rho 2}\rho) + CY_n'(k_{\rho 2}\rho))\sin(k_z z)\cos(n\phi) \quad (8)$$

$$E_{\phi 2} = \frac{nk_z}{j\omega\varepsilon\rho}(BJ_n(k_{\rho 2}\rho) + CY_n(k_{\rho 2}\rho))\sin(k_z z)\sin(n\phi) \quad (9)$$

$$E_{z2} = \frac{(k_2^2 - k_z^2)}{j\omega\varepsilon}(BJ_n(k_{\rho 2}\rho) + CY_n(k_{\rho 2}\rho))\cos(k_z z)\cos(n\phi) \quad (10)$$

$$H_{\rho 2} = -\frac{n}{\rho}(BJ_n(k_{\rho 2}\rho) + CY_n(k_{\rho 2}\rho))\sin(k_z z)\sin(n\phi) \quad (11)$$

$$H_{\phi 2} = -k_{\rho 2}(BJ_n'(k_{\rho 2}\rho) + CY_n'(k_{\rho 2}\rho))\sin(k_z z)\cos(n\phi) \quad (12)$$

와 같이 구해진다. 이제 TM_{010}모드를 고려하면 이 모드에서 n=0이므로 전자계 성분은 E_ρ, E_z, H_ϕ 만 남는다. $\rho = d$ 일 때, 전계의 접선성분이 zero라는 경계조건을 적용하면

$$\frac{(k_2^2-k_z^2)}{j\omega\varepsilon}\{BJ_0(k_{\rho 2}d)+CY_0(k_{\rho 2}d)\}=0 \quad (13)$$

이고, 여기서

$$B=-C\frac{Y_0(k_{\rho 2}d)}{J_0(k_{\rho 2}d)} \quad (14)$$

의 관계를 유도할 수 있다. 다시 $\rho=a$ 에서 전계와 자계의 접선성분이 연속이라는 경계조건을 적용하면

$$A\frac{k_{\rho 1}^2}{j\omega\varepsilon_1}J_0(k_\rho a)=\frac{k_{\rho 2}^2}{j\omega\varepsilon_2}\{BJ_0(k_{\rho 2}a)+CY_0(k_{\rho 2}a)\} \quad (15)$$

$$Ak_{\rho 1}J_0'(k_{\rho 1}a)=k_{\rho 2}\{BJ_0'(k_{\rho 2}a)+CY_0'(k_{\rho 2}a)\} \quad (16)$$

의 식을 얻을 수 있다. 여기서 계수 B와 C의 관계를 대입하고 두 식을 나누어 정리하면,

$$\frac{\varepsilon_1}{k_{\rho 1}}\frac{J_0'(k_{\rho 1}a)}{J_0(k_{\rho 1}a)}=$$

$$\frac{\varepsilon_2}{k_{\rho 2}}\frac{Y_0'(k_{\rho 2}a)J_0(k_{\rho 2}d)-J_0'(k_{\rho 2}a)Y_0(k_{\rho 2}d)}{Y_0(k_{\rho 2}a)J_0(k_{\rho 2}d)-J_0(k_{\rho 2}a)Y_0(k_{\rho 2}d)} \quad (17)$$

의 특성방정식을 얻을 수 있다. TE모드에 대해서도 같은 방법으로 유도할 수 있다.

3. 특성방정식의 해석

구해진 특성방정식은 초월함수 방정식의 형태를 가지고 있기 때문에 단순하게는 해석될 수 없다. 이를 해석하기 위해서는 수치 해석적인 방법이나 그래프를 이용한 방법을 사용하여야 한다. 본 논문에서는 Mathematica의 contour graph를 이용해서 보다 단순하게 초월함수 방정식으로 이루어진 특성방정식을 해석하였다.

Mathematica의 ContourPlot은 두 개의 변수를 갖는 함수에 의해 나타나는 값을 3차원 그래프로 표현하여 x, y의 변수에 의한 z값 중에서 특정한 값을 가지는 contour를 그려주는 기능을 가지고 있다. 두 개의 변수를 갖는 특성방정식이 0의 값을 만족하는 값을 contour로 그려보면, 그것이 반지름의 변화에 대한 공진주파수 값이 된다.

먼저 TM_{010}모드의 특성방정식을 하나의 함수 형태로 만들어 보면

$$f(\omega)=\frac{\varepsilon_1}{k_{\rho 1}}\frac{J_0'(k_{\rho 1}a)}{J_0(k_{\rho 1}a)}-$$

$$\frac{\varepsilon_2}{k_{\rho 2}}\frac{Y_0'(k_{\rho 2}a)J_0(k_{\rho 2}d)-J_0'(k_{\rho 2}a)Y_0(k_{\rho 2}d)}{Y_0(k_{\rho 2}a)J_0(k_{\rho 2}d)-J_0(k_{\rho 2}a)Y_0(k_{\rho 2}d)} \quad (18)$$

이다. 그리고 특성방정식의 해를 찾는 과정은 $f(\omega)=0$ 를 만족하는 공진주파수 f와 유전체 반지름 a의 값을 찾는 것이다.

4. 모드 구분 방법

유도된 특성방정식을 Mathematica의 ContourPlot 기능을 이용하여 공진주파수를 구하고 공진 모드를 구분하였다. decaying mode, R. F. Harrington에 의해서 구해진 특성방정식, 본 논문에서 제안된 non-decaying 방법의 특성방정식을 비교하였으며, 모드 구분을 하는 방법을 기술한다.

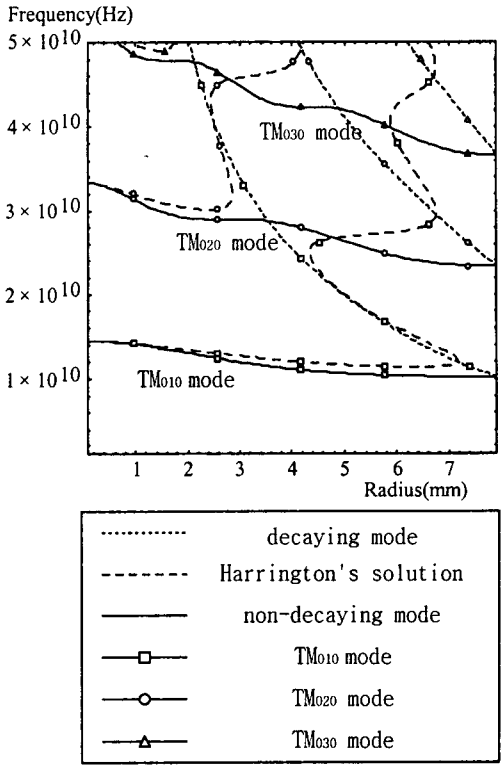

그림 2. 동심 유전체 봉의 반지름 변화에 따른 공진주파수 그래프($\varepsilon_r=2.06$)

그림 2는 유전율 2.06의 경우 decaying mode, R. F. Harrington에 의해서 구해진 특성방정식, 본 논문에서 제안된 non-decaying 방법의 특성방정식을 비교한 것이다. 그림을 보면 non-decaying 모드 표현이 decaying 모드와 R. F. Harrington에 의해서 구해진 특성방정식을 모두 만족함을 알 수 있다. 따라서, 본 논문에서 제안된 non-decaying 모드 표현은 정확한 표현이라고 사료된다. 또한, 그림 2는 반지름 방향으로 변화 시켰기 때문에 모드를 구분하면, 첫 번째 사각형 모양을 갖는 선이 TM_{010}모드, 원 모양

을 갖는 선이 TM_{020}모드, 삼각형 모양을 갖는 선이 TM_{030}모드가 된다.

5. 실험 및 검토

특성방정식을 해석하여서 nod-decaying 모드로 가정한 전자계 표현이 정확한 표현임을 확인하였으나 이는 단지 $a=0$ 인 경우와 $a=d$ 에 대해서만 비교하였으므로 $0<\rho<d$일 때 공진주파수가 실제 값과 일치하는 지는 확인할 수 없다. 이를 비교하기 위해서 실제 경우를 실험하여 확인해 보았다. 또한 실험을 통하여 모드 구분의 정확성을 확인해 보았다.

실험에 사용한 원통형 공진기의 구조는 그림 3과 같다.

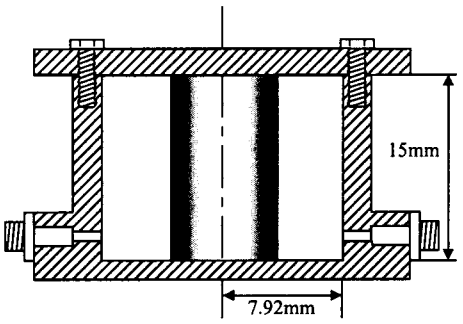

그림 3. 원통형 공진기의 단면도

공진주파수는 원통형 공진기 내부에 각각 다른 반지름의 원통형 유전체 봉을 집어넣어 측정하였다. 이를 통해서 유전체 봉의 반지름 변화에 따른 공진주파수의 변화를 확인하였다. 유전체 봉 sample은 반지름이 2mm에서 7.92mm까지 반지름을 각각 1mm씩 증가시키며 7개를 제작하였다. 유전체는 teflon ($\varepsilon_r=2.06$) 을 이용하였고, 봉의 높이는 원통형 공진기 내부의 높이와 일치하게 하였다. 이는 공진기 내부에서 영역 1과 영역 2의 전자계의 변화가 축 방향에 대해서는 같고, 단만 ρ방향에 대해서만 다른 전파상수를 갖게 하여서 전자계 표현을 비교하기 위해서이다. 여기서는 TM_{010}모드를 선택해 측정하였다. 표 1은 TM_{010}모드에 대한 실험 값과 계산 값의 비교 결과이다. 모드에 대한 공진주파수의 정확성을 판별하면, 계산에서 제안된 모드 구분이 정확함을 알 수 있다.

표 1. TM_{010} 모드의 측정과 계산에 의한 공진주파수

유전체 봉의 반지름(mm)	측정값(GHz)	계산값(GHz)	오차(%)
0	14.490	14.499	0.060
2	12.956	12.969	0.101
3	11.881	11.875	0.054
4	11.075	11.055	0.179
5	10.550	10.524	0.247
6	10.256	10.231	0.257
7	10.119	10.116	0.024
7.92	10.125	10.102	0.237

실험과 계산 결과가 최대 0.25%의 오차율을 보이고 있음을 볼 수 있다. 따라서, non-decaying 모드로 구한 공진주파수와 모드 구분은 정확한 것으로 판단된다.

6. 결 론

실험을 통해 non-decaying 모드로 표현한 전자계가 정확함을 확인하였다. 공진주파수와 모드 구분에서 정확한 결과를 얻었으며, 본 논문의 전자계 표현들을 이용한다면, 공진기, 필터, 안테나 설계의 중요한 기초 자료가 될 것이다.

감사의 글

이 논문은 정보통신부에서 지원하는 대학기초연구지원사업으로 수행

참 고 문 헌

[1] S. B. Cohn, K. C. Kelly, "Microwave Measurement of High-Dielectric-Constant Materials", *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-14, No. 9, pp. 406-410, September, 1966.

[2] M. M. Taheri, D. M. Syahkal, "Computation of Q-factors of dielectric-loaded cylindrical cavity resonators", *IEE Proceedings*, Vol. 137, Pt. H, No. 6, pp. 372-376, December, 1990.

[3] D. Kajfez and P. Guillon, *Dielectric Resonators*, Artech House, 1986.