2001년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2001.7.18-20

주파수 영역에서의 모델 축소를 이용한 PID 제어기의 동조 알고리즘

조 준호*, 최 정내, 황 형수
원광대학교 제어계측공학과

Tuning Algorithm for PID Controller Using Model Reduction in frequency Domain

Joon-Ho Cho*, Jung-Nae Choi, Hyung-Soo Hwang,
Department of control and instrumentation Engineering, Wonkwang Univ.

Abstract - Model reduction from high order systems to low order systems in frequency domain is considered four point ($\angle G(jw)=0, -\pi/2, \pi$, and $-3\pi/2$) instead of two point ($\angle G(j\omega)=-\pi/2, -\pi$) of existing method in Nyquist curve.
The Performances of reduced order model by proposed approach is similar to original model.
In this paper, we proposed a new tuning algorithm for PID controller using model reduction in frequency domain. Simulations for some examples with varies dynamic characteristics are provided to show the effectiveness of the proposed tuning algorithm for PID controller using model reduction.

1. 서 론

PID(Proportional and Integral and Derivative) 제어기는 이해하기 쉽고 구조가 간단하며 실제 구현이 용이하여 공정 산업분야에서 널리 사용되고 있는 제어기이다. [1],[2],[3][4]. PID 제어기를 설계할 때 가장 중요한 것은 파리미터를 결정하는 것이다. 따라서 PID 제어기의 파라미터를 결정하는 방법에 대하여 많은 연구가 이루어지고 있다[5]. 그 중에서 Ziegler -Nichols Rule, Coh en-Coon Method, IAE, ISE, ITAE, IMC 방법들이 보편적으로 쓰이고 있다. 그러나 이러한 방법들 대부분은 1차 및 2차의 모델에 대해서는 적용이 용이하나, 고차모델에 대해서는 적용하기가 쉽지 않다. 따라서 보다 일반적이고 범용성을 갖는 동조법에 대하여 연구가 이루어지고 있다.[6][7]. 그 중 한가지 방법이 고차 모델을 저차 모델로 축소하여 축소모델의 동조값을 실제의 모델에 적용하는 방법이 연구되어지고 있다. 그 중 대표적인 모델 축소 방법으로는 Pade 근사화 방법, Routh stability 근사화 방법, Wang의 Nyquist 선도에 의한 근사화 방법들이 있다[8][9]. 여기서 Pade 근사화 방법, Routh stabilit 근사화 방법은 시간영역에서의 근사화 방법이고, Wang의 Nyquist 근사화 방법은 주파수 영역에서의 근사화 방법이다. 그 중에서 Wang 이 제안한 근사화 방법은 Nyquist 선도에서 $-\pi/2, -\pi$ 지점을 같게 하는 방법으로 고차 모델을 지연시간항을 갖는 2차 모델로 축소하는 방법이다. 이 근사화 방법은 실제 고차 모델의 Nyquist 선도에서 $-\pi/2, -\pi$ 지점 같게 하여 모델을 축소하는 방법이다. 하지만 이 방법은 Nyquist 선도의 $-\pi/2, -\pi$ 지점만을 같게 했기 때문에 다른 부분에서는 실제의 모델과 축소 모델 사이에는 오차가 발생한다. 본 논문은 이러한 오차를 줄이기 위하여 Wang의 방법에서 제안했던 방법에 두 점을 더 고려하여 즉, $0, -\pi/2, -\pi, \pi/2$ 4점을 고려하여 2차의 지연시간항을 갖는 축소모델을 구하였고, 축소 모델에 극점과 영점을 상쇄하는 제어기의 파라미터값을 구하여 고차의 실제 모델에 적용함으로써 범용적인 제어기를 설계하였다. 시뮬레이션 통하여 고차의 모델에 대하여도 사용할 수 있음을 확인하였다. 본 논문의 구성은 주파수 영역에서의 제안된 모델 축소방법, 범용적 PID 제어기 설계, 시뮬레이션 및 고찰, 결론으로 구성되어 있다.

2. 제안된 알고리즘에 의한 모델 축소 방법

미지의 공정에 대한 주파수 응답 $G(j\omega)$으로부터 식 2차 시연모델로 모델링 할 수 있다.
축소 모델은 2차의 시지연을 포함하므로 실근 또는 허근을 가지므로 진동하는 공정의 동특성을 표현할 수 있다.
본 논문에서는 기존의 방법에서 오는 오차를 줄이기 위해서 Nyquist 선도의 $0, -\pi/2, -\pi, \pi/2$ 4점을 고려하여 2차의 지연시간항을 갖는 축소모델을 구하는 방법을 제안하였다. 그 결과 기존의 방법보다 오차가 줄어듬을 확인 할 수 있었다. 그림 1은 제안된 축소모델의 알고리즘을 나타낸 것이다.

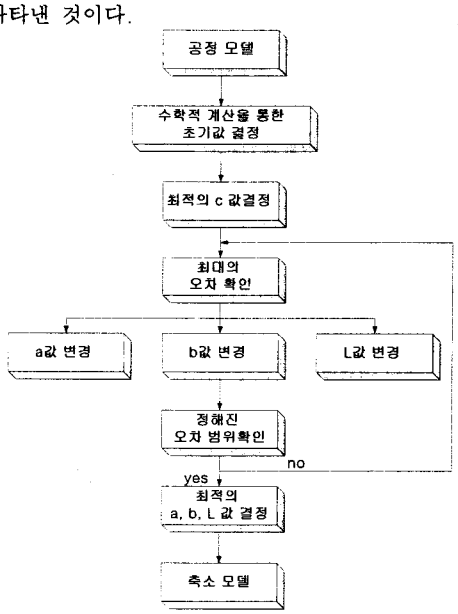


그림 1. 제안된 알고리즘

제안된 알고리즘은 크게 3단계로 나누어지며, 각 단계별 설명은 아래와 같다.

단계1) 수학적 계산을 통해 축소모델의 파리미터 값 (a, b, c, L)을 초기 값으로 사용.

- 실제의 고차 모델

$$G(s)=\frac{\beta_0 s^m+\beta_1 s^{m-1}+\cdots\cdots+\beta_{m-1}s+\beta_m}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n} \quad (1)$$

- 2차의 시간지연항을 갖는 축소모델

$$\hat{G}(s)=\frac{e^{-Ls}}{as^2+bs+c} \quad (2)$$

여기서 결정해야할 것은 a,b,c, L 의 값이고, 결정하는 방법 은 $\angle G(jw_a)=0$, $\angle G(jw_b)=-\frac{\pi}{2}$, $\angle G(jw_c)=-\pi$, $\angle G(jw_d)=-\frac{3\pi}{2}$ 인 주파수 w_a, w_b, w_c, w_d에서 원래의 고차 모델과 축소모델의 주파수 응답이 일치하도록 함으로써 미지수를 결정할 수 있다.

식 (2)의 지연시간 e^{-sL}을 Pade 근사식 사용하여 식(3)과 같이 나타내었다.

$$\hat{G}(s)=\frac{2-Ls}{Las^3+(2a+bL)s^2+(2b+Lc)s+2c} \quad (3)$$

다음과 같은 조건으로 $G(jw_a)=\hat{G}(jw_a)$, $G(jw_b)=\hat{G}(jw_b)$, $G(jw_c)=\hat{G}(jw_c)$, $G(jw_d)=\hat{G}(jw_d)$ 다음 식을 유도할 수 있다.

$$2c-(2a+bL)w_a^2+jw_a(2b+Lc-Law_a^2)=\frac{2-jLw_a}{|G(jw_a)|} \quad (4)$$

$$2c-(2a+bL)w_b^2+jw_b(2b+Lc-Law_b^2)=\frac{2-jLw_b}{-j|G(jw_b)|} \quad (5)$$

$$2c-(2a+bL)w_c^2+jw_c(2b+Lc-Law_c^2)=\frac{2-jLw_c}{-|G(jw_a)|} \quad (6)$$

$$2c-(2a+bL)w_d^2+jw_d(2b+Lc-Law_d^2)=\frac{2-jLw_d}{j|G(jw_d)|} \quad (7)$$

식 (5)와 식(6)과의 관계에서 식 (8)를 구할 수 있다.

$$(2a+Lb)(w_c^2-w_b^2)=\frac{Lw_b}{|G(jw_b)|}+\frac{2}{|G(jw_c)|} \quad (8)$$

식 (5)과 식(7) 관계에서 식 (9)를 구할 수 있다.

$$\frac{1}{L}(2a+Lb)(w_d^2-w_b^2)=\frac{Lw_b}{|G(jw_b)|}+\frac{Lw_d}{|G(jw_d)|} \quad (9)$$

식 (8)과 식 (9)의 관계에서 식(2)의 미지값 L을 구하면 식 (10)와 같다.

$$L=\frac{(w_d^2-w_b^2)|G(jw_c)|}{2(w_c^2-w_b^2)}x_2-\frac{w_b|G(jw_c)|}{2|G(jw_b)|} \quad (10)$$

여기서 x_1, x_2는 아래와 같다.

$$x_1=\frac{Lw_b}{|G(jw_b)|}+\frac{2}{|G(jw_c)|},\quad x_2=\frac{w_b}{|G(jw_b)|}+\frac{w_d}{|G(jw_d)|}$$

식 (8)을 (6)에 대입하여 정리하면 c 값을 구할 수 있다.

$$c=\frac{(x_1\ w_c^2)}{(w_c^2-w_b^2)2}-\frac{1}{|G(jw_c)|} \quad (11)$$

식 (6)과 식(8)의 관계에서 아래와 같이 a 값을 구할 수 있다.

$$4a+L^2aw_c^2=\frac{2x_1}{(w_c^2-w_b^2)}-\frac{L^2}{|G(jw_c)|}+L^2c \quad (12)$$

$$\therefore a=\frac{1}{4+L^2w_c^2}\left(\frac{2x_1}{(w_c^2-w_b^2)}-\frac{L^2}{|G(jw_c)|}+L^2c\right) \quad (12)'$$

마지막으로 b의 값은 식 (8)에서 구할 수 있다.

$$b=\frac{1}{L}\left(\frac{x_1}{(w_c^2-w_b^2)}-2a\right) \quad (13)$$

지금까지 구한 수식은 지연시간 (e^{-sL})을 pade 근사식으로 하여 실제의 값과 오차가 발생한다. 따라서 수식에의해 구한값은 초기치로 활용할 수 있다.

단계2) 최적의 c값 결정

$\angle G(0)$일 때의 크기 와 $\angle\hat{G}(0)$ 일 때의 크기가 같게 되는 것은 오직 c값에 의해 결정된다. 즉, 단계1)에서 구한 a, b, L 값은 고정하고, c값만을 변화해 가면 최적의 c값을 알고리즘을 통해 찾는다.

단계3) 최적의 a, b, L 값 결정

L값은 지연시간에 포함된 값이다. 그러므로 L값에 따라 Nyquist 선도의 $\angle G(\frac{\pi}{2})$와 $\angle\hat{G}(\frac{\pi}{2})$일 때 의 크기가 같게되는 L값에 의해 결정될 수 있다. 나머지 두 개의 값 a , b는 각 각 Nyquist 선도의 $-\pi, -\frac{\pi}{2}$ 지점의 크기를 각 각 결정 할 수 있다. 따라서 $-\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{\pi}{2}$ 3점에서 각각 $\angle G(jw)$일 때의 크기와 $\angle\hat{G}(jw)$일 때의 크기를 비교해서 가장 큰 차이가 나는 것의 값을 변경하면서 이 세 개의 오차의 합이 정해진 오차범위 안으로 들어오게 하는 알고리즘을 통해 최적의 a, b, L 값을 찾는다.

3. 축소 모델을 이용한 PID 동조 알고리즘

저차 및 고차 ,크고 작은 지연시간, 단조롭거나 진동하는 공정의 다른 동적인 성질을 가진 선형의 공정들에 대하여 일정한 성능을 얻을 수 있도록 제안된 축소모델에 적합한 제어기를 설계하였다.

제어기의 전달함수는 식 (14)과 같다.

$$G_c(s)=K_P+\frac{K_I}{s}+K_Ds=\frac{As^2+Bs+C}{s} \quad (14)$$

루프 전달함수의 식은 (15)으로 표현된다.

$$G(s)_c\hat{G}(s)=\frac{k(e^{-sL})}{s} \quad (15)$$

여기서 $A=(K_D/k)$, $B=(K_P/k)$, $C=(K_I/k)$이며, A=a, B=b, C=c 이다.

개루프 제동비 ζ_0는 다음 식으로 정의된다.

$$\zeta_0=\begin{cases}\frac{b}{2\sqrt{ac}} & b^2-4ac\geq 0\\ 1 & b^2-4ac<0\end{cases} \quad (16)$$

여기서 a, b, c 는 모델 파라미터이고 식(11)~(13)으로부터 구할 수 있다.

원하는 두 극점이 다음과 같다고 하면

$$s=-w_n\zeta_n\pm jw_n\sqrt{1-\zeta_n^2} \quad (17)$$

위상과 크기 조건으로부터 다음을 얻는다.

$$-w_n\sqrt{1-\zeta_n^2}L-(\pi-\cos^{-1}\zeta_n)=-\pi \quad (18)$$

$$w_n = \frac{\cos^{-1}\zeta_n}{L\sqrt{1-\zeta_n^2}} \quad (19)$$

$$k = w_n e^{-w_n L\zeta_n} \quad (20)$$

식(20)에서 보면 k는 ζ에 의해 결정됨을 알 수 있고, 실제의 공정이 단조로운 응답을 보일 때는 ζ=0.7071에서 좋은 응답을 얻을 수 있고, 실제의 공정이 진동하는 공정에 대해서는 ζ=1, 즉 s 가 중근을 갖을 경우 좋은 응답을 얻을 수 있다.

4. 시뮬레이션 및 고찰

시뮬레이션을 통해 모델 축소 방법에 있어 기존의 방법과 제안된 알고리즘을 통한 축소 방법을 그래프를 통해 비교, 분석하였고 범용적 제어기의 성능을 확인하였다.

Example 1)

- 실제의 고차 모델

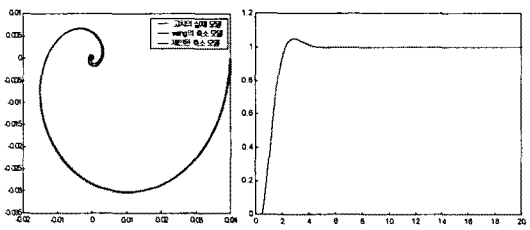
$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{(s+1)(s+5)^2}$$

- 2차의 시간지연항을 갖는 축소모델

$$\hat{G}(s) = \frac{e^{-0.6072s}}{6.8622s^2+32.1506s+25.0632}$$

- 제어기 전달함수

$$G_c(s) = 26.8146 + \frac{20.8869}{s} + 5.7233s$$



a) 기존의 방법과 비교 b) 제어기 응답

그림2 $G(s)=\frac{e^{-0.5s}}{(s+1)(s+5)^2}$ 에 대한 축소모델 및 시간응답

Example 2)

- 실제의 고차 모델

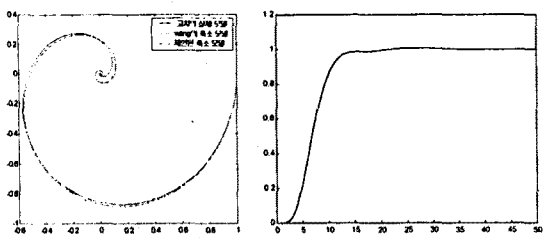
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^8}$$

- 2차의 시간지연항을 갖는 축소모델

$$\hat{G}(s) = \frac{e^{-3.6006s}}{8.4030s^2+4.8632s+1.0003}$$

- 제어기 전달함수

$$G_c(s) = 0.6840 + \frac{0.1407}{s} + 1.1819s$$



a) wang의 모델과 비교 b) 제어기 응답

그림 3 $G(s)=1/(s+1)^8$ 에 대한 축소모델 및 시간응답

그림 2,3은 제안된 축소 모델과 기존이 축소모델을 비교하였고, 축소 모델 적합한 범용적 제어기를 설계하여 나타내었다. 그림에서 보면 저차 시스템의 경우 기존의 방법과 제안된 방법이 비슷하지만 고차 시스템일 경우 기존의 방법보다 제안된 방법이 실제의 시스템에 더욱 근사함을 알 수 있었다. 제안된 축소 모델에 적합한 제어기를 설계하여 나타내었다.

5. 결 론

기존의 PID 동조 방법은 대부분은 1차 및 2차의 모델에 대해서는 적용이 용이하나, 고차모델에 대해서는 적용하기가 쉽지 않다. 따라서 고차모델을 저차 모델로 축소하는 방법이 많이 연구 되어지고있다. 본 논문은 고차 모델과 축소한 모델의 오차를 최소로 하기 위해서 제안한 축소 알고리즘을 통해 고차모델을 2차의 시간지연항을 갖는 저차 모델로 축소하였고, 축소 모델에 접합한 제어기를 설계함으로써 저차 및 고차에 대해 적용할 수 있는 제어방법을 제안하였고 시뮬레이션 결과 우수한 방법임을 확인 할 수 있었다.

[참 고 문 헌]

[1] K.J.Astrom and T.Hagglund, "Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and ampli- tude margins", Automatica, vol. 20, no. 5, pp. 645-651,1984.

[2] W.K.Ho, C.C.Hang, W.Wojsznis, and Q.H.Tao, Freque- ncy domain approach to self-tuning PIDcontrol", contr.Eng. Practice, vol. 4, no.6, pp.807-813, 1996

[3] W.K.Ho, O.P.Gan, E.B.Tay, and E.L.Ang, "Performance and gain and phase margins of well-known PID tuning formulas", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 4, pp. 473-477, 1996

[4] M.Zhuang and D.P.Atherton, "Automatic tuning of optimum PID controllers", Proc. Inst. Elect. Eng., vol. 140, pt. D, no. 3, pp. 216-224, May 1993.

[5] K.J.Astrom, "Automatic tuning of PID regulators", Instrument Soc. Amer., 1998

[6] W.K.Ho, C.C.Hang, and L.S.Cao, "Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications", Automatica, vol. 31, no. 3, pp. 497-502, 1995.

[7] K.Y.Kong, S.C.Goh, C.Y.Ng, H.K.Loo, K.L.Ng, W.L. Cheong, and S.E.Ng, "Feasibility report on frequency domain adaptive controller", Dept. Elect. Eng., Nat. Univ. Singapore, Internal Rep., 1995.

[8] Q.G.Wang, T.H.Lee, H.W.Fung, Q.Bi and Y. Zhang, "PID tuning for Improved performance", IEEE Trans. Control System. Technol., vol. 7, no.4, pp. 457-465, July 1999.

[9] Y.Shamash, "Model reduction using the Routh stability criterion and the Pade approximation technique", Int. J. Control, vol. 21, No. 3, pp. 475-484, 1975