

## DNS에 의한 원주후류에 대한 유동해석

강신정\*, 店橋 護\*\*, 宮内 敏雄\*\*, 김유택\*\*\*, 이영호\*\*\*\*

### The Flow Analysis of Past Flow a Circular Cylinder By Direct Numerical Simulation

(Shin-Jeong KANG, Mamoru TANAHASHI, Toshio MIYAUCHI, Yu-Taek KIM, Young-ho LEE)

#### Abstract

Laminar two-dimensional time-dependent flow past a circular cylinder is numerically investigated using direct numerical simulation for the low Reynolds number ( $Re=164\sim 280$ ). The higher-order finite difference scheme is employed for the spatial distributions along with the second order Adams-Bashforth and the first order backward-Euler time integration. The convection term is applied by the 7th order upwind scheme and the pressure and viscosity terms are applied by the 4th order central difference. The grid system makes use of the regular grid system and it is generated by an elliptic equation. The calculated results of drag coefficients, lift coefficients, pressure distributions, and vorticity contours and other information are compared with experimental and numerical ones. These results obtained by the present DNS show good agreement with the previous studies.

**Key words** : Circular Cylinder(원주), Direct Numerical Simulation(직접수치법), Finite Difference Method(유한차분법), Karmann Vortex(카르만 와)

#### 1. 서론

원주후방의 점성류는 2차원 천이  $Re$ 수 40을 넘으면 2차원적 주기성을 갖는 흐름으로 이동하고, 특히  $Re$ 수 150부터 220정도의 3차원 천이  $Re$ 수를 지나면 3차원성이 강한 유동으로 이동한다.<sup>(1)(2)(3)</sup> 원주 후방의 와의 세기를 확실히 예측하는 것은 경사를 이루는 연립 케이블의 wake gallopping, 다리의 교각 등에 관련하여 공학적으로 상당히 흥미 있고 중요한 문제이다. 이와 같은 수치계산을 행하는 경우, 후방영역에서의 충분한 격자 분해능력의 확보, 수치점성에 따른 해의 감소의 회피, 계산영역내의 유동에 영향을 주지 않는 유출 경계조건의

채택, 원주의 전방 및 상·하방의 길이의 확보가 중요하다. 원주 후방영역에서 격자 분해능력이 불충분한 경우 Strouhal 수와 항력계수 등에 영향을 미치며<sup>(1)</sup>, 비선형항에 대하여 3차정도 풍상차분을 적용할 경우 수치점성의 강약에 따라 원주 후방의 와도의 최대·최소값의 차이가 발생한다<sup>(4)</sup>고 보고 되어 있다. 유출 경계조건에 있어서 충분히 물리적인 상태를 만족하지 못하는 경우 수치상의 오차를 발생하며<sup>(5)</sup>, 원주의 전방 및 상·하방의 길이를 충분히 확보하지 못하는 경우는 양력 및 항력계수 등에 영향을 미친다고 보고 되어있다.<sup>(1)</sup> 이와 같은 요구에 따라서, 본 연구에서는 비선형 항에 대하여 7차정도 풍상차분법을 이용하고, 유출 경계조건은 Miyautchi등<sup>(5)</sup>에 의하여 제안된 압력의 수송방정식을 이용하여 적용하였다. 특히, 원주 후방의 격자 분해능을 충분히 확보하기 위하여 2 block법에 의하여 생성된 격자를 이용하였다. 2차원 원주주위의 유동은 DNS를 이용하여,  $Re$ 수 164, 200, 220, 250,

---

\* 한국해양대 대학원  
 \*\* Tokyo Institute of Technology Mechano-Aerospace Engineering  
 \*\*\* 한국해양대 기관시스템 공학부  
 \*\*\*\* 한국해양대 기계·정보공학부

280에 대하여 행하여 졌다.

한편, 본 연구에서는 3차원 천이 Re수의 영역에 대하여 양력 및 항력계수, 주파수 분석, 원주표면의 압력분포, 와도 등고선 등을 이용하여 2차원적 유동 특성을 분석하고, DNS의 공학적 응용에 대한 가능성 확보를 목적으로 한다.

## 2 수치해석

### 2.1 지배방정식

본 연구에서는 2차원 원주주위의 유동장을 대상으로 하여 직접수치계산(Direct Numerical Simulation : DNS)을 행하였다. 유동은 비압축성류로 가정하고, 기초방정식은 비정상 2차원 Navier-Stokes 방정식 및 연속의 식이다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

여기서,  $u, p, Re$ 는 각각 속도, 압력, Re수이고, 각 변수는 원주의 반경  $R$ 과 주류속도  $U$ 를 이용하여 무차원화 하였다. 본 연구에서는 격자를 원주주위에 효율적으로 배치하기 위하여 곡선좌표계를 이용하고 있으므로 식(2.1),(2.2)은 식(2.3),(2.4)에 의하여 일반곡선좌표에 관한 식으로 변환하여 적용하였다.

$$\xi = \xi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \quad (2.3)$$

$$\eta = \eta[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \quad (2.4)$$

### 2.2 고차정도 차분법<sup>(6)</sup>

이산화를 위한 계산격자는 등간폭의 Regular 격자계를 사용하였다. 공간의 이산화에 대하여는 대류항에 7차정도 풍상차분을, 대류항 이외의 항에 4차정도 중심차분을 이용하였다. 그리고 이와 같은 차분형을 적용할 수 없는 경계부분에서는 6차정도 및 4차정도의 편측차분을 이용하였다.

4차정도 중심차분 : 1계 미분

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{-(f_{i+2}-f_{i-2})+8(f_{i+1}-f_{i-1})}{12\Delta x} \quad (2.5)$$

4차정도 중심차분 : 2계 미분

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{-(f_{i+2}+f_{i-2})+16(f_{i+1}+f_{i-1})-30f_i}{12\Delta x^2} \quad (2.6)$$

7차정도 풍상차분식

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial f}{\partial x}\right)_i &= \frac{u_j}{840\Delta x} \{-3(f_{j+4}-f_{j-4})+32(f_{j+3} \\ &-f_{j-3})-168(f_{j+2}-f_{j-2})+672(f_{j+1}-f_{j-1})\} \\ &+ \alpha \frac{|u_j|}{840\Delta x} \{3(f_{j+4}+f_{j-4})-24(f_{j+3}+f_{j-3}) \\ &+84(f_{j+2}+f_{j-2})-168(f_{j+1}+f_{j-1})+210f_j\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

6차정도 편측차분 : 1계 미분 (벽면경계점 :  $i=1$ )

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i &= \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{49}{20}f_i+6f_{i+1}-\frac{15}{2}f_{i+2} \right. \\ &\left. +\frac{20}{3}f_{i+3}-\frac{15}{4}f_{i+4}+\frac{6}{5}f_{i+5}-\frac{1}{6}f_{i+6}\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

4차정도 편측차분 : 1계 미분 (벽면경계점 :  $i=1$ )

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{-25f_i+48f_{i+1}-36f_{i+2}+16f_{i+3}-3f_{i+4}}{12\Delta x} \quad (2.9)$$

4차정도 편측차분 : 2계 미분 (벽면경계점 :  $i=1$ )

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i &= \frac{45f_i-154f_{i+1}+214f_{i+2} \\ &-156f_{i+3}+61f_{i+4}-10f_{i+5}}{12\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

### 2.3 시간적분법

본 연구에서는 기초방정식을 시간 발전시키는 기법으로서 FSM (Fractional Step Method)에 의한 2 step시간분할법을 이용하였다. 대류항 및 점성항에 대하여는 다음과 같은 2차정도를 갖는 Adams-Bashforth법을 이용하였다.

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(3S^n - S^{n-1}) \quad (2.11)$$

여기서  $S$ 는 식(2.6)과 같이 표현된다.

$$S^n = -(u^n \cdot \nabla)u^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 u^n \quad (2.12)$$

그리고, 압력항에 관하여 다음과 같은 1차정도를 갖는 Backward-Euler법을 사용하여 차분화를 행

하였다.

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} \quad (2.13)$$

식(2.13)의 양변에 발산(divergence)을 취하고 연속의 방정식을 이용하면 다음과 같은 압력 Poisson 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla u^*}{\Delta t} \quad (2.14)$$

식(2.14)의 Poisson 방정식은 행렬로 표현되며, 본 연구에서는 전처리에 따른 불완전 LU분해를 이용한 Bi-CGSTAB<sup>(7)</sup>법에 의하여 해석하였다.

### 2.4 경계조건

경계조건은 원주의 전방과 상·하부는 균일유입, free-slip 조건을 각각 부여하고, 원주의 표면은 no-slip 조건을 부여하였다. 하부는 충분히 물리적 상태와 같게 하기 위하여 Miyauchi 등<sup>(5)</sup>에 의하여 제안된 압력의 근사적인 수송방정식을 사용하였다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_c \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U_c \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2Re} \omega^2 \quad (2.16)$$

여기서  $U_c$ 는 속도 및 압력장의 대류수송속도를 나타내며, 본 연구에서는  $U_c$ 를 0.85U로 한다.

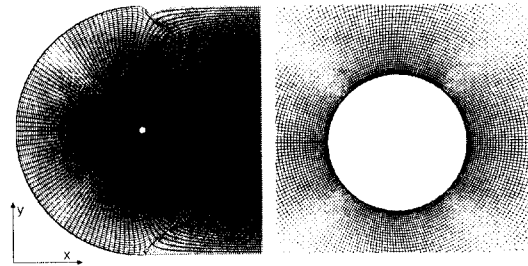
### 2.5 격자생성

격자는 해가 크게 변화하는 영역에서는 집중시키고, 해의 변화가 적은 영역에서는 성기게 배치하기 위하여 본 연구에서는 타원형 편미분방정식에 따른 수치적인 격자생성법을 이용하였다. 타원형 생성계는 다음 식에서 표시된 Poisson 방정식을 이용한다.

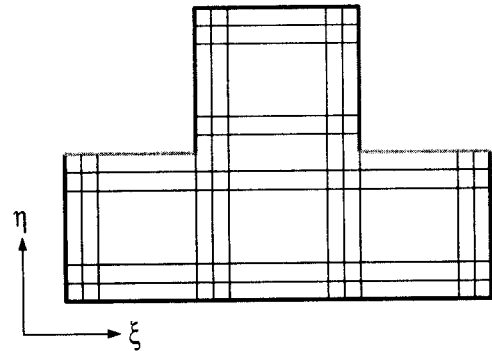
$$\nabla^2 \xi = P \quad (2.17)$$

$$\nabla^2 \eta = Q \quad (2.18)$$

여기서, P, Q는 제어함수라고 하고, 좌표곡선의 간폭과 방향을 제어하기 위하여 사용된다. 본 계산에



(a) Physics Space



(b) Calculation Space

Fig.1 Grid Generation

사용된 격자는 다음과 같은 식에 의하여 간단하게 생성하였다.

$$g_{22}(r_{\xi\xi} + Pr_{\xi}) + g_{11}(r_{\eta\eta} + Qr_{\eta}) - 2g_{12}r_{\xi\eta} = 0 \quad (2.19)$$

여기서,  $P, Q, g_{11}, g_{22}, g_{12}$ 는

$$g_{11} = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (2.20)$$

$$g_{12} = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \quad (2.21)$$

$$g_{22} = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (2.22)$$

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^N a_i \sin(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|) - \sum_{i=1}^M b_i \sin(\xi - \xi_i) \exp[-d_i \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}] \quad (2.23)$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^N a_i \sin(\eta - \eta_i) \exp(-c_i |\eta - \eta_i|) - \sum_{i=1}^M b_i \sin(\eta - \eta_i) \exp[-d_i \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}] \quad (2.24)$$

이며,  $a_i, b_i, c_i, d_i$ 는 조밀과 성긴 정도를 조절하는 계수로 사용된다.

Fig.1(a)는 식(2-19)을 이용하여 생성된 물리 공간의 격자를 나타내며, Fig.1(b)는 계산공간의 격자

를 나타내고 있다. 계산에 사용된 총 격자점 수는 51480개로 하였고, 최소격자의 크기는 1/500으로 하였다.

### 3. 결과 및 고찰

원주주위의 초기 유동장은 다음 식의 원주주위의 2차원 포텐셜 유동을 이용하였다.

$$u = 1 - r^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.1)$$

$$v = \frac{-2r^2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.2)$$

여기서  $r$ 은 원주의 반경이다.

계산은 총 5개의 Re수에 대하여 행하였으며 시간간격은 발산 및 시간오차를 충분히 고려하여 0.004로 하여 무차원 시간 200까지 계산을 행하였다. 계산시간은 펜티엄 4-1.3GHz에서 36시간 정도 소요되었다.

#### 3.1 양력 및 항력계수

계산시작부터 무차원시간 200까지의 항력계수 ( $C_D$ ), 양력계수 ( $C_L$ )의 시간에 따른 변화를 fig. 2에 나타내고 있다. 여기서 항력계수와 양력계수는 이하의 식에 따라 계산한다.

$$C_{Dp} = \int_0^{2\pi} rP_w \cos \theta d\theta \quad (3.3)$$

$$C_{Df} = \int_0^{2\pi} rw \sin \theta d\theta \quad (3.4)$$

$$C_{Lp} = \int_0^{2\pi} rP_w \sin \theta d\theta \quad (3.5)$$

$$C_{Lf} = \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} rw \cos \theta d\theta \quad (3.6)$$

$$C_D = C_{Dp} + C_{Df}, \quad C_L = C_{Lp} + C_{Lf} \quad (3.7)$$

여기서  $C_{Df}$ ,  $C_{Dp}$ ,  $C_{Lf}$ ,  $C_{Lp}$ 는 각각 마찰에 의한 항력계수, 압력에 의한 항력계수, 마찰에 의한 양력계수, 압력에 의한 양력계수를 의미한다. Fig.2는 양력 및 항력계수의 시간 따른 변화의 결과를 나타내고 있다. 계산초기에 있어서 원주표면의 와는 원주표면으로부터 이탈하지 않고 카르만 와는 형성되지 않는다. 이 때문에 항력계수는 주기적인 변동을 하지 않는다. 그러나, 원주 측방의 와영역

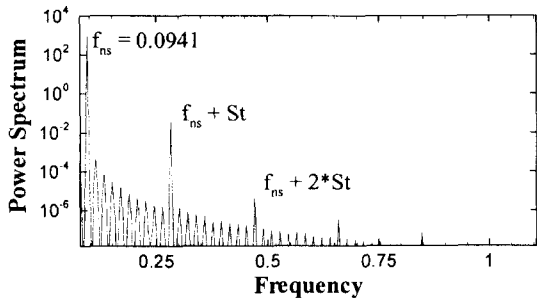
은 서로 다르게 와도의 증감을 반복하기 때문에 양력계수는 계산초기부터 진동을 시작한다. 항력계수는 카르만 와가 형성됨에 따라 주기적인 진동을 시작한다. 또한, 유동장이 충분히 발달되었을 때, 항력계수의 주기는 양력계수의 약 1/2주기임을 알 수 있고, Re수의 증가에 따라서 양·항력계수가 증가함을 알 수 있다.

Fig.3은 Strouhal number, 평균 항력계수, 양력계수의 최대 진폭의 결과를 나타낸다. Re수의 증가와 함께 증가하지만, 항력계수는 그 증가율이 다른 것에 비하여 적음을 알 수 있다. 이 결과는 과거 연구의 결과<sup>(1)(2)(3)</sup>와 잘 일치하고 있으며, 3차원 수치해석 및 실험결과<sup>(1)(3)</sup>에 비하여 전체적으로 크게 나타났다. Beaudan 등<sup>(4)</sup>은 Re수 3900에 대하여 2차원과 3차원 수치해석의 비교를 행하였고 3차원의 경우는 2차원에 비하여 평균항력계수 및 양력계수의 최대값이 감소한다고 하였다.

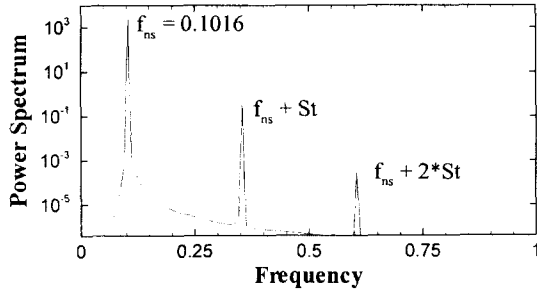
Fig.4는 식 (3.3)-(3.7)에 해당하는 압력 및 마찰력에 의한 평균 항력계수 및 양력계수의 최대 진폭의 결과를 나타내고 있다. 사각형 기호는 압력에 의한 항력 및 양력계수의 결과이고 원형 기호는 마찰력에 의한 항력 및 양력계수의 결과를 나타낸다. Re수의 증가에 따른 양력 및 항력계수의 증가는 마찰력보다는 압력에 의한 영향을 많이 받고 있음을 알 수 있다.

한편, 양력계수의 주기와 원주표면에서의 와방출 주기와와의 관계를 파악하기 위하여 시간에 따른 와방출과 양력계수와의 비교가 필요하다. 이와 같은 필요에 의하여 시간에 따른 양력계수와 그때의 와방출 패턴을 Fig.5에 나타내었다. Fig.5는 시간에 따른 와도 등고선과 그때의 양력계수를 나타내고 있으며, 실선은 +값, 점선은 -값을 의미하고, 시계방향으로의 회전 강도는 -이고, 그 반대방향은 +를 의미하고 있다. 양력계수가 증가함에 따라서 -값의 와도 등고선이 원주 바로 뒤로 이동하고 와가 강하게 빨려 들고 있음을 알 수 있다. 반대로 양력계수가 감소함에 따라서는 -값의 와도 등고선이 원주로부터 조금씩 떨어져 나감을 파악할 수 있다. 또한 미소 시간의 변화에 따른 와방출 주기와 양력계수의 주기를 분석한 결과 두 주기가 일치함을 알 수 있었다.

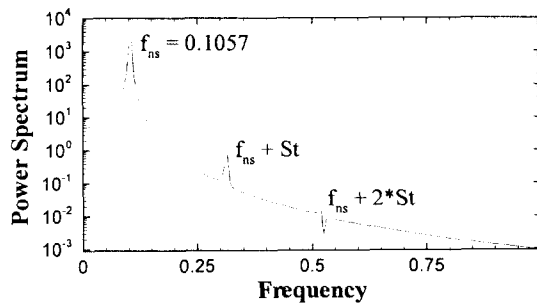
Fig.6는 Fig.2에 나타낸 양력계수의 시간에 따른 변화를 FFT분석한 결과이다. 2차원 원주주위의 층류 유동에 있어서 와방출의 주기는 Re수가 증가함에 따라서 같이 증가하고 있음을 알 수 있다. 또한,



(a) Re=164



(b) Re=220



(c) Re=280

Fig. 6 Power spectrum of lift coefficient

FFT분석을 통하여 구한 와방출 주기와 다음의 식을 이용하면 Strouhal 수를 구할 수 있으며, 이에 대한 결과는 Fig.3 (a)에 나타내고 있다.

$$St = \frac{f_{ns} D}{U} \quad (3.8)$$

여기서  $f_{ns}$ 는 와방출 주기, U와 D는 각각 대표속도, 원주의 직경을 의미한다.

### 3.2 유동구조

본 연구에서는 2차원 원주주위의 유동구조를 파



(a) Re=164, T=200



(b) Re=200, T=200



(c) Re=220, T=200



(d) Re=250, T=200



(e) Re=280, T=200

Fig. 7 Vorticity Contour

악하기 위하여 와도 등고선을 이용하였다.

Fig.7(a)-(e)는 Re수에 따른 와도 등고선을 나타내고 있으며, 모두 동일한 무차원 시간에 대한 결과이다. 그리고 와도 등고선의 범위는 -10에서 10까지이며, 실선은 +, 점선은 -값을 나타낸다. 카르만 와가 성립하고 있으며, Re수가 증가함에 따라서 와도는 증대하고 와의 크기는 컴팩트하게 되며, 원주근방에서의 박리 전단층이 얇아지는 것을 알 수 있다. 특히 원주 후방에 있어서 박리전단층의 말아 끌어당기는 힘이 강하게 되고, 와의 생성영역이 짧게 되는 것을 알 수 있다.

### 4. 결론

2차원 원주주위의 유동해석을 DNS에 의하여 Re 수 164에서 280사이에서 행하였다. Navier-Stokes 방정식은 4차정도 중심차분법과 7차정도 풍상차분

법을 이용하여 이산화 하였고, 시간발전은 Adams-Bashforth법과 Backward-Euler법을 이용한 2단계 시간적분법을 적용하였다.

항력 및 양력계수는 시간에 따른 변화, 평균항력계수 등을 이용하여 Re수에 따른 영향을 분석하였다. 그리고, 와방출의 주기는 양력계수의 FFT분석을 이용하여 제시되었으며, 원주주위의 유동구조는 와도 등고선을 이용하여 분석되었다.

한편, 본 연구에서는 2차원 DNS의 수치해석으로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1). 저 Re수에 대한 2차원 원주의 항력과 양력계수는 Re수의 증가와 함께 증가한다.
- (2). 항력계수는 카르만 와의 형성에 의하여 주기성을 갖게 되며, 항력계수의 주기는 양력계수의 약 1/2주기를 갖는다.
- (3). 양력계수와 와방출의 주기는 일치하며, 와방출의 주기 및 Strouhal 수는 Re수의 증가와 함께 증가한다.
- (4). Re수가 증가하면 원주후방에 있어서 박리전단층의 말아 끌어당기는 힘이 강하게 되며, 와의 생성영역이 좁아진다.
- (5). Re수가 150에서 300사이에는 3차원적 변천영역으로 강한 3차원적 영향을 갖는다. 따라서, 향후에는 본 연구에 대한 3차원 직접수치해석을 통하여 3차원적 변천영역의 특성에 대한 정확한 검토가 요구된다.

참고문헌

1). H.Q. Zhang, R. Noack "On the transition of the cylinder wake", Phys Fluid, vol.38, 1995, pp.779-7931.

2). H. Persillon, M. Braza, "Physical analysis of the transition to trubulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier-Stokes simulation", J. Fluid Mech., vol.365, 1998, pp.23-88

3). C.H.K Williamson, "Measurements of base pressure in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers", Z. Flugwiss. Weltraumforsch. vol.206, 1990, pp.579

4). P.Beaudan, P. Moin, "Numerical experiments on the flow past a circular cylinder at subcritical Reynolds number", Fluid Mech., vol.20, 1994, pp.359-391

5). 宮内 敏雄, 店橋 護, 鈴木 基啓, "DNSのため流入流出教会条件", 日本機械学会論文集(B編), 60卷571号, 1994, pp.813

6). B. Fornberg, "Generation of finite difference formulas on Arbitrarily spaced grids", Mathematics of Comp. 51, 19886, pp.99-706

7). H.A. van der Vorst, "Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems" SIAMJ. Sci. Stat. Comput, vol.13-2, 1992, pp.631-644

8). Joe F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C.Waye Mastin, "Numerical Grid Generation"

9). S. Taneda, "Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low Reynolds numbers", J, phys.Soc. Jap11, 1956, pp.302

10).D. Barkley, R. D. Henderson, " Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder", J. Fluid Mech., vol.322, 1996, pp.215-241

11).宮内 敏雄, 店橋 護, "円柱周り流れのDNSにおける流出境界条件", 第9回数值流体力学シンポジウム,B4-3, 1995, pp.163