

단일 구동부를 갖는 2축 회전형 진자의 스윙업 제어

양동훈, 유기정, 홍석교
아주대학교 전자공학과

Swing-Up Control of a Two-Link Pendulum with One Actuator

Dong-Hoon Yang, Ki-Jeong Yoo, Suk-Kyo Hong
Dept. of Electronics Eng., Ajou University, Suwon 442-749, Korea

Abstract - A strategy for the swing-up and stabilization control method for a two-links rotational pendulum according to states of each link of the rotational pendulum is proposed. The proposed controller consists of two modes of control such as divergence mode and stabilization mode. When the controller is in divergence mode, control input is generated using sinusoidal function, which is developed based on resonance period of the pendulum in linear region, to make the second link (pendulum) reach top position. After the controller finishes operation in divergence mode, stabilization control is initiated to keep the pendulum around the top position using pole placement control method. Experimental results are given to show the effective-ness of the proposed method.

1. 서 론

도립 진자는 원래 불안정한 시스템을 안정화하는 선형 제어의 구현을 위해 이용되어왔으나, 이 시스템이 내포하고 있는 비선형성은 비선형 제어의 구현에도 유용하여야 이에 관한 많은 연구가 진행되고 있다[3,5].

진자 시스템은 크게 회전형 진자와 수레형 진자 시스템으로 나눌 수 있다. 회전형 진자는 평면에서 동작하는 2축 로봇 매니퓰레이터와 유사한 형태를 지니고 있다. 그러나, 회전형 진자는 각 축에 동력원이 있는 2축 로봇 매니퓰레이터와는 달리, 하나의 동력원이 2축 중 첫 번째 축에만 있다. 즉, 회전형 진자는 동력원이 있는 팔 축과 동력원이 없는 진자 축으로 이루어져 있다. 회전형 진자 시스템을 그림 1-1에 나타내었다. 이와 같이, 자유도보다 적은 동력원을 가진 시스템을 비구동(underactuated)시스템이라고 한다. 비구동 시스템은 질량, 비용, 에너지 효율 면에서의 이점 때문에 최근 들어서 많은 연구가 진행되고 있다[6].

수레형 진자 시스템이 선형 자유도를 갖는 동력원이 회전 자유도를 갖는 진자를 제어하는데 반해, 회전형 진자는 동력원이 회전 자유도를 갖는다. 따라서, 회전형 진자 시스템은 수레형 진자 시스템에 비해 더 많은 비선형성을 내포하고 있다. 또, 이 시스템은 수직 방향의 평면상에서 동작을 하므로 동력원을 갖는 팔의 각도가 $-\pi/2 \sim \pi/2$, $\pi/2 \sim -\pi/2$ 중 어느 영역에 위치하는가에 따라 진자의 제어를 위한 팔의 회전 방향이 달라진다. 또, 이 진자는 팔의 각도가 $\pm\pi/2$ 인 지점에서는 제어가 불가능하다. 이러한 제약 조건으로 인해 진자의 안정화 제어를 위한 팔의 운동영역이 제한된다.

진자의 스윙업 제어에 대해 많은 연구가 진행되고 있다. Åström과 Furuta는 에너지 제어를 이용하였고[3], Bortoff는 강인제어를[4], Furuta, Yamakita, Kobayashi는 의사상대궤환을 이용하여 스윙업제어를 행하였다[2].

스윙업 알고리즘은 진자를 발산시키는 모드와 발산하여 도립위치에 도달한 진자를 안정화시키는 모드로 구성

되어 있다. 이 논문에서는 2축 회전형 진자의 스윙업 제어를 위한 간단한 알고리즘을 제시한다.

본 논문은 먼저 실험에 사용된 회전형 진자에 대한 설명과 스윙업 제어기와 안정화 제어기가 제시되어 있고, 스윙업 알고리즘의 시뮬레이션과 그 실험 결과가 제시되어 있다.

2. 본 론

2.1 회전형 진자의 동역학

회전형 진자시스템의 모델링에 사용된 파라미터와 상태변수를 그림 1-1의 구조도에 나타내었다. l_1, l_2 은 각각 모터와 연결된 팔의 길이와 진자의 무게중심까지의 길이이며, m_1, m_2 은 각 축의 무게이며, M 은 축의 연결 부위의 무게이다. I_1, I_2 는 각 축의 관성모멘트이며, g 는 중력 가속도이다. θ_1, θ_2 는 각 축의 각도이며, 시계 방향을 양의 방향으로 정하였다. 각 축 사이의 마찰력은 무시하였다. 세워진 동역학 방정식은 다음과 같다.

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

여기서,

$$M(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + M l_1^2 + m_2 l_1^2 + I_2 & -m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} (M + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \\ -m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

식 (2.1)의 오른쪽 벡터에서, 0은 두 번째 축의 동력원의 부재를 나타낸다. 위의 동역학 방정식은 선형제어를 위해 0° 에서 선형화를 할 수 있다. 이 경우, $\dot{\theta}^2 \cong 0$, $\sin \theta \cong \theta$, $\cos \theta \cong 1$ 로 근사화 시킬 수 있다. 이를 이용하여 (2.2)식은 다음과 같이 근사화 된다

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} m_1 l_1^2 + M l_1^2 + I_2 + m_2 l_1^2\right) \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (M + m_2) g l_1 \theta_1 = \tau_1 \\ - m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + (I_2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta}_2 - m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

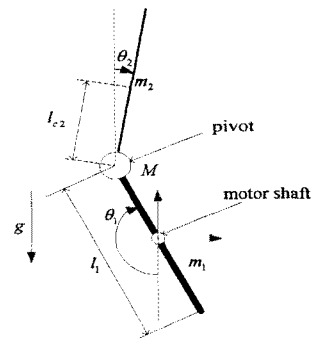


그림 1-1 회전형 진자의 구조도

2.2 스윙업 알고리즘

2.2.1 진자의 발산

그림 1-1에서 지지대의 질량이 없는 2축 진자를 가정하자. 진자의 첫 번째 축이 $\theta_1 = A \sin \omega t$, $\omega = \sqrt{g/l_2}$ 의 궤적으로 운동을 한다고 하자. 여기서 ω 는 두 번째 진자의 공진주기이다. 그러면, 두 번째 진자는 발산한다.

증명

2축 진자의 동역학식을 간단히 구하면 다음과 같다.

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)l_1 g \theta_1 = 0 \quad (2.3)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 g \theta_2 = 0 \quad (2.4)$$

$\theta_1, \theta_2 = 0$ 에서, 식(2.4)는 간략화 할 수 있다.

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l_2} \theta_2 + \frac{l_1}{l_2} \ddot{\theta}_1 = 0 \quad (2.5)$$

첫 번째 축이 $\theta_1 = A \sin \omega t$ 의 궤적으로 운동을 하면, 위 식은 다음과 같다.

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l_2} \theta_2 = \frac{l_1}{l_2} \omega^2 A \sin \omega t \quad (2.6)$$

$\theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_2(0) = 0$ 의 초기 조건에서, 위 식의 일반해는 다음과 같다.

$$\theta_2 = \frac{l_1 \omega^2 A}{g - l_2 \omega^2} \left(-\omega \sqrt{\frac{l_2}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l_2}} t + \sin \omega t \right) \quad (2.7)$$

위 식에 $\omega = \sqrt{g/l_2}$ 를 대입하면 θ_2 는 발산하게 된다.

2.2.2 발산 모드

초기 상태에서 팔과 진자는 모두 아래쪽을 향하고 있다. 스윙업을 하기 위해서는 하단 평형점에 위치하고 있는 진자를 회전, 발산시켜야 한다. 진자의 회전을 위해서 팔이 시계 방향과 반시계 방향으로 방향을 주기적으로 바꿔가며 반복 회전을 한다. 이 팔의 운동을 결정하는 요소는 팔의 회전운동 주기와 회전 진폭이다. 팔의 회전운동 주기는 진자의 선형구간에서의 진동 주기와 같게 설정하였다. 진자의 선형구간에서의 주기는 다음과 같다.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}} \quad (2.8)$$

이 주기는 비록 선형구간에서의 주기이지만, 이 주기가 진자를 공진, 발산시킬 수 있는 주기라고 가정하고 이 주기와 같은 주기로 팔을 운동시켰다. 여기서, 이 주기가 비선형성에 의해 발생시키는 오차는 다음과 같다. 수직 방향에 대해 양쪽으로 5° 의 진동을 한다면 실제 주기는 (3.1)식이 주는 값보다 0.05%가 커진다. 또 10° 의 경우 이 차이는 0.2%이고, 20° 인 경우에는 0.8%의 차이를 보인다. 50° 에 이르면 5%의 차이를 나타낸다[1]. 이 결과로 미루어, 진자의 비선형성을 감안하더라도 진자의 가장 빠른 발산을 시킬 수 있는 주기는 T라 판단하여 팔의 반복 운동 주기로 설정하였다.

팔의 반복 운동의 진폭은 $\pi/4$ 로 설정했다. 이 조건을 만족하는 팔의 궤적은 다음 식으로 주어진다.

$$r = r_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (2.9)$$

같은 진폭의 팔의 반복 회전운동에서 회전 주기를 다르게 할 경우 회전 주기를 T로 설정하였을 때보다 진자가 잘 발산하지 않게 된다. 팔의 회전 주기를 T로 설정하더라도 r_0 가 너무 작을 경우에는 발산하지 않는다.

제어 모드가 발산 모드에서 안정화 모드로 바뀌기 위해서는 다음과 같은 조건이 필요하다.

$$|\theta_1|, |\theta_2| < \varepsilon_1 \quad |\dot{\theta}_1|, |\dot{\theta}_2| < \varepsilon_2 \quad (2.10)$$

모의 실험과 실제 실험에 사용된 변환 조건은 다음과 같다.

$$\cos(\varepsilon) > 0.93 \Leftrightarrow \varepsilon < 21^\circ \quad (2.11)$$

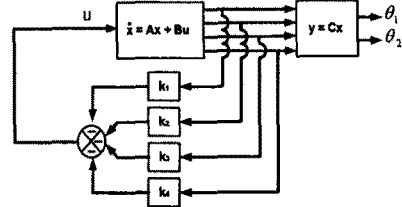


그림 2-1 안정화 제어기의 블록도

2.2.2 안정화 모드

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.12)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2.13)$$

$$x = [\theta_1(k) \ \theta_2(k) \ \theta_1(k+1) \ \theta_2(k+1)]^T \quad (2.14)$$

진자가 안정화 제어기의 동작 영역으로 이동하게 되면, 제어기는 팔과 진자를 안정화시키기 위한 동작을 하게 된다. 안정화 제어기는 극배치방법을 이용하여 설계되었다. 무보상 시스템의 극점들은 $-0.1415 \pm i6.2814$, 6.3240 , -6.3364 로 불안정한 시스템이다. 이 시스템의 극점들을 $-2.2309 \pm i2.8179$ 와 $-3.0712 \pm i0.9196$ 로 이동시키는 제어기를 설계하였다. 제어기의 제어 입력은 다음 식과 같다.

$$u = -kx \quad (2.15)$$

회전형 진자 시스템은 진자를 제어하기 위한 팔이 회전 운동을 하기 때문에, 비선형성을 훨씬 많이 포함하고 있다. 따라서, 정확한 선형 제어기 동작영역이 수레형 진자 시스템에 비해 훨씬 좁다. 그림 2-1에 안정화 제어기의 블록도가 제시되어 있다.

2-3 모의실험결과

그림 2-2는 스윙업 제어기의 팔과 진자의 궤적을 나타내었다. 팔은 설정된 주기로 반복회전을 함을 알 수 있다. 그러나 그 진폭은 계속 증가함을 볼 수 있다. 이는 진자의 운동이 팔의 진폭을 운동 방향으로 더욱 커지게 하기 때문이다. 진자는 4번의 반복회전을 거친 후 상단의 평형점에서 수렴한다. 그림 2-3는 스윙업 제어기의 제어입력을 나타내었다. 팔의 궤적이 사인 파형을 잘 추종하는데 비해, 이 제어입력은 불규칙한 파형을 그리고 있다. 이는 진자의 운동이 팔의 운동에 영향을 미치고 있는데, 그 영향이 진자의 운동에 따라 달라지기 때문이다.

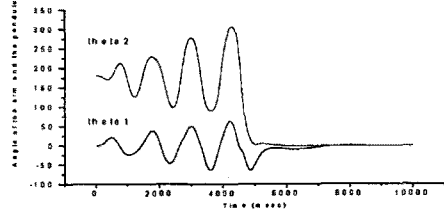


그림 2-2 스윙업 제어기의 팔과 진자의 각도
thetal : 팔의 각도 theta2 : 진자의 각도

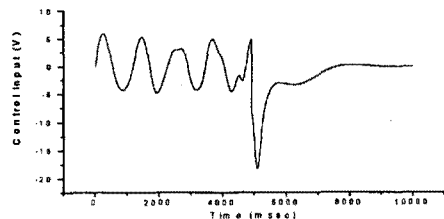


그림 2-3 스윙업 제어기의 제어입력

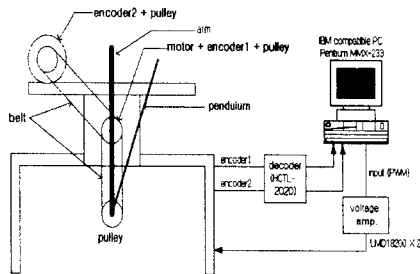


그림 2-4 회전형 진자시스템

2-4 실험결과

실험에 사용된 장치들을 다음의 블록도로 나타내었다. 실험에 사용된 시스템은 다음과 같다. 먼저, 펜티엄 PC와 75V, 45W 정격의 DC모터, LMD18200 모터드라이브회로 등과 각각 2500펄스와 500펄스의 인코더를 사용하였다. 진자 시스템의 상수는 다음의 표에 나타내었다.

표 2-1 회전형 진자 시스템의 파라미터

M	m_1	m_2	l_1	l_2	g
0.078kg	0.115kg	0.031kg	0.2m	0.2m	9.8m/s ²

그림 2-5는 스윙업 제어시의 팔과 진자의 각도를 나타내고 있다. 진자는 3번의 반복회전운동 후에 상단의 평형점에서 수렴함을 보였고 그 시간은 약 5초가 소요되었다. 시뮬레이션과 마찬가지로 팔의 회전의 진폭이 증가함을 볼 수 있는데, 이는 팔의 운동이 위상이 낮은 진자의 회전에 회전방향으로의 영향을 받기 때문이다. 그림 2-6은 스윙업 과정 중의 제어 입력의 변화를 나타낸 그래프이다. 4초 이후에 사인파형에서 불규칙한 파형으로 변화하였다. 이는 제어가 발산 모드에서 안정화 모드로 전환되었음을 보여준다. 발산 모드에서, 팔의 반복회전 운동의 진폭을 $\pi/3$ 으로 증가 시켰을 경우, 좀 더 빠른 시간 안에, 스윙업 제어가 가능하다.

3. 결 론

본 논문에서는 회전형 진자시스템의 스윙업 알고리즘을 제시하였다. 스윙업 알고리즘은 크게 진자를 발산시키는 모드와 발산하여 도립위치에 도달한 진자를 안정화시키는 모드로 구성되어 있다. 발산 모드에서는 팔을 진자의 진동주기에 맞추어 반복회전운동을 하게 하여, 진자를 가장 빠르게 발산시키도록 하였다. 안정화 모드에서는 극배치방법을 이용하여 상태 궤환 이득을 구한 후, 안정화 제어를 하였다. 이상의 방법을 적용하여 회전형 진자시스템의 스윙업 제어실험을 행하였다. 스윙업 알고리즘의 모의실험결과와 실험 결과를 제시하였다. 모의실험결과와 실험결과를 비교하여 보면, 파형이 거의 흡사함을 볼 수 있다. 스윙업 제어 과정 중의 팔과 진자의 궤적을 살펴보면, 실험결과와 파형이 모의실험결과에 비해 다소 불규칙하다. 모의실험에 사용된 시스템의 모델에는 팔과 진자 사이의 마찰력과 인코더의 펄스를 읽어들이기 위한 벨트의 마찰력이 고려되어 있지 않다. 따라서, 이 마찰력에 의한 비선형성의 영향으로 팔과 진자의 궤적이 불

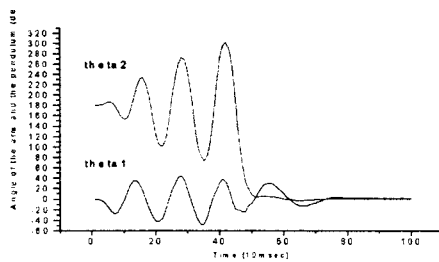


그림 2-5 스윙업 제어시의 팔과 진자의 각도
theta1 : 팔의 각도 theta2 : 진자의 각도

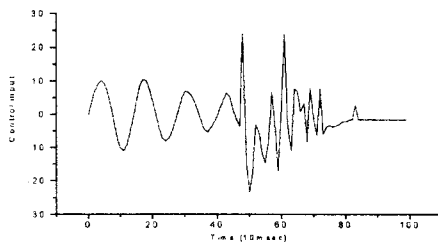


그림 2-6 스윙업 제어시의 제어입력

규칙하게 나타난 것으로 보인다.

스윙업 알고리즘에서 진자를 발산시키기 위해 단순히 비례제어를 이용하였다. 팔의 운동에 대한 진자의 운동의 영향을 고려하지 않았다. 따라서, 보다 안정한 제어를 위해서는 진자의 영향을 상쇄하기 위해 궤환 선형화 방법을 적용함으로써 보다 성능을 개선할 수 있을 것으로 보인다.

[참 고 문 헌]

- [1] C.-S. Chen and W.-L. Chen, "Robust adaptive sliding-mode control using fuzzy modeling for an inverted-pendulum system," IEEE Trans. Industrial Electronics, Vol.45, No. 2, pp.297-306, 1998
- [2] I. Fantoni, R. Lozano, and M. W. Spong, "Energy based control of Pendubot," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 45, No. 4, pp.725-729, 2000
- [3] K. Furuta, M. Yamakita, and S. Kobayashi, "Swing up control of inverted pendulum," Proc. IECON '91, pp.2193-2198, 1991
- [4] M. Iwashiro, K. Furuta, and K. J. Astrom, "Energy based control of pendulum," Proc. IEEE Int. Conf. Control Applications, pp. 715-717, 1996
- [5] S. Mori, H. Nishihara, and K. Furuta, "Control of unstable mechanical system: Control of pendulum," Int. J. Control, Vol. 23, pp.673-692, 1976
- [6] M. W. Spong and D. J. Block, "The pendubot: A mechatronic system for control research and education," IEEE Conf. Decision and Control, 1995