

## 탄소성 유한요소법과 직접미분법을 이용한 박판성형공정에서의 설계민감도 해석

김세호\* · 허 훈\*

### Design Sensitivity Analysis for the Sheet Metal Forming Process with an Elasto-plastic Finite Element Analysis and a Direct Differentiation Approach

S. H. Kim and H. Huh

#### Abstract

Design sensitivity is calculated in the sheet metal forming process with an elasto-plastic finite element analysis and a direct differentiation method. The sensitivity analysis is concerned with the time integration, the constitutive relation considering planar anisotropy, shell elements and the contact scheme. The present result is compared with the result obtained with the finite difference approach in deep drawing processes. The obtained sensitivity information is applied to the simple optimization process for the sheet metal forming process.

**Key Words** : Sheet Metal Forming Process, Design Sensitivity Analysis, Direct Differentiation Approach

#### 1. 서 론

박판금속 성형에서 제품의 품질은 공정변수에 크게 좌우되며 최적의 공정변수를 결정하는 것은 매우 어려운 일이다. 공정변수는 현재까지도 숙련된 기능공과 엔지니어의 경험, 시행착오 및 직관에 의하여 결정되고 있는 실정이다. 이러한 시행착오에 의한 설계를 수행하려면 많은 경비와 시간이 소요된다. 또한, 공정변수들 간의 상호작용이 복잡할 경우 시행착오를 거쳐 공정변수를 결정하는 것이 대단히 어려운 일이다. 따라서, 공정변수를 결

정하기 위하여 수치적 기법이 요구되고 있다. 본 연구에서는 실제 성형공정에서 공정변수가 미치는 영향을 좀더 유기적으로 파악하고, 각 공정변수를 최적설계하는 목적으로 유한요소법과 최적화 기법을 사용하였다. 최적설계를 위하여 실험계획법에 기반한 설계기법과 민감도 해석을 통한 수학적 최적화 기법을 사용할 수 있다.

본 논문에서는 보다 정확한 최적설계와 각 공정변수의 정량적인 영향을 알아보기 위하여 직접 미분법에 기반한 설계 민감도 해석을 수식화하였고, 이를 통하여 간단한 디프 드로잉 공정의 최적화를 수행하였다.

\* 한국과학기술원 기계공학과

## 2. 이론적 수식화

### 2.1 외연적 탄소성 유한요소 수식화

본 논문에서는 대변형 탄소성 구성방정식 및 복잡한 접촉을 고려하기 위하여 유한요소 수식화로 개량 라그랑지 방식의 수식화를 사용하였다. 또한 외연적 시간 적분을 위하여 중앙 차분법을 이용하였다. 사용한 요소는 Belytschko-Lin-Tsay 쉘 요소<sup>(1)</sup>이며, 무에너지 모드를 막기 위하여 Flanagan과 Belytschko<sup>(2)</sup>가 제안한 인공강성계수법을 사용하였다.

평형 방정식을 유한요소 수식화하고 외연적 적분법을 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int} \quad (1)$$

여기서,  $M$ ,  $\mathbf{F}_{ext}$ ,  $\mathbf{F}_{int}$ 는 각각 질량행렬, 외력벡터, 내력벡터이며 다음과 같은 식으로 표시된다.

$$M = \int_V \rho N^T N dV \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_{ext} = \int_V \rho N^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} N^T \mathbf{t} dS \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_{int} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4)$$

여기서,  $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력벡터이며,  $\mathbf{B}$ 는 변형률-변위의 관계를 나타내는 행렬이다.  $N$ 은 요소의 형상함수이며,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{t}$ 는 각각 절점에서의 가속도 벡터와 물체력 벡터 및 표면력 벡터를 나타낸다.

시간  $t^{n+1}$ 에서의 동적평형상태를 찾기 위하여 다음과 같이 외연적 시간적분법인 중앙 차분법을 사용하였다.

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^{n-1/2} + \mathbf{a}^n (\Delta t^n + \Delta t^{n+1})/2 \quad (5)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{v}^{n+1/2} \Delta t^{n+1} \quad (6)$$

여기서,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ 는 각각 절점의 좌표, 속도, 가속도를 의미한다.

### 2.2 민감도 수식화

2.1절에서 기술한 수식화를 바탕으로 직접미분법에 의한 행렬의 해석적 미분을 수행하였다. 평형방정식 (1)을 설계변수  $p$ 에 관하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d\mathbf{a}^n}{dp} = \mathbf{M}^{-1} \left( \frac{d\mathbf{F}_{ext}^n}{dp} - \frac{d\mathbf{F}_{int}^n}{dp} - \frac{d\mathbf{M}}{dp} \mathbf{a}^n \right) \quad (7)$$

여기서, 물체력을 무시하고 우변 각 항의 민감도는 식 (2)-(4)를 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{d\mathbf{M}}{dp} = \int_V \rho \frac{dN^T}{dp} N dV + \int_V \rho N^T \frac{dN}{dp} dV + \int_V \rho N^T N \frac{d(dV)}{dp} \quad (8)$$

$$\frac{d\mathbf{F}_{ext}}{dp} = \int_{\partial V} \frac{dN^T}{dp} \mathbf{t} dS + \int_{\partial V} N^T \frac{d\mathbf{t}}{dp} dS + \int_{\partial V} N^T \mathbf{t} \frac{d(dS)}{dp} \quad (9)$$

$$\frac{d\mathbf{F}_{int}}{dp} = \int_V \frac{d\mathbf{B}^T}{dp} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \mathbf{B}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dp} dV + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \frac{d(dV)}{dp} \quad (10)$$

식(10)에 표현된 내력의 민감도를 계산하기 위하여 쉘 요소에 관련된 변수와 탄소성 구성방정식에 관련된 변수를 모두 해석적으로 미분하였다. 탄소성 구성방정식은 Hill의 평면이방성을 고려한 2차 항복식<sup>(3)</sup>을 이용하였으며, 이를 설계미분하여 응력 및 내력벡터의 설계 민감도를 구하였다.

식(7)로부터 구한 가속도의 민감도로부터 식(5)와 식(6)을 설계미분하면 다음과 같이 속도와 좌표의 민감도를 갱신할 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{v}^{n+1/2}}{dp} = \frac{d\mathbf{v}^{n-1/2}}{dp} + \frac{d\mathbf{a}^n}{dp} (\Delta t^n + \Delta t^{n+1})/2 \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{x}^{n+1}}{dp} = \frac{d\mathbf{x}^n}{dp} + \frac{d\mathbf{v}^{n+1/2}}{dp} \Delta t^{n+1} \quad (12)$$

박관성형의 해석을 위하여 접촉의 고려가 필요하며 본 논문에서는 벌칙함수법을 사용하였다. 또한, 설계민감도를 계산하기 위하여 접촉의 경우에 대해서도 설계미분하여 접촉력의 민감도를 계산하였다.

## 3. 민감도 해석

2장에서 기술한 민감도 수식화를 바탕으로 구성된 프로그램의 정확도 및 효율성을 확인하기 위하여 원형칩 디프 드로잉 공정을 민감도 해석하였으며, 최적화에 사용되는 주요변수인 주변형률의 민감도를 계산하여 유한

차분법의 결과와 비교하였다. 또한, 계산된 민감도를 이용하여 두께분포의 제어에 관련된 최적화를 수행하여 본 논문에서 제안한 설계민감도가 복잡한 문제의 공정변수 최적설계에 사용될 수 있음을 확인하였다.

### 3.1 민감도 해석

원형컵 디프 드로잉 공정에 관하여 여러 가지 상태변수에 대해 블랭크 홀딩력에 대한 설계 민감도를 계산하고 유한차분법의 결과와 비교하였다.

해석에 사용된 박판은 NUMISHEET'99<sup>(4)</sup>에 제시된 DDQ 연강이다. 박판의 탄성계수는 210 GPa, 푸와송비는 0.3, 박판의 초기두께는 1 mm로 해석을 수행하였으며, 항복곡선은  $\bar{\sigma} = 525.6(\bar{\epsilon}^p + 0.004343)^{0.196}$  MPa이며, 밀도는  $9.78 \times 10^{-6} \text{kg/mm}^3$ 이다. 이방성 계수는 압연방향의 0, 45, 90도 방향으로 각각 1.73, 1.23, 2.02이다. 해석에 사용된 박판 블랭크, 펀치, 다이, 블랭크 홀더의 초기 형상은 Fig. 1에 도시하였다. 초기 블랭크의 직경은 200 mm이고, 펀치의 외경, 펀치 어깨부의 반경, 다이의 내경, 다이 어깨부의 반경은 각각 100 mm, 9 mm, 102.5 mm, 9 mm이다. 블랭크와 금형간은 쿨롱 마찰계수는 0.15이다. 해석은 펀치행정이 60 mm가 될 때까지 수행하였고, 펀치의 속도는 1 m/s로 하여 부가적인 운동에너지 없이 준정적 변형을 만족하도록 하였다. 블랭크 홀딩력은 해석시간에 따라 Fig. 2와 같이 부과하였고, 설계변수는 다음식의  $p$ 로 하여 민감도 해석을 수행하였다.

$$\begin{aligned} F_b &= 40t = pt \text{ (kN)} & t \leq 1\text{sec} \\ F_b &= 40 \text{ (kN)} & t > 1\text{sec} \end{aligned} \quad (13)$$

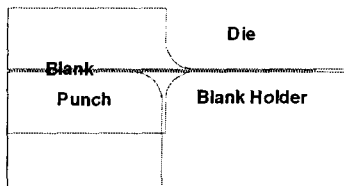


Fig. 1 Schematic diagram of the cylindrical cup deep drawing process for the optimization process

박판성형 공정에서 변형 및 파단의 기준으로 주로 주변형률의 분포를 사용하고 있다. 따라서, 이들 변수를 목적함수로 하는 최적설계를 수행하려면 민감도를 정확하게 구하여야 한다. 본 예제에서는 주변형률의 민감도를 구하고 결과를 고찰하였다.

Fig. 3에 성형된 원형컵의 펀치바닥, 컵 벽면, 다이 어깨부, 플랜지부에서의 펀치행정에 따른 주변형률의 민감

도를 유한차분법과 비교, 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 펀치 바닥부를 제외하고 유한차분법과 매우 잘 일치하는 결과를 보이고 있으며, 펀치 바닥부의 경우에는 변형이 매우 작은 부분이므로 접촉 등의 오차에 의하여 민감도가 발생하였다고 판단되었다.

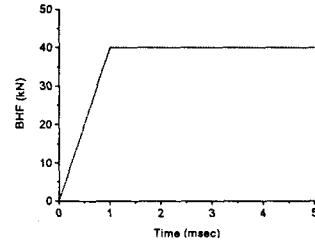


Fig. 2 Applied blank holding force with respect to time

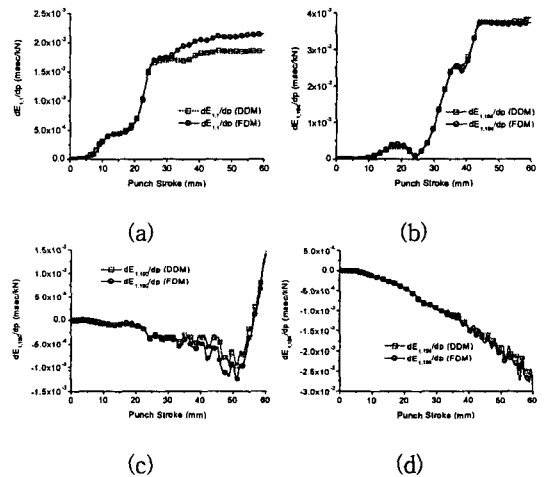


Fig. 3 Sensitivity of the principal strain: (a) punch head; (b) cup wall; (c) die shoulder; (d) flange

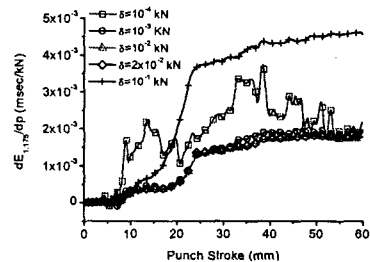


Fig. 4 Comparison of the principal strain sensitivity with respect to the perturbation size

Fig. 4에는 유한차분법에서의 섭동량(perturbation size)을 달리하여 해석한 결과로서 섭동량이  $10^{-1}$  kN 이상,  $10^{-4}$  kN 이하가 될 경우 오차의 발생으로 물리적으로 타당한 양과 다른 결과를 보이고 있음을 알 수 있

다. 일반적으로 접촉을 고려하여야 하는 준정적 변형에서 유한차분법으로 민감도를 구하는 것은 어렵다고 알려져 있다.

### 3.2 두께변형률의 최적화

계산된 민감도를 이용하면 주어진 목적함수를 최적설계하는 문제를 해석할 수 있다. 본 논문에서는 해석예제로 국부의 변형률을 제어하는 최적화 과정을 수행하였다. 해석조건은 3.1절에 기술된 내용과 동일하며 최적화를 위한 목적함수와 제한조건은 다음과 같이 설정하였다.

$$\Phi = \int_{\Omega_{opt}} (\epsilon_i - \tilde{\epsilon}_i)^2 dV \quad (14)$$

$$g_1 = \epsilon_i - \tilde{\epsilon}_{ic} > 0 \quad g_2 = E_1 - E_{1c} < 0 \quad (15-a,b)$$

목적함수 (14)에서의 두께변형률의 목적값  $\tilde{\epsilon}_i$ 은 -0.1로 하였으며, 최적화 영역  $\Omega_{opt}$ 는 편치 어깨부에 근접하는 중심으로부터의 거리  $50\text{mm} \leq r_0 \leq 70\text{mm}$ 로 하였다. 식(15)에서  $g_1$ 에서의 제한 변형률  $\epsilon_{ic}$ 는 -0.3으로 하였고,  $g_2$ 에서의 제한 변형률은 성형한계곡선<sup>(4)</sup>을 구간 선형식으로 근사하여 사용하였다. 해석에 사용된 블랭크 홀딩력의 초기 추정치는 40 kN이다.

최적치 탐색을 위하여 순차적 이차 계획법(SQP: Sequential Quadratic Programming)을 이용하였고, 해석에 적용하기 위하여 상용 프로그램인 DOT<sup>(5)</sup>를 사용하였다.

Fig. 5에 최적화가 진행됨에 따른 목적함수와 블랭크 홀딩력의 크기의 변화를 도시하였다. 초기의 두께 변형률이 매우 작은 값이므로 최적화 영역에서 큰 두께 변형률 분포를 가지려면 블랭크 홀딩력이 증가하여야 한다. 최적해를 얻기 위하여 4번의 SQP축차 과정이 소요되었고, 구하여진 블랭크 홀딩력은 99.62 kN이었다. Fig. 6에 최적의 블랭크 홀딩력에서 계산된 두께변형률의 분포를 도시하였으며, 최적화 영역에서 두께변형률의 분포가 목적값에 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

## 4. 결론

본 논문에서는 박판성형공정에서의 민감도 해석 및 공정변수의 최적설계를 위하여 외연적 탄소성 유한요소 수식의 민감도 해석을 수행하였다. 민감도 해석을 위하여 셀요소를 이용한 기본 지배 방정식 및 접촉의 민감도 수

식화를 수행하였고, 이를 바탕으로 프로그램을 개발하였다. 개발된 프로그램으로 원형컵 드로잉 공정을 해석하여 민감도 해석의 정확성과 타당성을 입증하였다. 또한, 계산된 설계 민감도를 바탕으로 두께변형률의 분포를 최적화하는 간단한 최적설계 문제를 해석하였다. 향후과제로 설계변수를 형상변수로 확장하는 것이 필요하며, 좀 더 복잡한 실제 문제의 해석을 수행할 예정이다.

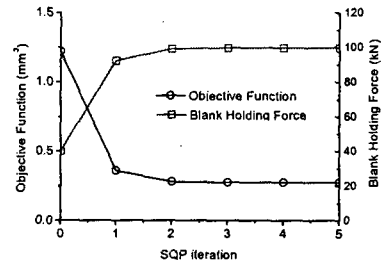


Fig. 5 Variation of the blank holding force and the objective function during optimization

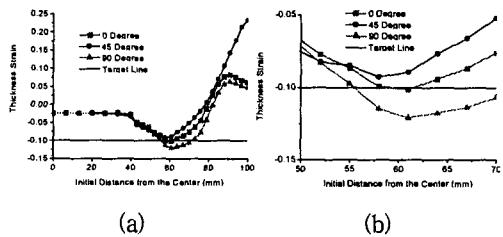


Fig. 6 Thickness strain distribution after optimization: (a) whole domain; (b) optimization region

## 참고 문헌

- (1) Belytschko, T., Lin, J. I. and Tsay, C., 1984, "Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 42, pp. 225~251.
- (2) Flanagan, D. and Belytschko, T., 1981, "A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control", *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 17, pp. 679~706.
- (3) Hill, R., 1950, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford, Clarendon Press.
- (4) Gelin, J. C. and Picart, P., 1999, *Proceedings of the 4th international conference and workshop NUMISHEET'99*, Vol. 2, BURS, Besancon.
- (5) VMA Engineering, 1993, *DOT users manual*, Ver. 4.0.