

시간지연을 갖는 제어대상에 대한 P, PI 제어의 유효 게인 조정 범위에 관한 연구

◦ 강인철*, 최순만**, 최재성***

A Study for the Available Adjustment Range of Gain at P, PI Control for the Retarded Processes

I-C Kang*, S-M Choi**, J-S Choi***

- * 한국해양대학교 대학원
- ** 한국해양수산연수원
- *** 한국해양대학교

Abstract : In this paper, a method to be able to decide the possible maximum gain of P,PI control for the retarded processes under stable condition is proposed. At first, adjustable parameter set causing stability limit are obtained based on the frequency domain condition which makes the roots of transfer function locate on the $j\omega$ axis. And the cut-in frequency ω_p to bring the parameter set to P control from PI control is derived by an equation with 2 parameters L and T_m given, then ω_p is used to compute the maximum gain with stable condition. For the calculation, the controlled process of first order system with time delay element is introduced and all parameters are presumed to be time invariant.

Key words : PI control(PI제어), Dead Time(시간지연), Stable Region(안정영역), Adjustment Range(조정범위)

1. 서론

제어대상에 대한 특성의 이해는 제어계 설계에서 우선적인 문제일 뿐 아니라 조정 관리에 있어서도 중요한 의미를 갖는다. 제어루프의 한 부분으로서 조절기의 게인과 적분시간은 제어대상의 특성에 따라 달리 조정되어야 하고 특히 시간지연이 큰 시스템에 대한 조정영역은 크게 제한되며 그만큼 조정에 있어서의 어려움은 더 커진다 [1-4].

한편 주어진 제어대상에 대해 계통을 안

정영역에서 사용한다는 전제에서 보면 제어기의 조정 파라미터들은 일정 범위 이내로 제한된 조정대역을 갖게 된다. 제어기의 설계에 있어서도 조정파라미터가 불안정영역에서 동작하게 되는 조정범위를 불필요하게 넓게 부여하는 것은 바람직하지 못할 뿐 아니라 제어기의 조정관리에 나쁜 영향을 미친다. 만일 특정 제어대상에 대한 제어기의 설계에 있어서 이러한 조정 파라미터의 유효 조정범위가 계산으로 미리 정해질 수 있다면 보다 단순하고 경제적인 구조의 제어기 설계가 가능해질 것이며 제

여기의 유지관리에도 도움이 되는 외에 STC나 퍼지 제어의 설계 알고리즘에도 기준이 되는 유용한 데이터로서 그 결과를 활용할 수 있다^[5-8].

본 연구에서는 조정 파라미터의 범위가 제어대상의 특성 파라미터만으로 정해질 수 있을 것으로 유추하여 안정영역하에서 조정 파라미터가 가질 수 있는 최대값을 수식적인 과정을 통해 구해 보았다. 이를 위해 제어대상은 시간지연과 1차 지연요소의 결합으로 취급하였으며 또한 파라미터 공간에서의 안정한계 특성을 이용하여 조정값이 갖게 되는 유효범위에 대한 일반적 성질을 나타내었다.

2. 제어계의 구성

제어대상 $G(s)$ 와 제어기 $K(s)$ 가 직결 피드백으로 결합된 단일 루프 제어계를 가정하고 제어대상 $G(s)$ 를 시간지연과 1차 지연요소의 적으로 하면 식(1)과 같다.

$$G(s) = \frac{e^{-Ls}K_m}{1 + T_ms} \quad (1)$$

여기에서 L 은 시간지연, K_m 은 정상이득, T_m 은 시정수이다. 식(1)의 지수형태를 각속도 ω 에 의한 복소수 형태로 나타내면 식(2)가 된다.

$$G(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega) \quad (2)$$

단,

$$a(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T_m^2} (\cos \omega L - \omega T_m \sin \omega L)$$

$$b(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T_m^2} (-\omega T_m \cos \omega L - \sin \omega L)$$

이다. 제어기 $K(s)$ 는 조정파라미터로서 비례게인 K_p 와 적분시간 T_i 를 갖는 PI제

어의 경우 식(3)이 된다.

$$K(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \quad (3)$$

또한 $K(s)$ 를 $p_1 = K_p$, $p_2 = K_p/T_i$ 로 하고 p_1, p_2 에 의한 2항 클래스 제어기 형태로 나타내면 식(4)와 같아진다.

$$K(s) = K_1(s)p_1 + K_2(s)p_2 \quad p_1, p_2 \in R \quad (4)$$

여기에서 $K_1(s)$ 와 $K_2(s)$ 는 각각 1과 $1/s$ 이 된다. 식(4)를 복소수 형태로 나타내면 식(5)와 같다.

$$K(j\omega) = p_1 - j\frac{1}{\omega} p_2 \quad (5)$$

3. 제어계의 안정한계

제어계의 안정한계 조건은 특성다항식의 특성근이 s 평면상의 허수축에 위치하는 경우이며 루프전달함수의 주파수응답이 위상 지연 π 에서 게인이 1이 되는 상태로서 식(6)과 같다.

$$G(j\omega)K(j\omega) = e^{-j\pi} \quad \omega \in R \quad (6)$$

식(4)로부터 식(6)은 식(7)이 된다.

$$G(j\omega)[K_1(j\omega)p_1 + K_2(j\omega)p_2] = -1, \quad \omega \in R \quad (7)$$

식(7)을 실수부와 허수부에 의한 행렬로 표현하면 식(8)과 같다.

$$H\Theta p = -e \quad (8)$$

여기에서 p , e 는 식(9)를 나타내고 H 는 식(2)에 대한 행렬, Θ 는 식(5)의 행렬로서 식(10)과 같다.

$$p = (p_1 \ p_2)^T, \quad e = (1 \ 0)^T \quad (9)$$

$$H = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\omega} \end{pmatrix} \quad (10)$$

식(8)로부터 행렬 p 는 식(11)이 된다.

$$p = -\Theta^{-1}H^{-1}e \quad (11)$$

이로부터 구하고자 하는 안정한계에서의 파라미터 집합은 식(12)와 같다.

$$\begin{pmatrix} p_1(\omega) \\ p_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \omega L + \omega T_m \sin \omega L \\ \omega \sin \omega L + \omega^2 T_m \cos \omega L \end{pmatrix} \quad (12)$$

식(12)에서 p_1, p_2 는 식(13)의 관계를 갖는다.

$$p_2 = \frac{\partial p_1}{\partial L} \quad (13)$$

식(12)로부터 파라미터 K_p, T_i 에 의해 나타내면 식(14)가 된다.

$$\begin{pmatrix} K_p(\omega) \\ T_i(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \omega L + \omega T_m \sin \omega L \\ \frac{-\cos \omega L + \omega T_m \sin \omega L}{\omega(\sin \omega L + \omega T_m \cos \omega L)} \end{pmatrix} \quad (14)$$

4. 안정영역에서의 최대 계인

식(12)와 식(14)를 단일 항의 형태로 나타내면 식(15)와 식(16)이 된다.

$$\begin{pmatrix} p_1(\omega) \\ p_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+\omega^2 T_m^2} \cos[\omega L + \alpha(\omega)] \\ \omega \sqrt{1+\omega^2 T_m^2} \sin[\omega L + \alpha(\omega)] \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} K_p(\omega) \\ T_i(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+\omega^2 T_m^2} \cos[\omega L + \alpha(\omega)] \\ \frac{1}{\omega} \cot[\omega L + \alpha(\omega)] \end{pmatrix} \quad (16)$$

여기에서 위상각 α 는 식(17)을 나타낸다.

$$\alpha(\omega) = \tan^{-1} \omega T_m \quad (17)$$

식(15)에서 p_2 가 0일 때 제어계는 P제어로 동작된다. 이 때의 각속도를 ω_p 라고 하면 ω_p 는 식(12)의 p_2 식에서 구하거나 또는 식(18)의 관계를 만족하는 ω 의 크기가 된다.

$$\omega L + \tan^{-1} \omega T_m = \pi \quad (18)$$

한편 식(15)에서의 p_1 을 미분하면 식(19)가 된다.

$$\begin{aligned} p_1'(\omega) = & -T_m^2 \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2 T_m^2}} \cos[\omega L + \alpha(\omega)] \\ & + \sqrt{1+\omega^2 T_m^2} [L + \alpha'(\omega)] \sin[\omega L + \alpha(\omega)] \end{aligned} \quad (19)$$

각속도가 ω_p 일 때는 $\omega_p L + \alpha(\omega_p) = \pi$ 가 되고 이를 식(19)에 적용하면 식(20)의 결과가 된다.

$$p_1'(\omega_p) = T_m^2 \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2 T_m^2}} > 0 \quad (20)$$

따라서 식(15)와 같이 음의 정점에서 시작되는 코사인 함수 형태인 p_1 은 $0 < \omega < \omega_p$ 의 범위에서 아직 최초 양의 정점을 포함하지 않는다는 것이 식(20)으로 확인된다. 이로부터 $0 < \omega < \omega_p$ 구간에서 계인 p_1 은 단순증가 상태로 변화할 뿐이며 p_1

의 실제 조정값 p_{1a} 의 범위는 식(21)와 같다고 할 수 있다.

$$0 \leq p_{1a} \leq p_1(\omega_p) \quad (21)$$

식(21)에 의해 $p_1(\omega_p)$ 의 값은 P제어 및 PI제어에서 안정영역에서의 최대 계인 값이 된다는 것을 알 수 있으며 그 크기는 식(15)에 의해 식(22)과 같아진다.

$$p_1(\omega_p) = \sqrt{1 + \omega_p^2 T_m^2} \quad (22)$$

5. 안정영역에서의 적분시간 조정범위

$0 < \omega < \omega_p$ 의 범위에서 p_2 의 최소값은 0이다. p_2 가 최대가 되는 때의 각속도를 ω_m 라고 하면 p_2 의 실제 조정값 p_{2a} 의 범위는 식(23)과 같이 제한된다.

$$0 \leq p_{2a} \leq p_2(\omega_m) \quad (23)$$

한편, 적분시간은 $T_i = p_1/p_2$ 를 나타내므로 p_1 과 p_2 의 가용범위 관계가 함께 T_i 의 범위와 관련된다. p_1 의 조정범위를 나타내는 식(21)과 식(23)의 관계를 동시에 적용하면 식(23)에 대한 적분시간의 조정범위는 $0 \leq T_i \leq \infty$ 가 되어야 하고 따라서 적분시간 파라미터는 조정범위에 대한 제한의 의미가 없어지는 것으로 나타난다.

6. 수식결과에 대한 적용

수식결과에 대한 해석을 위하여 시정수 T_m 과 시간지연 L 을 각각 1.0m 및 0.5m으로 정하기로 한다. 식(12)의 관계를 각속도 ω 를 가로축으로 하여 나타내면 Fig.1과 같다. 또한 Fig.2는 동일한 조건에서 식(15)를 나타낸 것이다.

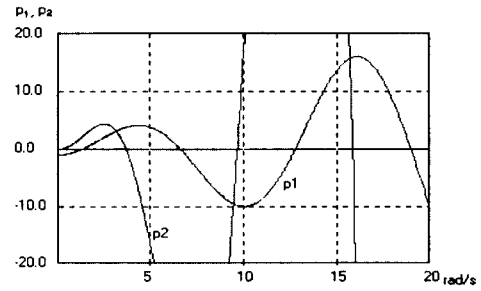


Fig.1 p_1 and p_2 variation to ω with L of 0.5m and T_m of 1.0m

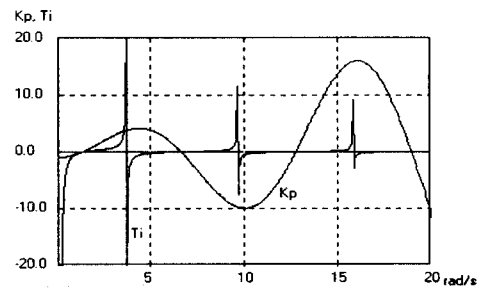


Fig.2 K_p and T_i variation to ω with L of 0.5m and T_m of 1.0m

식(12)의 결과를 파라미터 $p_1 - p_2$ 평면에서 나타내면 Fig.3과 같으며 마찬가지로 식(15)의 관계를 $T_i - K_p$ 평면에서 나타내면 Fig.4가 된다.

최대계인을 구하기 위한 ω_p 의 크기는 식(24)를 만족하는 각속도이고 그 값은 식(25)와 같다.

$$0.5\omega + \tan^{-1}\omega = \pi \quad (24)$$

$$\omega_p = 3.67 \text{ [rad/s]} \quad (25)$$

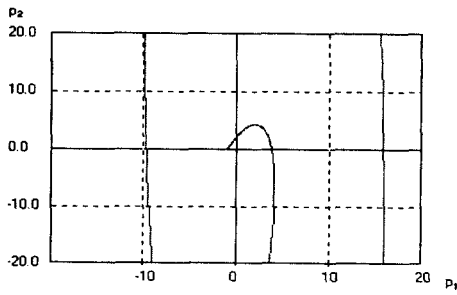


Fig.3 Stability limit curve on the $p_1 - p_2$ space with L of 0.5m and T_m of 1.0m

안정한계 조건에서의 K_p 최대값은 ω_p 를 식(22)에 대입한 식(26)의 크기가 된다.

$$\max(K_p) = 3.82 \quad (26)$$

식(26)의 값은 Fig.1에서 Fig.4까지의 도시적 결과에서 동일하게 확인되며 또한 적분시간 T_i 로 표현된 Fig.2와 Fig.4의 결과에서 적분시간은 게인과는 달리 유효조정 범위가 제한의 의미가 없다는 것을 그래프 형태에서 알 수 있다.

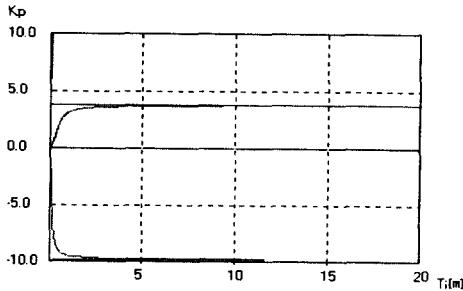


Fig.4 Stability limit curve on the $T_i - K_p$ space with L of 0.5m and T_m of 1.0m

7. 결론

제어대상을 L 과 T_m 에 의한 시간지연

및 1차 지연요소의 결합으로 모델링하여 단일 입출력의 직결 피드백 제어계를 대상으로 안정영역에서의 최대 게인 크기를 구하는 문제를 해석하였다. 이를 위해 먼저 안정한계에 놓이는 PI 조정 파라미터의 집합을 구한 후 집합의 관계식에서 I제어의 작용이 소멸되는 임계 각속도 ω_p 의 크기를 정하였고 이로부터 안정한계에서의 최대 게인 값을 나타내기 위한 일반식을 도출하였으며 해석의 과정을 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 안정한계 파라미터 집합의 실용적인 범위는 적분시간에 대응하는 집합 요소가 양이 될 때의 범위로 한정될 수 있으며 이 범위의 임계 각속도에 해당하는 ω_p 는 시간지연 L 과 시정수 T_m 에 의한 방정식으로 구해진다.
2. P, PI제어에서 유효한 게인 범위를 정하는 최대 게인값은 식 $\sqrt{1 + \omega_p^2 T_m^2}$ 의 크기가 된다.
3. P제어에서 안정한계에 해당하는 게인값은 PI제어에서 안정한계에 해당하는 게인값보다 항상 크다.
4. 파라미터의 유효 조정 범위와 관련하여 적분시간은 게인과는 달리 조정범위가 제한될 필요가 없다.

참고문헌

- [1] Akira Kojima, Kenko Uchida and Etsujiro Shimemura, "Robust Stabilization Problem for a System with Delays in Control", SICE Trans.(Japanese), Vol.29, No.3, p319-325, 1993
- [2] Masami Saeki and Daii Hirayama, "Parameter Space Design Method of PID Controller for Robust Sensitivity Minimization Problem", SICE Trans. (Japanese), Vol 32, No.12, p1612-1619, 1996
- [3]Kenji Sugimoto and Yutaka Yamamoto,

- "LQ Optimal Control of Retarded Systems", SICE Trans.(Japanese), Vol.23, No.6, p590-596, 1987
- [4] Yyou Kondo, Shinji Hara and Takuji Kaneko, "Parameter Space Design for H_{∞} Control", SICE Trans.(Japanese), Vol 27, No.6, p714-716, 1990
- [5] Ryuichi Kuwata, "An Improved Ultimate Sensitivity Method and PID; I-PD Control Characteristics", SICE Trans.(Japanese), Vol 23, No.3, p232-239, 1987
- [6] Hidefumi Taguchi, Masateru Doi and Mitsuhiro Araki, "Optimal Parameters of Two-Degrees of Freedom PID Control Systems", SICE Trans. (Japanese), Vol23, No.9, p889-895, 1987
- [7] P.J.Gawthrop, "Self-Tuning PID Controllers - Algorithms and Implementation", IEEE Trans. Automatic Control, AC-31-3, p201-209, 1986
- [8] T.Yamamoto, S.Omatu and H.Ishihara, "A Construction of Self-Tuning PID Control Algorithm and Its Applications", Proceedings of SICE '89, ES15-1, p1143-1146, 1989