

H ∞ 성능을 고려한 흡인식 자기부상 시스템의 PID 제어기 설계

김석주, 김춘경, 김종문, 박민국
한국전기연구소 계측제어 그룹

A PID Controller Design for an Attraction Type Magnetic Levitation System Considering H ∞ Performance

Seogjoo Kim, Chunkyung Kim, Jongmoon Kim, and Minkook Park
Instrumentation & Control Group, Korea Electrotechnology Research Institute

Abstract - This paper describes a PID controller for an attraction type magnetic levitation system considering H ∞ performance. PID controllers are a kind of fixed structure reduced order controllers. Using change of variables a reduced order control problem can be recast into a static output feedback control problem and can be solved efficiently by LMI(Linear Matrix Inequality) method. In this paper, cone complementarity method is adopted and the simulation shows good results.

1. 서 론

흡인식 자기부상 시스템은 비접촉 베어링, 저속 또는 중속의 도시형 자기부상 열차 시스템 등에 널리 활용되고 있다[1]. 흡인식 자기부상 시스템의 개회로 불안정 시스템을 안정화하기 위하여 공극과 가속도를 이용한 상태제어 제어기부터 현대의 H ∞ 제어기[2]까지 여러 종류의 제어기가 제안되었고 PID 제어기도 그 중 하나이다.

PID 제어기는 아직까지도 산업현장에서 가장 많이 사용되는 제어기중의 하나라고 할 수 있다. 이것은 PID 제어기가 매우 간단하여 이해하기 쉽고 구현이 용이하기 때문일 것이다. 더욱이 산업현장 엔지니어의 경험을 반영하여 제어기 이득조정이 가능하고 대부분의 플랜트의 경우 PID 제어기는 강건한 특성을 가지기 때문에 그 응용분야가 매우 넓다고 할 수 있다[3]. 따라서 현대 제어 이론을 접목한 PID 제어기 설계에 많은 연구가 있는 것은 당연하다고 할 수 있다.

최근 LMI(Linear Matrix Inequality)는 많은 제어기 설계 및 해석 문제를 수치적으로 빠르게 풀 수 있는 도구로서 각광을 받고 있다[8]. 기존의 방법으로 풀 수 있는 문제뿐만 아니라 풀 수 없었던 문제까지도 LMI 형태로 표현이 가능하다면 최근 개발된 내점법(Interior Point Method)을 이용하여 매우 효율적으로 풀 수 있다. 대표적인 문제가 H ∞ 및 강인제어(Robust control)일 것이다. 하지만 LMI에 있어서도 저차원 제어기(Reduced order controller) 설계 문제는 LMI 조건에 non-convex한 계수조건(rank condition)이 부가되어 있기 때문에 단순하게 풀 수 없는 문제이다. 이러한 경우 반복법[5][7]을 사용하는 것이 일반적이다. 더욱이 PID 제어기는 고정된 구조를 가진 저차원 제어기(Fixed structure reduced order controller)이기 때문에[6] 제어기 구조상의 제약도 있다. 이러한 저차원 제어기 문제를 Ghaoui[7] 등은 non-convex 조건을 선형화하여 반복법으로 해를 얻는 방법을 제시한 바 있으며 본 논문에서도 이러한 방법을 자기부상 시스템 제어기 설계에 이용하고자 한다.

본 논문에서는 흡인식 자기부상시스템의 PID 제어기 설계를 위하여 LMI를 이용하여 H ∞ 성능이 최적화되도록 이득을 결정하고자 하며 시뮬레이션을 통하여 그 효용성을 입증하고자 한다.

2. 자기부상 시스템

2.1 자기부상 시스템 모델링

그림 1에 흡인식 자기부상시스템을 표시하였다. 마그네트의 절대위치를 $z(t)$, 상대위치를 $c(t)$, 인가전압을 $v(t)$, 마그네트에 흐르는 전류를 $i(t)$ 라 하고 공칭전류와 공칭공극 i_0, z_0 에서 힘과 전류의 관계를 선형화하면 다음과 같다[1].

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{c}(t) \\ \Delta \dot{z}(t) \\ \Delta \dot{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{k_z}{m} & 0 & -\frac{k_i}{m} \\ 0 & \frac{k_z}{k_i} & -\frac{R}{L_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c(t) \\ \Delta z(t) \\ \Delta i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_0} \end{bmatrix} \Delta v(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d(t) \\ \Delta h(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

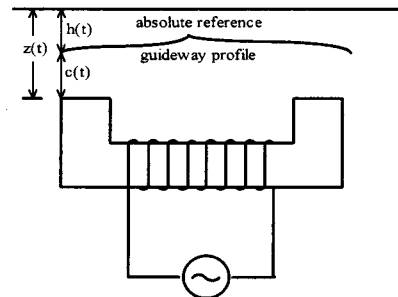


그림 1. 흡인식 자기부상 시스템

여기서 마그네트와 레일사이의 흡인력을 $F(i, z)$ 라 하면

$$k_i = \left. \frac{\partial F(i, z)}{\partial i} \right|_{(i_0, z_0)}, \quad k_z = \left. \frac{\partial F(i, z)}{\partial z} \right|_{(i_0, z_0)}$$

L_0 : (i_0, z_0) 에서의 마그네트 인덕턴스

R : 마그네트의 저항

m : 마그네트의 질량

f_d : 외란(disturbance for ce)

이다. 이와 같은 흡인식 자기부상 시스템은 외란(f_d)과 레일의란(h)에 대하여 안정한 부상력을 발생시켜 일정한 공극이 유지되도록 마그네트에 가해지는 전압을 제어하는 것이다. 레일외란의 경우 마그네트는 상대위치 $c(t)$ 의 고주파 성분에 대해서 충분한 잡음 제거능력을 가지면서 저주파 성분에 대해서는 추종능력을 갖게 하는 것이다.

2.2 제어기 모델링

다음과 같은 일반적인 선형시불변 시스템을 생각하기로

한다

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B}_1 & \widehat{B}_2 \\ \widehat{C}_1 & \widehat{D}_{11} & \widehat{D}_{12} \\ \widehat{C}_2 & \widehat{D}_{21} & \widehat{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 은 상태벡터, $u(t) \in R^m$ 은 외부입력 벡터, $u(t) \in R^p$ 는 제어입력벡터, $y(t) \in R^q$ 는 측정벡터이고 $z(t) \in R^r$ 은 제어하고자 출력벡터이다. \widehat{A} , \widehat{B}_i , \widehat{C}_i , \widehat{D}_{ij} 는 상수 행렬이며 $\widehat{D}_{22} = 0$ 인 경우만 고려하기로 한다. 이때 $n \geq n_c$ 차수를 가지는 일반적인 제어기는 상태변수를 $x_c(t) \in R^{n_c}$ 로 놓으면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

와 같다. 이때 구해야 할 제어기의 변수 A_c , B_c , C_c , D_c 를 다음과 같이 행렬 K 로 놓고

$$K = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \quad (4)$$

식 (2)와 식 (3)을 페루프 형태로 나타내면 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u(t) \\ z(t) &= C_c x_c(t) + D_c u(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} x_c &= \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \\ A_c &= \begin{bmatrix} \widehat{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \widehat{C}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_c &= \begin{bmatrix} \widehat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{B}_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \widehat{D}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_c &= \begin{bmatrix} \widehat{C}_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{D}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \widehat{C}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ D_c &= \widehat{D}_{11} + \begin{bmatrix} \widehat{D}_{12} & 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} \widehat{D}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

이다. 따라서 K 는 다음과 같은 시스템 변수를 가지는

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \widehat{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \widehat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \widehat{B}_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} \widehat{C}_1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} \widehat{C}_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ D_{11} &= \widehat{D}_{11}, D_{12} = \begin{bmatrix} \widehat{D}_{12} & 0 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} \widehat{D}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

시스템의 정적 출력제한 제어기(Static output feedback controller)로 나타낼 수 있다.

페루프 방정식 (5)에서 H_∞ 성능이 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 일 조건은 Bounded Real Lemma[8]에 의해서 다음을 만족하는 행렬 $X_c > 0$ 가 존재해야 하는 것으로 알려져 있다.

$$\begin{bmatrix} A_c^T X_c + X_c A_c & X_c B_c & C_c^T \\ B_c^T X_c & -\gamma I & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

식 (7)은 미지행렬 K 와 X_c 에 관한 비선형 행렬 부등식이기 때문에 LMI는 아니다. 그러나 잘 알려진 바와 같이 제어기 행렬 K 를 제거하고 LMI로 표현하면[4], $n_c < n$ 의 제어기가 존재할 조건은 식 (8)의 LMI와 식 (9)를 만족하는 $R = R^T > 0, S = S^T > 0$ 가 존재하면 된다[3].

여기서 β 는 감쇄율(decay rate)로 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\beta t} \|x(t)\| = 0$ 을 만족하는 가장 큰 β 값을 의미하고[8].

$$\begin{aligned} N_1 &= \begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \\ C_2^T & -\gamma^{-1} D_{21}^T \end{bmatrix}^- \\ N_2 &= \begin{bmatrix} C_2^T & -\gamma^{-1} D_{21}^T \end{bmatrix}^- \end{aligned}$$

이다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T + \beta R & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA + \beta S & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$RS = I \quad (9)$$

식 (9)는 제어기의 차수에 관련된 조건으로 전차수(full order) 제어기일 경우에는 없는 non-convex 조건이다. 식 (9)가 다음과 동가인 것에 착안하여

$$RS = I \Leftrightarrow \text{trace}(RS) = n \quad (10)$$

다음과 같은 반복 선형화 알고리즘이 개발되었다[7].

$$\begin{aligned} \min_{R_k, S_k} \quad & \text{tr}(R_k S_{k-1} + R_{k-1} S_k) \\ \text{LMI} \quad & (8) \end{aligned} \quad (11)$$

위 식에서 R_{k-1} 와 S_{k-1} 이 정해지면 식 (11)은 R_k 와 S_k 에 관한 LMI 문제가 되므로 쉽게 풀 수 있다. 즉 최초 R_0, S_0 는 LMI 조건 (8)만 만족하는 값으로 초기화하고 그 다음 반복적으로 식(11)의 최적해를 구함으로써 식 (8)와 식 (9)를 만족하는 해를 얻을 수 있게 된다. 이 방법이 Ghaoui[7]등이 제안한 방법이다. $RS=I$ 인 R 과 S 가 얻어지면 제어기 변수 K 는 다음과 같은 LMI를 만족하는 행렬로 주어진다.

$$\begin{aligned} M + PKQ + (PKQ)^T < 0 \\ M = \begin{bmatrix} A^T S + SA + \beta S & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \\ P = \begin{bmatrix} PB_2 \\ 0 \\ D_{12} \end{bmatrix}, Q = [C_2 \ \gamma^{-1} D_{21} \ 0] \end{aligned} \quad (12)$$

이제 이 방법을 PID 제어기에 적용해 보기로 한다. 단일 입출력을 가지는 PID 제어기는 다음과 같이 표현된다.

$$C(s) = k_p + k_i \frac{1}{s + \tau_i} + k_d \frac{s}{\tau_d s + 1} \quad (13)$$

여기서 τ_i 와 τ_d 는 각각 적분값과 미분값의 크기를 제한하기 위한 상수로 고정된 값을 가진다. 위식을 상태공간으로 표현하면

$$\begin{aligned} A_c = \begin{bmatrix} -\tau_i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix} \\ C_c = \begin{bmatrix} k_i & -\frac{k_d}{\tau_d} \end{bmatrix}, D_c = k_p + \frac{k_d}{\tau_d} \end{aligned}$$

와 같이 표시된다. 이때 $K_r = [k_p \ k_i \ k_d]$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} K = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\tau_i & 0 \\ \frac{1}{\tau_d} & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_p \ k_i \ k_d] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\tau_d} & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

된다. 이제 시스템 방정식을 K_r 에 관한 출력제한으로 하고 다시 쓰면 시스템 행렬은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} \widehat{A} & 0 & 0 \\ \widehat{C}_2 & -\tau_i & 0 \\ \widehat{C}_2 & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \widehat{B}_1 & \widehat{D}_{21} \\ \frac{\widehat{D}_{21}}{\tau_d} \end{bmatrix}^T, \quad B_2 = [B_2 \ 0 \ 0]^T$$

$$C_1 = [\widehat{C}_1 \ 0 \ 0]^T, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \widehat{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\widehat{C}_2}{\tau_d} & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$D_{11} = \widehat{D}_{11}, \quad D_{12} = \widehat{D}_{12}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} \widehat{D}_{21} & 0 \\ 0 & \frac{\widehat{D}_{21}}{\tau_d} \end{bmatrix}^T$$

즉, PID 제어기의 이득은 식 (15)의 A, B_i, C_i, D_{ij} 를 시스템 행렬로 가지는 시스템의 정적출력계환 제어기의 이득으로 표현된다.

3. 시뮬레이션

본 논문에서 적용하고자 하는 단일 마그네트 시스템은 전기연구원의 실험용 단일 마그네트 부상시스템이며 주요 재원은 다음과 같다.

표 1. 마그네트의 사양

무게	3.3 Kg
인덕턴스	0.092 H
공칭공극	4 mm
ki	36.3 Kg/A
kz	15165 Kg/m
저항	3.4 Ω

이때

$$w = \begin{bmatrix} f_d(t) \\ \Delta h(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

로 놓고 시스템의 H^∞ 성능 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 에서 γ 를 줄이면서 정적 출력계환 제어기의 해를 구하여 다음의 결과를 얻었다. 계산 도구는 MATLAB의 LMI Toolbox를 이용하였다.

표 2. 알고리즘의 수렴특성

k	tr(RS)
1	2.003010e+010
2	215.62220727505607
3	37.86533817259063
.	.
28	5.00000001924004
29	5.00000001019477

표 3. 계산 결과

Kp	1536.85
Ki	239.71
Kd	7.99
γ	0.4
β	5.0
τ_i	0.001
τ_d	0.01

그림 2는 1초후에 마그네트 무게의 50%에 해당하는 외란(f_d)이 가해졌을 때 공극의 파형을 보여주고 있으며 그림 3은 레일에 깊이 5cm의 단차가 있을 때 공극의 응답을 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 H^∞ 성능을 고려한 PID 제어기로도 비교적 양호한 외란 제거 능력을 얻을 수 있다.

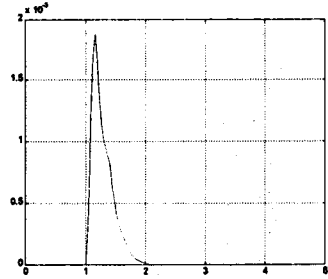


그림 2. 외란에 대한 공극 응답

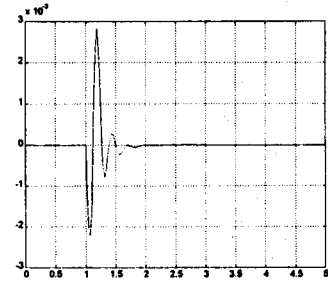


그림 3. 레일 단차에 대한 공극응답

3. 결 론

본 논문은 흡인식 자기부상 시스템의 H^∞ 성능을 최대화하는 PID 제어기를 Ghaoui의 방법을 이용하여 구하는 방법에 대해서 서술하였다. PID 제어기의 이득을 정적출력계환 제어기로 표현하여 계수조건이 부가된 LMI 문제로 표현하고 선형화에 의한 반복계산 알고리즘을 적용하여 LMI 문제의 해를 구하였다. 시뮬레이션 결과 비교적 양호한 특성을 보였다.

(참 고 문 헌)

- [1] P. K. Shina, "Electromagnetic Suspension Dynamics & Control", Peter Peregrinus Ltd, 1987.
- [2] M. Fujita, F. Matsumura, and M. Shimizu, "H $^\infty$ Robust Control Design for a Magnetic Suspension System", 2nd International Symposium on Magnetic Bearing, pp.349-356, Tokyo, 1990.
- [3] K. J. Astrom, C. C. Hang, P. Persson and W. K. Ho, "Towards Intelligent PID Control", Automatica, vol 28, No. 1, pp. 1-9, 1992.
- [4] P. Gahinet, "Explicit Controller Formulas for LMI-Based H $^\infty$ Synthesis", Automatica, Vol. 32., No. 7, pp. 1007-1014, 1996.
- [5] V. Balakrishnan and L. El Ghaoui, "Synthesis of fixed-structure controllers via numerical optimization", Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 2678-2683, 1994.
- [6] S. Ibaraki and M. Tomizuka, "H $^\infty$ Optimization of Fixed Structure Controllers", International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Orlando, Florida, 2000.
- [7] L. El Ghaoui and F. Oustry and M. Ait Rami, "A Cone Complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 42, No. 8, pp. 1171-1176, 1997.
- [8] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", SIAM, 1994.