

**불확실한 비선형 계통에 대한 간접 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기 설계**

서삼준\*, 서호준\*\*, 김동식\*\*, 박귀태\*\*\*

\*안양대 전기전자공학부, \*\*순천향대 정보기술공학부 \*\*\*고려대 전기전자전파공학부

**Design of Indirect Adaptive Fuzzy Sliding Mode Controller for Uncertain Nonlinear Systems**

Sam-Jun Seo, Ho-Joon Seo, Dong-Sik Kim, Gwi-Tae Park  
Anyang University, SoonChunHyang University, Korea University

**Abstract** - In this paper, without mathematical modeling dynamics, the plant parameter in sliding mode are estimated by the indirect adaptive fuzzy control. Adaptive laws for fuzzy parameters and fuzzy rule structure are established so that the whole system is stable in the sense of Lyapunov stability. The computer simulation results for inverted pendulum system show the performance of the proposed fuzzy sliding mode controller.

**1. 서 론**

가변 구조 제어 이론은 불연속적인 제어입력을 이용하여 시스템의 구조를 의도적으로 가변시킴으로써 강인한 제어특성을 얻는 제어기법으로 계통의 안정성과 함께 파라미터 및 외란에 대한 둔감성을 보장할 수 있으며 슬라이딩 모드시 동특성 방정식의 차수가 감소되어 제어기의 설계 및 해석이 용이하다는 장점을 가지고 있다.

가변 구조 제어 이론은 본질적으로 불연속 제어입력을 인가함으로써 지연시간이 존재하는 실제 계통에 적용시에는 제어기 설계시 고려하지 않은 동특성이 여기되어 상태가 채터링하는 현상이 발생하고 도달 모드시에는 가변구조가 발생하지 않는 순수한 상태 케환 특성만을 갖기 때문에 견실성을 보장받지 못하는 단점을 가지고 있다.

최근에 이러한 단점을 보완하기 위해 잘 정의 안 되고 복잡한 시스템에 적합한 퍼지 논리 제어기가 제안되었다. 퍼지 논리 제어기에서 가장 중요한 제어 규칙은 경험자의 직관이나 경험으로 얻어지나 퍼지 규칙을 얻는 체계적인 방법이 없고 거의 모든 경우 시행 착오에 의존하고 있는 실정이다.

이러한 문제점을 보완하기 위해 본 논문에서는 불확실한 비선형 계통에 대해 정확한 수학적 모델이 필요없고 Lyapunov 관점의 안정도가 보장되도록 제어규칙과 파라미터 갱신법칙을 얻을 수 있는 강인한 퍼지 슬라이딩 모드 제어기를 제안한다.

**2. 가변 구조 제어 시스템**

다음과 같이 주어지는  $n$ 차 비선형 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(n)} &= f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \\ y &= x \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $x \in R^n$ 는 상태벡터,  $u \in R$ ,  $y \in R$ 는 각각 입력과 출력이며,  $f, g: R^+ \times R^n$ 는 연속 미분 가능한 비선형 함수(smooth nonlinear function)이다. 추종오차는 다음과 같이 정의하자.

$$e = x - x_d = (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})^T \quad (2)$$

가변 구조 제어기는 일반적으로 다음과 같은 두 단계

에 의해 설계된다.

- 1) 원하는 특성을 갖는 슬라이딩 평면 설계

$$S = \{e \in R^n \mid s(e) = 0\} \quad (3)$$

- 2) 제어 입력 구성

$$u(t) = \begin{cases} u^+(x) & \text{when } s(e) > 0 \\ u^-(x) & \text{when } s(e) < 0 \end{cases} \quad (4)$$

일단 슬라이딩 모드가 일어나면 시스템의 특성은 매개변수 불확실성이나 외란에 둔감하게 된다. 따라서 상태를 슬라이딩 평면으로 도달하게 하는 도달 조건(reaching condition)을 결정하는 것이 중요하다. 이러한 도달 조건을 구하기 위해 다음과 같은 Lyapunov function candidate를 정의하자.

$$V(t) = \frac{1}{2} s(e)^2 \quad (5)$$

슬라이딩 모드를 존재하게 하는 도달 조건은 다음과 같이 구하여진다.

$$\dot{V}(t) = s(e)\dot{s}(e) < 0 \quad \text{for } e \in R^n - S \quad (6)$$

가변 구조 제어 시스템의 동특성은 도달 모드와 슬라이딩 모드로 이루어지는데 원하는 슬라이딩 모드 동특성은 적절한 스위칭 함수  $s(e)$ 를 설계함으로써 결정되는데 본 논문에서는 다음과 같은 도달 법칙을 사용하였다.

$$\dot{s}(e) = -K \text{sgn}(s(e)), \quad K > 0 \quad (7)$$

여기서, 수렴속도는 이득  $K$ 에 의해 결정된다.

입출력 관계에 존재하는 불확실성과 추정 오차를 보상하는 가변 구조 형태의 제어 입력을 구성하기 위하여 다음과 같은 스위칭 평면을 정의하자.

$$s(e) = e^{(n-1)} + k_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + k_1e + k_0 \int e dt = 0 \quad (8)$$

이와 같이 구성된 스위칭 평면의 계수는 다음과 같은 Hurwitz 다항식이 되도록 선정한다.

$$h(\lambda) = \lambda^n + k_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \dots + k_1\lambda + k_0 = 0 \quad (9)$$

따라서, 스위칭 평면의 도함수는 다음과 같이 된다.

$$\dot{s}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} k_i e^{(i)} + f(x) + g(x)u - x_d^{(n)} \quad (10)$$

식(10)을 식(7)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$s(e) \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} k_i e^{(i)} + f(x) + g(x)u - x_d^{(n)} \right\} = -K |s| \quad (11)$$

이상과 같이 정의된 스위칭 평면을 이용하여 비선형 계통의 출력 오차가 슬라이딩 모드에 점근적으로 수렴하도록 제어 입력을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u^* &= g^{-1}(x) \left\{ - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e^{(i)} + f(x) + g(x)u - x_d^{(n)} - K \text{sgn}(s) \right\} \\ &= u_{eq} + u_s \end{aligned} \quad (12)$$

$$u_{eq} = g^{-1}(x) \left\{ - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e^{(i)} + f(x) + g(x)u - x_d^{(n)} \right\} \quad (13)$$

$$u_s = -g^{-1}(x) - K \text{sgn}(s) \quad (14)$$

여기서,  $u_{eq}$ 는 등가 제어 입력이고,  $u_s$ 는 스위칭 제어 입력이다.

### 3. 간접 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어

앞에서 기술한 가변 구조 제어 시스템은 계통의 수학적 모델에 기초하여 전개된 것이므로 계통에 대한 정확한 수학적 모델을 얻을 수 없는 경우에는 적요하기 어렵다. 따라서, 본 연구에서는 퍼지 모델 식별과정과 퍼지 관계 모델링 기법을 이용하여 퍼지 모델의 전진부 구조를 식별하고 입출력 선형화 제어를 가변구조 제어 기법에 의해 설계함으로써 Wang이 설계한 기법에 비해 모델링 오차에 대한 강인성을 개선할 수 있는 간접 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기를 제안한다.

#### 3.1 퍼지 모델 식별

먼저 퍼지 모델의 형태는 if-then-의 언어 규칙 형태로 가정하고 각 언어 규칙의 후건부는 퍼지 기저 함수의 선형 결합으로 가정한다. 즉,  $f(x)$ ,  $g(x)$ 를  $j$ 번째 규칙이 식(15)와 같이 표현되는  $N$ 개의 퍼지 규칙들에 의해 표현된다고 가정한다.

$$R_{gi}: \text{If } x_1 = G_{1j} \text{ and } x_2 = G_{2j} \text{ and } \dots \text{ and } x_n = G_{nj} \\ \text{then } \hat{g}(x | \theta_g) = \theta_g^T \xi_g(x) \\ R_{fj}: \text{If } x_1 = F_{1j} \text{ and } x_2 = F_{2j} \text{ and } \dots \text{ and } x_n = F_{nj} \\ \text{then } \hat{f}(x | \theta_f) = \theta_f^T \xi_f(x)$$

여기서  $F_{ij}$  와  $G_{ij}$  는  $j$  번째 퍼지 규칙에서 퍼지 변수  $x_i$ 의 언어 값이고,  $\theta_f = (\theta_{f1}, \theta_{f2}, \dots, \theta_{fn})^T$  와  $\theta_g = (\theta_{g1}, \theta_{g2}, \dots, \theta_{gn})^T$  는 각각  $f$ ,  $g$ 의 파라미터 벡터이고  $\xi_f$  와  $\xi_g$  는 퍼지 기저 함수 벡터로서 각 요소에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\xi_f(x) = (\xi_{f1}(x), \xi_{f2}(x), \dots, \xi_{fn}(x))^T \\ \xi_g(x) = (\xi_{g1}(x), \xi_{g2}(x), \dots, \xi_{gn}(x))^T \quad (15)$$

$$\xi_{fj}(x) \triangleq \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_{ij}}(x_i)}{\sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n \mu_{F_{ij}}(x_i)} \quad (16)$$

$$\xi_{gj}(x) \triangleq \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{G_{ij}}(x_i)}{\sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n \mu_{G_{ij}}(x_i)}$$

최종적으로 퍼지 규칙들의 집합으로부터 비선형 함수의 추정치  $\hat{f}(x | \theta_f)$ ,  $\hat{g}(x | \theta_g)$ 는 다음과 같이 가중 평균 비퍼지화 식으로부터 구해진다.

$$\hat{f}(x | \theta_f) = \frac{\sum_{j=1}^N \theta_{fj} \mu_{R_{fj}}(x)}{\sum_{j=1}^N \mu_{R_{fj}}(x)} \\ \hat{g}(x | \theta_g) = \frac{\sum_{j=1}^N \theta_{gj} \mu_{R_{gj}}(x)}{\sum_{j=1}^N \mu_{R_{gj}}(x)} \quad (17)$$

또한 비선형 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 는 다음 식에 의해 계산된다.

$$\hat{f}(x | \theta_f) = \theta_f^T \xi_f(x) \\ \hat{g}(x | \theta_g) = \theta_g^T \xi_g(x) \quad (18)$$

위와 같이 비선형 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 추정된다고 가정할 경우 식(13)의 등가 제어 입력과 식(14)의 스위칭 제어 입력은 다음과 같이 바뀌게 된다.

#### 3.2 파라미터 추정을 위한 적응 규칙

퍼지 시스템  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 파라미터 벡터  $\theta_f$ ,  $\theta_g$ 에 대한 적응 규칙을 구하기 위하여 먼저 다음과 같은 최소 근사 오차 (minimum approximation error)를 정의하자. 최소 근사 오차  $w$ 는 현재 추정하고자 하는  $\hat{f}$ 와  $\hat{g}$ 와 실제값의 오차들을 결합시킨 형태의 근사 오차이

다.

$$w = (f(x) - \hat{f}(x | \theta_f^*)) + (g(x) - \hat{g}(x | \theta_g^*)) u_{eq}^c \quad (19)$$

여기서  $\theta_f^*$ ,  $\theta_g^*$ 는 각각 다음 식을 만족시키는 값으로 정의한다.

$$\theta_f^* = \min_{\theta_f \in \Omega_f, x \in U_x} [\max |f(x) - \hat{f}(x | \theta_f)|] \\ \theta_g^* = \min_{\theta_g \in \Omega_g, x \in U_x} [\max |g(x) - \hat{g}(x | \theta_g)|] \quad (20)$$

$\Omega_f$ ,  $\Omega_g$ 는 상수  $M_f$ ,  $M_g$ 에 대하여 설계자에 의하여 다음 식과 같이 정해지는 파라미터 집합이다.

$$\Omega_f = \{ \theta_f | | \theta_{fj} | \leq M_f \}, \quad \Omega_g = \{ \theta_g | | \theta_{gj} | \leq M_g \}$$

따라서  $s(e)$ 의 도함수  $\dot{s}(e)$ 는 다음과 같이 다시 정리될 수 있다.

$$\dot{s}(e) = (\hat{f}(x | \theta_f^*) - \hat{f}(x | \theta_f) + (\hat{g}(x | \theta_g^*) - \hat{g}(x | \theta_g)) u_{eq}^c \\ + g(x) u_s^c + w) \quad (21)$$

$\hat{f}(x | \theta_f)$ 와  $\hat{g}(x | \theta_g)$ 는 식 (17)로 주어지는 퍼지 시스템이므로 식 (21)은 다음 식으로 표현된다.

$$\dot{s} = \Phi_f^T \xi_f(x) + \Phi_g^T \xi_g(x) u_{eq}^c + g(x) u_s^c + w \quad (22)$$

여기서,  $\Phi_f = \theta_f^* - \theta_f$ ,  $\Phi_g = \theta_g^* - \theta_g$ 이고  $\xi_f(x)$ 와  $\xi_g(x)$ 는 퍼지 기저 함수이다.

적응칙을 얻기 위하여 다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} \left\{ s^2 + \frac{1}{\gamma_1} \Phi_f^T \Phi_f + \frac{1}{\gamma_2} \Phi_g^T \Phi_g \right\} \quad (23)$$

Lyapunov 함수의 도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{V} = s \dot{s} - \frac{1}{\gamma_1} \Phi_f^T \dot{\Phi}_f - \frac{1}{\gamma_2} \Phi_g^T \dot{\Phi}_g \\ = s \left\{ \Phi_f^T \xi_f + \Phi_g^T \xi_g u_{eq}^c + g(x) u_s^c + w \right\} \\ - \frac{1}{\gamma_1} \Phi_f^T \dot{\theta}_f - \frac{1}{\gamma_2} \Phi_g^T \dot{\theta}_g \quad (24) \\ = s \{ g(x) u_s^c + w \} + \frac{1}{\gamma_1} \Phi_f^T [ - \dot{\theta}_f + \gamma_1 s \xi_f ] \\ + \frac{1}{\gamma_2} \Phi_g^T [ - \dot{\theta}_g + \gamma_2 s \xi_g u_{eq}^c ]$$

$\theta_f^*$ ,  $\theta_g^*$ 는 상수이므로  $\dot{\Phi}_f = - \dot{\theta}_f$ ,  $\dot{\Phi}_g = - \dot{\theta}_g$ 가 되므로 최종적으로 적응칙은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{\theta}_f = \gamma_1 s \xi_f(x) \\ \dot{\theta}_g = \gamma_2 s \xi_g(x) u_{eq}^c \quad (25)$$

식(25)를 식(24)에 대입하면 Lyapunov 함수의 도함수는 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{V} = s \{ g(x) u_s^c + w \} \\ = |s| \left\{ - \frac{g(x)}{\hat{g}(x | \theta_g)} K + w \operatorname{sgn}(s) \right\} \quad (26)$$

$\dot{V} < 0$ 가 보장되기 위해서는  $K$  값을 다음과 같이 정의하여야 한다.

$$K \geq \frac{\hat{g}^U}{g_L} \omega_{\max} \quad (27)$$

여기서

$$g_L = \inf_{x \in U_x} g(x) \quad (28)$$

$$\hat{g}^U = \sup_{\theta_g \in \Omega_g, x \in U_x} \hat{g}(x | \theta_g) \quad (29)$$

$$w_{\min} \leq w \leq w_{\max} \quad (30)$$

이다.

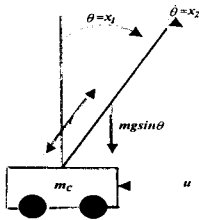
$K$ 를 식(27)과 같이 선정하면  $\dot{V} < 0$ 가 되어 안정하게 수렴됨을 보장한다. 파라미터 추정이 잘 되고 있는 경우에는 일반적으로  $w$ 는 0 또는 아주 작은 값으로 존재하기 때문에 스위칭 입력  $u_s$ 에 의하여  $\dot{V} < 0$ 을 보장할 수 있게 된다.

#### 4. 컴퓨터 모의실험

제안된 적응 퍼지 슬라이딩 제어기의 유용성을 보이기 위하여 다음과 같은 도립 진자(cart-pole) 계통을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m})} + \frac{\cos x_1}{m_c + m} u \end{aligned} \quad (31)$$

여기서, 상태  $x_1$ 과  $x_2$ 는 그림 4.1에서와 같이  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ 를 나타낸다. 또한 도립 진자의 각 파라미터는 표 4.1과 같다.



Symbol	Value
$g$	9.8 m/s <sup>2</sup>
$m_c$	1 kg
$m$	0.1 kg
$l$	0.5 m

그림 1 도립진자 시스템

퍼지 기저 함수를 구성하는 소속 함수는 식(32), 그림 4.2와 같이 5개의 Gaussian 소속 함수를 사용하고 계통 (31)은 2차 계통이므로  $m_1 = m_2 = 5$ 로 선정하였다.

$$\begin{aligned} \mu_{F_1}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right] \\ \mu_{F_2}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right] \\ \mu_{F_3}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\pi/24}\right)^2\right] \\ \mu_{F_4}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right] \\ \mu_{F_5}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right] \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (32)$$

제어 목적은 상태들을 원점으로 수렴시키는 것으로 하고 초기치는  $x(0) = (0.2, 0)^T$ 로 하였다. 제어기의 스위칭 이득  $K=0.5$ 로 적응 이득  $\gamma_1=50$ ,  $\gamma_2=1$ 로 샘플링 시간은 0.001sec로 2초 이후 부터는 정현파 외란  $2 \sin(20\pi t)$ 를 인가하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

그림 2에 제안한 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기의 위치 응답을 나타내었고 그림 3에는 제어 입력을 표시하였다.

가변 구조 제어기의 경우 스위칭 입력의 크기  $K$ 의 크기가 클수록 외란이나 불확실성에 대한 강인성이 증가하고, 더 큰 초기 편차에 대하여도 기준 입력을 안정하게 추종하게 되지만 입력의 고주파 진동이 크게 되는 문제가 발생한다.

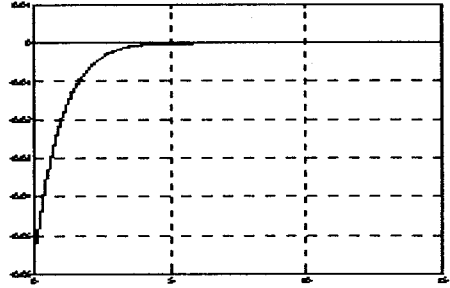


그림 2 위치 응답



그림 3 제어 입력

### 3. 결 론

본 연구에서는 불확실한 비선형 계통에 대해 정확한 수학적 모델이 필요없고 Lyapunov 관점의 안정도가 보장되도록 제어규칙과 파라미터 갱신법칙을 얻을 수 있는 강인한 퍼지 슬라이딩 모드 제어기를 제안하였다. 도립 진자 시스템에 적용한 컴퓨터 시뮬레이션 결과 과도 응답없이 아주 빠른 시간에 수렴하는 특성을 보이며 비교적 단순한 적응칙에 의해 시스템의 파라미터를 잘 추종함을 알 수 있다.

#### (참 고 문 헌)

- [1] L. X. Wang, J. M. Mendel, "Fuzzy basis Functions Universal Approximation and Orthogonal Least-Squares Learning", IEEE Trans. Neural Network, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, 1992
- [2] Lin-Xing Wang, "A Course In Fuzzy Systems & Control", Prentice-Hall, 1997
- [3] M. U. Polycarpou, M. J. Mears, "Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parameterized on-line approximators", Int. J. Control, vol. 70, no. 3, pp.363-384, 1998
- [4] S. S. Ge, C. C. Hang, T. Zhang, "Adaptive Neural Network Control of Nonlinear Systems by State and Output Feedback", IEEE Trans., Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics, vol. 29, no. 6, pp.818-828, 1999
- [5] Y. G. Leu, W. Y. Wang, T. T. Lee, "Robust Adaptive Fuzzy-Neural Controllers for Uncertain Nonlinear Systems", IEEE trans. Robotics and Automation, vol. 15, no. 5, pp. 805-817, 1999