

고속 월쉬 변환을 이용한 분포정수계의 해석에 관한 연구

김태훈¹ 김진태¹ 채영무² 이해기³ 김종부⁴ 안두수¹
¹성균관대학교, ²충주대학교, ³충청대학, ⁴인덕대학

A Study on Analysis of Distributed Parameter Systems via Fast Walsh Transform

Tai-Hoon Kim¹ · Jin-Tae Kim¹ · Young-Moo Chae² · Hae-Gi Lee³ · Jong-Boo Kim⁴ · Doo-Soo Ahn¹
 Sung Kyun Kwan Univ¹, Chung Ju Univ², Chung Cheong Univ³, In Dug Univ⁴

Abstract - This study uses distributed parameter systems as the spatial discretization technique, modelling in lumped parameter systems, and applies orthogonal transform and the Picard's iteration method to high order partial differential equations and matrix partial differential equations. In exercising optimal control of distributed parameter systems, excellent consequences are found without using the existing decentralized control or hierarchical control method.

1. 서 론

대부분의 시스템은 그 구조가 시간과 공간에 널리 분포되어 있기 때문에 집중정수 모델로 표현하여 시스템의 동적 특성을 해석하고 제어하기에는 여러 가지 문제점이 있다. 시스템의 상태는 시간과 공간의 영향을 받는 상태변수가 되므로 그 동적 특성은 편미분 방정식으로 표현되어 분포정수계로 모델링하게 된다.[1-2]

분포정수계는 시스템이 두 개 이상의 독립변수로 표현되고, 또한 각 변수에 대한 미분을 포함하는 편미분 방정식으로 표현되므로 분포정수계에 직접적인 최적제어 논리를 도입하여 최적화하는 것은 매우 어렵다. 따라서 분포정수계를 특정 동작점(equilibrium point)에서 집중정수계로 변환한 후 기존의 최적제어방법을 도입함으로써 분포정수계의 최적화를 수행하고 있다.[3-4]

분포정수계를 집중정수계로 모델링하여 처리 할 경우 매우 큰 차원의 시스템으로 변환되어 제어기의 설계가 어렵고 분산형 제어이론을 도입 할 경우 분산된 각 부 시스템간의 상호 정보 전달관계의 처리에 있어서 복잡한 과정을 거쳐야 하는 어려움이 있다.

본 연구에서 제시하고자하는 새로운 알고리즘은 WALSH 함수 고유특성을 그대로 유지할 수 있는 유한 급수전개방법을 이용하며, 계산의 편리성을 위하여 고속 WALSH 변환[5]을 사용하였다. 본 연구방법에는 역행렬의 연산이 필요 없으며, 기존의 방법에 의해 처리하기 힘든 분포정수계, 선형시변계, 비선형계의 해석 및 제어 문제어도 쉽게 적용할 수 있다.

본 연구에서 Picard의 반복변산법[5]의 적용은 시스템의 해석을 위해, 상태방정식을 적분방정식으로 변환하고 적분 항에 포함된 미지의 상태벡터를 최초 초기조건으로 가정하여 적분방정식으로부터 상태벡터를 구하고, 이 값을 다시 적분 항에 포함된 상태벡터에 치환하여 새롭게 수정된 상태벡터를 구하는 반복변산법으로 오차가 0으로 수렴될 때의 상태벡터를 찾아내었다. 또한 WALSH 함수의 특성을 이용하여 미분방정식을 간략화된 대수방정식으로 변환하여 처리할 수 있도록 하였다. 그리고 WALSH 함수를 도입할 때 수반되는 적분연산 행렬이 많은 0 요소를 포함하는데 착안하여 고차적분연산행렬을 직접 이용하지 않고 대응되는 요소만을 이용하여 리카티방정식의 해 및 시스템의 해를 보다 간편하게

결정할 수 있음을 보였다.

2. 본 론

2.1 고속월쉬변환

고속월쉬변환은 이산월쉬변환을 보다 신속하게 처리하기 위해 사용된다. 월쉬함수 m 항 전개를 이용하는 경우 모든 월쉬함수는 m 개의 세부구간에서 +1 혹은 -1의 값만으로 구성되므로 각 월쉬계수들은 원 함수의 이산값들의 곱·감산에 의하여 간단히 계산할 수 있다. 고속월쉬변환 알고리즘은 Welch과 Guinn에 의해 제시되었으며 고속 푸리에변환(fast Fourier transform)의 주파수축을 알고리즘(decimation-in frequency Algorithm)을 기초로 하여 개발되었다[6-7].

고속월쉬변환 알고리즘은 그림 2.1과 같으며 그림에서 점선은 감산을 나타내고 실선은 가산을 나타낸다.

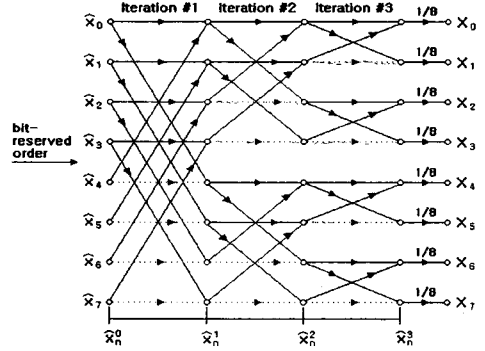


그림2.1 고속월쉬변환 신호흐름선도

Fig 2.1 The flow diagram for a paley-order fast Walsh transform

그림에서와 같이 고속월쉬변환은 다음의 과정을 따른다.

[1] 월쉬함수 m 항 전개를 이용하는 경우 고속월쉬변환은 $\log_2 m$ 개의 단으로 나눈다.

[2] 최초의 단($p=0$)에 \bar{x}_j 를 비트 자리바꿈(bit-reverse)하여 증가순서대로 재배열하고 p 번째 단과 $p-1$ 번째 단과의 관계는 다음과 같다.

$$x_{(h)}^p = x_{(h)}^{p-1} + x_{(j+h)}^{p-1} \tag{2.1}$$

$$x_{(j+h)}^p = x_{(h)}^{p-1} - x_{(j+h)}^{p-1} \tag{2.2}$$

단, $j = m/2^p$, $h = l + k \cdot 2^p$, $k = 0, 1, \dots, 2^{p-1} - 1$,
 $l = 0, 1, \dots, j-1$, $v = \log_2(j+1)$

[3] 고속월쉬변환과 역변환은 똑같은 과정에 의해 이루어지며 식(2.6)에서 보듯이 고속월쉬변환의 경우에는 식(2.1), (2.2)의 계산결과에 $1/m$ 을 곱하면 된다.

윌쉬함수 m 항전개를 이용하는 경우 고속윌쉬변환은 p ($= \log_2 m$)개의 단계가 필요하고 각 단계에서 m 번의 가·감산이 필요하므로 총 $m \log_2 m$ 번의 가·감산을 통하여 이루어진다.

2.2 행렬식으로 표현된 분포정수계의 모델링

다음과 같은 분포정수계를 고려한다.

$$\frac{\partial \mathbf{x}(y, t)}{\partial t} = \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{x}(y, t)}{\partial y} + \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(y, t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(y, t) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x}(y, 0) = \mathbf{x}_0(y) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{x}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(y, t) = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{x}(y, t) = \begin{bmatrix} x_1(y, t) \\ x_2(y, t) \\ \vdots \\ x_p(y, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(y, t) = \begin{bmatrix} u_1(y, t) \\ u_2(y, t) \\ \vdots \\ u_n(y, t) \end{bmatrix}$$

식(2.3)-(2.5)로 표현되는 분포정수계에 대한 집중정수모형을 구하기 위해 공간분할기법을 적용하고 시간의 도함수 $\mathbf{x}(y, t)$ 를 다음과 같다고 할 때

$$\frac{\partial \mathbf{x}(y, t)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t), \quad (2.6)$$

$$\text{단, } i=1, 2, \dots, p$$

중앙차분법에 의해 공간변수는 다음과 같이 근사화 된다.

$$\frac{\partial \mathbf{x}(y, t)}{\partial y} = \frac{\mathbf{x}_{i+1}(t) - \mathbf{x}_i(t)}{\Delta y} \quad (2.7)$$

$$\text{단, } \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}(y_i, t)$$

이때, 식(2.6)과 (2.7)를 식(2.3)에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) = -\frac{\mathbf{A}_1}{\Delta y} \mathbf{x}_i(t) + \frac{\mathbf{A}_1}{\Delta y} \mathbf{x}_{i+1}(t) + \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_i(t) \quad (2.8)$$

$$\text{단 } i=1, 2, \dots, n$$

따라서 위 식은 다음과 같이 n 개의 1차 선형 미분방정식으로 근사화 된다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}_1(t) &= \widehat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{x}_1(t) + \widehat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) &= \widehat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{x}_i(t) + \widehat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}_{i+1}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_i(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \mathbf{x}_n(t) &= \widehat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{x}_n(t) + \widehat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}_{n+1}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_n(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\text{단, } \widehat{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0 - \frac{\mathbf{A}_1}{\Delta y}, \quad \widehat{\mathbf{A}}_1 = \frac{\mathbf{A}_1}{\Delta y}$$

식(2.9)은 식(2.5)의 경계조건으로부터 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_n(t) = \widehat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{x}_n(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_n(t) \quad (2.10)$$

따라서 다음과 같은 pn 차 상태방정식으로 변환할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (2.11)$$

$$\text{단, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{A}}_0 & \widehat{\mathbf{A}}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{A}}_0 & \widehat{\mathbf{A}}_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widehat{\mathbf{A}}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

2.3 평가함수의 모델링

분포정수계에서 평가함수를 최소화하는 제어입력 $\mathbf{u}(y, t)$ 를 결정하고자 할 때, 평가함수를 집중정수모델의 평가함수로 근사화 시켜야 하는 문제를 포함하고 있다. 이 평가함수를 공간분할기법에 의하여 근사화 하는 방법을 설명한다.

다음의 평가함수에서

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \int_0^{y_f} [x^2(y, t) + u^2(y, t)] dy \right\} dt \quad (2.12)$$

식(2.12)의 대괄호로 표시된 수식은 공간분할기법에 의해 다음과 같이 근사화 된다.

$$\begin{aligned} J_y &= \int_0^{y_f} [x^2(y, t) + u^2(y, t)] dy \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^2(i\Delta y, t) + x^2((i+1)\Delta y, t)}{2} \Delta y \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u^2(i\Delta y, t) + u^2((i+1)\Delta y, t)}{2} \Delta y \end{aligned} \quad (2.13)$$

또한 $x_i(t) = x(i\Delta y, t)$ 이므로

$$J_y = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i^2(t) + u_i^2(t)) + \frac{x_0^2(t) + x_n^2(t)}{2} + \frac{u_0^2(t) + u_n^2(t)}{2} \quad (2.14)$$

따라서 식(2.12)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J = \frac{1}{2} \Delta y \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (2.15)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

2.4 고정된 금속판의 열 교환

금속판을 분포적으로 가열시킬 때 금속판의 온도의 분포는 식(5.1)과 같은 편미분 방정식의 분포정수계로 표현된다.

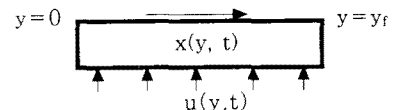


그림 5.1 금속판의 분포적인 가열

$$\frac{\partial x(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial y^2} + u(y,t) \quad (2.16)$$

$$x(y, t_0 = 0) = x_0(y) \quad (2.17)$$

$$\left. \frac{\partial x(y,t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.18)$$

$$\left. \frac{\partial x(y,t)}{\partial y} \right|_{y=y_f} = 0 \quad (2.19)$$

여기서 $x(y,t)$ 는 금속판의 온도이며 $u(y,t)$ 는 금속판을 분포적으로 가열시키는 가열입력이다. 다음의 평가함수를 최소화 하는 $u(y,t)$ 를 구하는 문제를 고려한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_0^{y_f} [Qx^2(y,t) + Ru^2(y,t)] dy dt \quad (2.20)$$

집중정수모델을 얻기 위하여 공간분할기법을 이용한다. 길이가 y_f 인 금속판을 n 개로 분할하고 분할된 부분에서의 온도 분포는 시간의 함수로 표현된다.

이때 증분의 크기는 $\Delta y = \frac{y_f}{n-1}$, $n = 5$ 이다.

분포정수계를 확산방정식에서 초기조건을 다음과 같고 할 때

$$\begin{aligned} x(y,0) &= 1 + y \\ Q &= R = 1 \\ y_f &= 4.0, \quad t_f = 1.0, \quad \Delta y = 1.0 \end{aligned}$$

이산화 표현된 분포정수계는 다음과 같은 집중정수계로 모델링된다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_5(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_5(t) \end{bmatrix}$$

또한 식(2.20)은 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt \quad (2.22)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

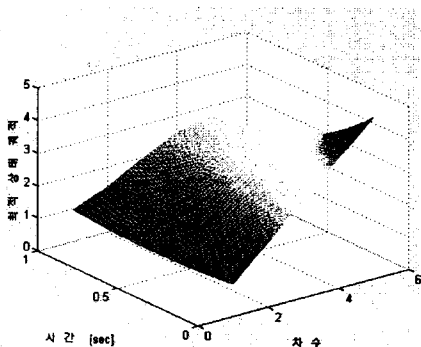


그림 5.2 적용 예의 최적 상태 궤적(3 차원)
Fig. 5.2 Optimal State Trajectory of Example

3. 결 론

본 연구에서는 분포정수계를 공간분할기법을 사용하여 집중정수계로 모델링하고 고속 WALSH 변환과 Picard의 반복연산법을 고차 편미분 방정식과 행렬 편미분 방정식에 적용하여 분포정수계의 최적제어를 간편하게 수행할 수 있는 새로운 알고리즘을 제시하였다. 본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) WALSH 함수 단일항 전개방법은 세부구간 수 만큼의 시스템차수에 해당되는 수많은 역행렬의 계산을 필요로 하나 본 연구방법에서는 이러한 역행렬의 연산이 필요 없다.

(2) 고속 WALSH 변환과 Picard의 반복연산법에 의한 단순한 가. 감산처리에 의하여, 분포정수계를 집중정수계로 모델링할 경우 시스템의 차수가 증가하게 되는 데에 따른 연산량의 증가에 무관하게 시스템의 해석 및 최적제어를 수행할 수 있다.

(3) WALSH 함수의 고유특성을 표출할 수 있는 WALSH 함수 유한급수 전개를 사용하였고, WALSH 함수의 전개 항 수에 관계없이 분포정수계의 해석 및 최적제어를 수행하였다.

(4) WALSH 함수를 도입할 때 수반되는 고차 적분 연산행렬이 많은 0 요소를 포함하는데 착안하여 고차 적분연산행렬을 직접 이용하지 않고 대응되는 요소만을 이용함으로써 리카티 방정식의 해 및 시스템의 해를 보다 간편하게 결정할 수 있었다.

위에서 언급한 결론을 통하여 분포정수계의 최적제어를 수행함에 있어 기존의 분산형 제어나 계층별 제어 등의 기법을 사용하지 않고도 우수한 결과를 얻을 수 있었다. 또한 본 연구의 방법은 선형시변계 및 비선형계로 적용으로 쉽게 이루어질 수 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] Seidman, T.I., "Approximation Methods for Distributed Parameter Systems", Distributed Parameter Systems, Pergamon Press, Elmsford, NY, pp273-, 1983
- [2] Kitamura, s., Y.Taniguchi, "Parameter Estimation of One and Two-Dimensional Heat Conduction Processes using a Microcomputer", Int. J. of Control, Vol.34, pp955-, 1981
- [3] G.R. Spalding, "Modeling Techniques for Distributed Parameter Systems", Control and Dynamic Systems, Academic Press, pp105-130, 1982
- [4] D.J. Cooper, "Comparison of linear distributed parameter filters to lumped approximants", AICHE J., Vol.32, pp.186-194, 1986
- [5] Ronald R.Mohler, *Nonlinear Systems*, vol.1, Prentice Hall, 1991
- [6] K.G.Beauchamp, *Applications of Walsh and Related Functions*, Academic Press, 1984
- [7] 이명규, "고속 Walsh 변환에 의한 선형시변계의 해석 및 최적제어를 위한 새로운 접근방법", 대한전기학회논문지 제47권 제1호, pp.75-82, 1998
- [8] 이한석, 안두수, "Walsh 단일항전개를 이용한 비선형계의 3 계층 최적 제어", 대한전기학회논문지, 제45권, 제12호, pp.1769-1776, 1996
- [9] 안두수, "적교함수와 응용", 복두출판사, 1997
- [10] 안두수, 이승 "Walsh 함수에 의한 분포정수계의 최적 제어 입력 결정", 대한전기학회논문지, 42권 8호, pp.114-123, 1993.