$HCN(n,n)$의 노드 중복 없는 병렬 경로 알고리즘

이형옥° 조정호 정희창°
°한국전산원 국가정보화센터
leeok@nca.or.kr
광주대학교 컴퓨터전자통신공학부
chcho@hosim.kwangju.ac.kr

Analysis the Node Disjoint Parallel Path Algorithm of $HCN(n,n)$

Lee Hyeong-Ok° Cho Chung-Ho Jung Hee-Chang°
°National Computerization Agency
School of Computer, Electronics and Communication Engineering Kwangju University

요 약

본 논문에서는 하이퍼큐브보다 망 비용이 개선된 상호연결망 $HCN(n,n)$의 임의의 두 노드간에 노드중복하지 않는 $n+1$개의 병렬경로를 구성하는 방법을 제시하고, 그 결과를 통하여 $HCN(n,n)$의 고장지름이 $dia(HCN(n,n))+4$ 이하임을 보인다. 이러한 병렬경로는 노드간에 메시지를 전송하는 시간을 줄일 수 있으며, $HCN(n,n)$의 노드 몇 개가 고장이 발생해도 통신지연시간이 발생하지 않음을 의미한다.

1. 서 론

상호 연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프로 표현할 수 있다. 지금까지 제안된 상호연결망을 노드 개수를 기준으로 분류하면 $k \times n$으로 표현되는 메쉬 부류, 2^n으로 표현되는 하이퍼큐브(hypercube) 부류, $n!$로 표현되는 스타(star) 그래프 부류가 있다. 상호 연결망을 평가하는 척도로는 분지수, 연결도, 대칭성, 지름, 망비용, 방송, 임베딩 등이 있다[7,8].

n-차원 하이퍼큐브 Q_n는 2^n개의 노드와 $n2^{n-1}$개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n-비트 이진수로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 정확히 1비트만 다를 때 그들 사이에 에지가 존재한다. n-차원 하이퍼큐브 Q_n는 분지수와 지름이 각각 n을 가지면서 망비용이 n^2을 갖는다[2,9]. 이러한 하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭성을 갖고, 간단한 라우팅 알고리즘, 최대 고장 허용도 및 재귀적 구조를 갖지만, 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 증가하는 단점이 있다. 이러한 단점을 개선하고자 하이퍼큐브의 지름을 1/2로 개선한 Folded-하이퍼큐브가 제안되었다.

또한, 하이퍼큐브와 Folded-하이퍼큐브의 장점을 가지면서 망비용을 개선한 상호 연결망으로 Hierarchical Folded-hypercube Network $HFN(n,n)$과 Hierarchical Cubic Network $HCN(n,n)$이 제안되었다[3,5,12].

<표> 상호연결망의 망비용 비교

	노드수	분지수	지 름	망 비용
하이퍼큐브 Q_{2n}	2^{2n}	$2n$	$2n$	$4n^2$
Folded-하이퍼큐브	2^{2n}	$2n+1$	n	$2n^2+n$
$HCN(n,n)$	2^{2n}	$n+1$	$n+\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor+1$	$\cong 1.3n^2$
$HFN(n,n)$	2^{2n}	$n+2$	$2\times\lceil \frac{n}{2} \rceil+1$	$\cong n^2+3n$

상호 연결망에서 임의의 두 노드 사이에 노드 중복 없는 경로가 여러 개 존재하면, 두 노드 사이에 많은 양의 데이터를 동시에 전송하여 속도를 증가시킬 수 있을 뿐만 아니라, 상호 연결망이 분리되지 않을 만큼의 노드가 고장이 발생했을 때 대체 경로를 구성할 수 있어서 안정적이다.

본 논문에서는 하이퍼큐브보다 망비용이 개선된 $HCN(n,n)$에서 노드 중복하지 않는 $n+1$개의 병렬경로를 구성하는 방법을 제안하고, 그 결과를 이용하여 $HCN(n,n)$의 고장지름을 분석하였다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 관련연구에 대하여 논하고 3장에서는 $HCN(n,n)$의 병렬경로를 구성하는 방법 및 고장지름을 분석하고, 마지막으로 결론을 맺도록 한다.

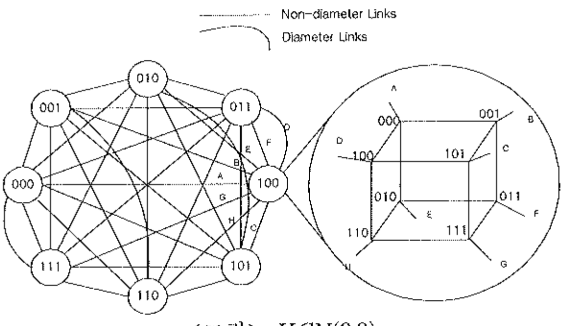
2. 관련연구

하이퍼큐브 연결망은 노드 및 에지 대칭이고 단순한 재귀적 구조를 가지고 있어서 각종 응용 분야에서 요구하는 통신망 구조를 쉽게 제공할 수 있는 장점이 있어 기존의 연구용 및 상용 시스템에 널리 사용되고 있다[10].

n-차원 하이퍼큐브 Q_n는 2^n 개의 노드와 $n2^{n-1}$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n-비트 이진수로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 정확히 1 비트만 다를 때 그들 사이에 에지가 있다[6,10].

하이퍼큐브의 단점은 분지수에 비해 지름과 노드간의 평균 거리가 짧지 않다는 것이다. 이것은 하이퍼큐브가 에지를 효율적으로 사용하지 못함을 의미한다. 이러한 문제를 극복하기 위한 연결망으로 Folded-하이퍼큐브[4], $HCN(n,n)$[5,12], $HFN(n,n)$[3] 등이 제안되었다.

$HCN(n,n)$은 n-차원 하이퍼큐브 Q_n를 기본 모듈로 사용한다. $HCN(n,n)$은 2^{2n}개의 노드들을 포함하고 $(n+1)2^{2n-1}$개의 에지들을 포함하며, 분지수는 $n+1$이다. $HCN(n,n)$ 각 노드는 $HCN(I,J)$와 같이 두 개의 주소로 구성이 된다. I는 기본 모듈을 인식하고, J는 기본 모듈 내의 노드를 인식한다. 기본 모듈 안의 에지들은 내부 에지라고 말한다. 두 개의 기본 모듈 사이의 에지들은 외부 에지(external link)라고 한다. 이 외부 에지들은 diameter link들과 non-diameter link들로 나뉜다. diameter link는 조건 $0 \le I \le (2^n-1)$와 $0 \le J \le (2^n-1)$을 만족하는 노드 $HCN(I,I)$와 $HCN(J,J)$ 사이의 외부 에지를 말하는데 I와 J는 서로 보수관계이다. diameter link가 아닌 외부 에지는 $HCN(I,J)$와 $HCN(J,I)$ 사이의 외부 에지로 non-diameter link로 불리운다. $m<n$이고 하이퍼큐브 2^m 개가 있을 때 $HCN(m,n)$과 같은 불완전한 HCN을 가질 수도 있다. 본 논문에서는 정규연결망인 HCN만을 말하겠다.



<그림> $HCN(3,3)$

3. 노드 중복 없는 병렬경로

3.1 병렬경로

상호 연결망에서 임의의 두 노드 사이에 노드 중복 없는 경로가 여러 개 존재하면, 두 노드 사이에 많은 양의 데이터를 동시에 전송하여 속도를 증가시킬 수 있을 뿐만 아니라 상호 연결망에서 노드에 고장이 발생해도 다른 대체 경로를 구성할 수 있는 장점이 있다.

정리 1 $HCN(n,n)$에 있는 임의의 두 노드 S와 D 사이에는 경로길이가 $dia(HCN(n,n))+4$ 이하인 노드 중복 없는 경로가 $n+1$개 존재한다($n \ge 2$).

증명 $HCN(n,n)$의 임의의 노드 S와 D 사이에 $n+1$개의 노드중복하지 않는 경로를 구성한다. 증명은 두 노드 S와 D가 위치하는 경우로 나누어 보인다. 본 증명에서는 편의상 $HCN(n,n)$의 임의의 노드 S를 포함하는 기본모듈을 $Q_n(S)$이라 하고, 노드 S와 내부에지에 의해 인접한 노드는 n개 노드를 $S_1, S_2, \ldots, S_n$이라 하고, 외부에지에 의해 인접한 노드를 S'이라 하자.

첫째, 노드 S와 D가 동일한 기본모듈 $Q_n(S)$에 위치한 경우

기본모듈 $Q_n(S)$의 임의의 노드 S와 D 각각에서 내부에지에 의해 인접한 노드는 n개이고, 이들 노드는 $S_1, S_2, \ldots, S_n$과 $D_1, D_2, \ldots, D_n$ 이고, 외부에지에 의해 인접한 노드는 각각 S'과 D'이다. 노드 S와 D가 포함된 기본모듈 $Q_n(S)$은 n-차원 하이퍼큐브 Q_n이므로, n-차원 하이퍼큐브 Q_n의 노드중복하지 않는 n개 병렬경로와 고장지름이 $n+1$임은 잘 알려져 있다[7].

나머지 한 개의 경로는 노드 S와 D에서 외부에지에 의해 인접한 노드 S'와 D'를 경유하는 경로를 구성할 수 있다. 노드 S와 D에서 외부에지에 의해 인접한 노드 S'와 D'는 서로 다른 기본모듈이고, 노드 S'에서 D'까지 경로길이는 $HCN(n,n)$의 지름 즉 $n+\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor+1$임을 알 수 있다. 따라서 노드 S에서 D까지 외부에지에 의해 인접한 노드 S'와 D'를 경유한 경로길이는 $n+\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor+3$ 이다.

둘째, 노드 S와 D가 서로 다른 기본모듈에 위치한 경우

노드 S와 D에 내부에지에 의해 인접한 노드 $S_1, S_2, \ldots, S_n$과 $D_1, D_2, \ldots, D_n$과 외부에지에 의해 인접한 각각의 노드 즉, $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n$과 $D'_1, D'_2, \ldots, D'_n$는 $HCN(n,n)$의 기본성질에 의해 서로다른 기본모듈 즉, $Q_n(S'_i) \ne Q_n(D'_i)$이다($1 \le i \le n$). 기본모듈 $Q_n(S'_i)$의 임의의 노드 S'_i에서 기본모듈 $Q_n(D'_i)$의 임의의 노드 D'_i까지 경로길이는 $HCN(n,n)$의 지름 $n+\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor+1$이다. 또한, 기본모듈 $Q_n(S'_j)$의 임의의 노드 S'_j에서 기본모듈 $Q_n(D'_j)$의 임의의 노드 D'_j까지 경로상의 노드와 기본모듈 $Q_n(S'_i)$의 임의의 노드 S'_i에서 기본모듈 $Q_n(D'_i)$의 임의의 노드 D'_i까지 경로상의 노드는 중복되지 않음을 쉽게 알 수 있다($1 \le i \ne j \le n$). 따라서 노드 S와 D에 인접한 노드 S_i와 D_i에서 외부에지에 의해 인접한 노드 S'_i와 D'_i를 경

유하는 n개의 경로길이는 $n+\lfloor\frac{n+1}{3}\rfloor+5$이고, 각 경로상의 노드들은 서로 중복하지 않음을 알 수 있다.

나머지 한 개의 경로는 노드 S와 D에서 외부에지에 의해 인접한 노드 S'와 D'를 경유하는 경로를 구성할 수 있다. 노드 S와 D에서 외부에지에 의해 인접한 노드 S'와 D'는 서로 다른 기본모듈이고, 노드 S'에서 D'까지 경로길이는 $HCN(n,n)$의 지름 즉, $n+\lfloor\frac{n+1}{3}\rfloor+1$임을 알 수 있으므로, 노드 S에서 D까지 외부에지에 의해 인접한 노드 S'와 D'를 경유한 경로길이는 $n+\lfloor\frac{n+1}{3}\rfloor+3$ 이다.

그러므로 $HCN(n,n)$의 임의의 노드 S와 D 사이에 $n+1$개의 노드중복하지 않는 경로길이는 최대 $n+\lfloor\frac{n+1}{3}\rfloor+5$이다. □

3.2 고장지름

연결망 G의 고장 지름이란 G가 나누어지지 않는 한도 내에서 노드가 고장이 발생했을 때 즉, 고장 노드수가 분지수 미만일 때의 최대 지름을 말한다. 연결망 G가 나누어지지 않을 만큼의 노드가 고장이라면 노드 연결도 미만의 노드가 고장임을 의미하고, 연결망 G의 고장 지름이 G의 지름과 비슷하다는 것은 G의 노드 몇 개가 고장이 발생해도 통신 지연 시간이 크게 늘어나지 않음을 의미한다. 연결망 G의 고장 지름이 G의 지름 + 상수일 때 G를 strongly resilient하다고 한다[1].

따름정리 2 $HCN(n,n)$의 고장지름(fault diameter)는 $dia(HCN(n,n))+4$ 이하이다($n\geq 2$).

증명 고장지름은 연결망 G에서 노드연결도 미만의 노드가 고장 발생시의 연결망 G의 지름이다. $HCN(n,n)$의 노드 연결도가 $n+1$이므로 n개 이하의 노드가 고장이 발생했을 때 지름이 고장지름이 된다.

정리1에서 $HCN(n,n)$의 임의의 두 노드 S와 D 사이에 노드 중복하지 않고 경로의 길이가 $dia(HCN(n,n))+4$ 이하인 $n+1$개의 경로가 존재함을 보였다. 이것은 $HCN(n,n)$에서 n개 이하의 노드가 고장이 발생하여도 적어도 1개의 경로가 존재하고, 그 경로길이는 $dia(HCN(n,n))+4$ 이하임을 의미한다. 따라서 정리1에 의해 $HCN(n,n)$의 고장지름이 $dia(HCN(n,n))+4$ 이하임을 알 수 있다. □

4. 결론

본 논문에서는 상호 연결망으로 널리 알려진 하이퍼큐브보다 망비용이 개선된 HCN (n,n)의 노드 중복하지 않는 병렬경로를 구성하는 방법을 제시하였으며, 그 결과를 이용하여 $HCN(n,n)$의 고장지름을 분석하였다.

상호연결망의 고장지름이 지름 값과 비슷하다는 것은 그 연결망에서 분지수 이하의 노드가 고장이 발생해도 임의의 두 노드간에 메시지를 전송하는데 전송시간 지연이 거의 발생하지 않음을 의미한다. 이러한 결과는 상호연결망 $HCN(n,n)$의 고장 감내가 우수함을 의미한다.

5. 참고 문헌

[1] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "On Group Graphs and Their Fault Tolerance," IEEE Trans. Comput., Vol. c-36, No. 7, pp. 885-888, July 1987.

[2] N. Corp, "NCUBE/ten : an Overview," November 1985.

[3] D. R. Duh, G. H. Chen and J. F. Fang, "Algorithms and Properties of a New Two-Level Network with Folded Hypercubes as Basic Modeles," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 6, No. 7, pp.714-723, 1995.

[4] A. El-Amawy and S. Latifi, "Properties and Performance of Folded Hypercubes," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 2, No. 1, pp.31-42, 1991.

[5] K. Ghose and K. R. desai " Hierarchical Cubic Networks," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.6, No. 4, pp.427-436, 1995.

[6] F. Harary, J. P. Hayes, and H.-J. Wu, "A Survey of the Theory of Hypercube Graphs," Comput. Math. Appl., Vol. 15, pp.277-289, 1988

[7] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, 1992.

[8] V. E. Mendia nad D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.3, No.4, pp.389-396, 1992.

[9] S. Ranka, Y. Won and S. Sahni, "Programming a Hypercube Multiprocessor," IEEE Software, Vol. 5, pp. 69-77, 1988.

[10] Y. Saad and M.H. Schutltz, "Topological Properties of Hypercubes," IEEE Trans. Comput., Vol.37, pp.867-872, 1988.

[11] Ivan Stojmenovic, "Honeycomb Networks: Topological Properties and Communication Algorithms" IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 8, No. 10, pp.1036-1042, 1997.

[12] S. K. Yun and K.H. Park, "Hierarchical Cubic Networks", IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 9, No. 4, pp.410-414, 1998.