

비선형시스템의 데드비트응답 특성 연구

송자윤  
인천전문대학 제어계측과

A Study on the Deadbeat Response Attribute of Nonlinear Systems

Ja-Youn Song  
Incheon City College

**Abstract** - The subject of nonlinear control is an important area of automatic control. The behavior of nonlinear systems is much more complex. If the operating range of a control system is small, and if the involved nonlinearities are smooth, then the control system may be reasonably approximated by a set of linear differential equations.

This paper presents the deadbeat response attribute of some nonlinear systems, e.g., magnetic levitation, pendulum, van der pol oscillator etc.. The studied results through the computer simulation are shown a promising attribute of deadbeat response that the outputs of the systems are reached relatively fast the steady state.

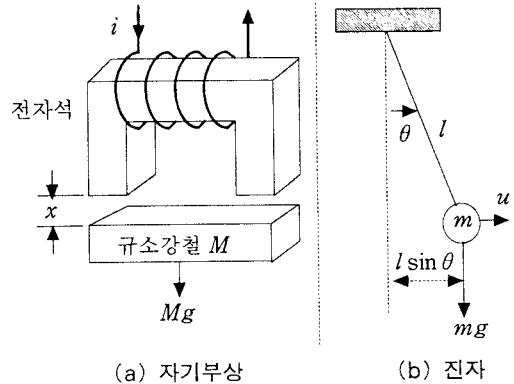


그림 1 자기부상 및 진자시스템

1. 서론

선형모델을 기반으로 설계된 제어시스템은 실 시스템에서 잘 작동하지 않을 수 있다. 이것은 비선형성이 불연속성인 경우로서 선형화될 수 없거나 선형화된 시스템의 가제어 행렬의 계수가 단수(singular)로서 가제어에 있지않은 경우이다[1]. 이러한 문제는 선형적으로 설계된 제어를 입력신호와 외란, 초기조건에 넓은 범위에서 시험되고, 제어되는 플랜트의 완전 비선형 컴퓨터 시뮬레이션에 적용한 시뮬레이션 연구에 의해서 어느정도 해결될 수 있다. 이러한 해결은 지금까지 실제적으로 시험하는 연속 아날로그 방식에서 그와 동등한 수준의 편리한 기구를 컴퓨터내에서 사용하는 디지털 시뮬레이션 방식으로 바뀌었기 때문에 가능한 것이다[2]. 본 연구는 기존의 테일러(Taylor) 급수전개에 의한 선형화 방법을 통하여 비선형시스템을 선형시스템으로 변환하고, 데드비트응답 특성[3]을 선형과 비선형의 경우에 대해서 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 비교 분석하였다. 비선형 플랜트모델로서 자기부상(magnetic levitation)[4-8], 진자(pendulum)[2,4], 밴더폴발진기(van der pol oscillator)[2] 등을 사용하였다. 여기서 자기부상의 경우는 선형화된 시스템에서만 데드비트응답을 보이고, 비선형시스템에서는 발산하므로 충분한 선형화 보상이 필요함을 알게 되었으며, 진자와 밴더폴발진기의 경우는 선형화 된 시스템과 비선형시스템 모두에서 비슷한 데드비트응답 특성을 보였다. 기타 여러 시스템에 대해서 실행한 결과 비선형시스템은 각각 독특한 특성을 가지므로 충분한 선형화 보상을 통하여 데드비트응답을 얻을 수 있음을 제시하였다.

2. 비선형시스템의 선형화

2.1 비선형 상태방정식

비선형 상태방정식은 그림 1(a)에서 식 (1), 그림 1(b)에서 식 (2), 그리고 밴더폴발진기 시스템에 대해서 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{L}{4M} \frac{x_3^2}{x_1} + g \\ -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} u \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ -\frac{g}{l} \sin \theta_1 - \frac{b}{m l^2} \theta_2 + \frac{u}{m l^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 + (1-z_1^2)z_2 + u \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서  $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{x_1}$  : 전자석코일의 인덕턴스 [H]

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$

$N$  : 전자석의 코일권수

$S$  : 전자석의 극면적 [ $m^2$ ]

$x_1$  : 전자석과 규소강철간의 공극 [ $m$ ]

$R$  : 전자석 코일의 저항 [ $\Omega$ ]

$M$  : 규소강철의 질량 [ $kg$ ]

$g$  : 중력가속도 [ $m/s^2$ ]

$x_3$  : 전자석에 흐르는 전류 [ $A$ ]

$\theta_1$  : 진자의 각변위 [ $rad$ ]

$l$  : 고정점에서 진자의 매달린 길이 [ $m$ ]

$b$  : 진자의 마찰계수 [ $Nm/rad/s$ ]

$m$  : 진자의 질량 [ $kg$ ]

$z_1$  : 밴더폴발진기의 출력변위  $z$

이고,  $u$  는 제어입력으로서 자기부상의 경우는 전자석 회로의 전압 [ $V$ ], 진자의 경우는 가해준 힘 [ $N$ ], 밴더폴의 경우는 가해준 에너지 [ $J$ ]이다.

## 2.2 선형 상태방정식

식 (1)~(3)을 테일러 급수전개에 의해 선형화하면 다음의 식 (4)~(6)과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{x_{10}} x_1 - \sqrt{\frac{gL}{Mx_{10}}} x_3 \\ -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} u \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ -\frac{g}{l} (\cos \theta_{10}) \theta_1 - \frac{b}{ml^2} \theta_2 + \frac{u}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 + (1-z_{10}^2)z_2 + u \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서, 시스템은 평형점  $x_0, \theta_0, z_0$  부근에서 선형화되어  $x_{10} = x_0 =$  상수,  $x_{20} = \dot{x}_{10} = 0, \dot{x}_{20} = 0$  이므로 전류의 공칭값은  $\dot{x}_{30} = i_0 = \sqrt{\frac{gMx_{10}}{L}}$  로 되고, 진자시스템에서의 평형점은  $\sin \theta_{10} = 0, \theta_{20} = \theta_0 = 0$  이므로  $\theta_{10} = 0, \pi, 2\pi, \dots$  이다. 그리고 밴더폴 발진기시스템에서는 평형동작점이  $z_{20} = z_0 = 0, \dot{z}_0 = 0$  이므로  $z_{10} = u$  임을 알 수 있다.

## 3. 데드비트 제어시스템 구성

식 (4)~(6)으로 선형화된 연속계의 상태방정식으로 구성되는 시스템에 대해서 데드비트 응답 특성을 검토하기 위하여 다음과 같은 이산계의 상태방정식으로 변환하여 표현한다[3].

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (7)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (8)$$

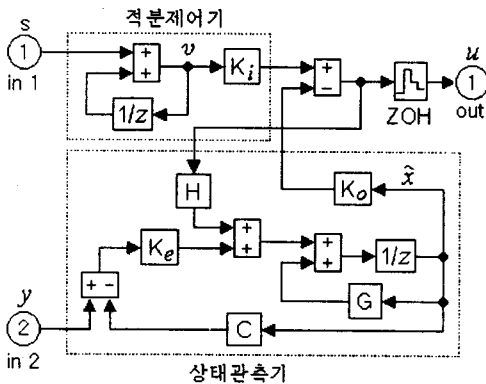


그림 2 데드비트제어기

설계된 데드비트제어기의 구성은 그림 2에 나타낸 바와 같이 적분제어기와 전차수 상태관측기[3]로 구성되어 있으며, 연속시간계의 시스템제어를 위하여 영차홀드(ZOH)를 포함하고 있다.

제어기의 적분이득상수  $K_i$ 와 상태관측기 이득행렬  $K_o$ 는 식 (9)와 같이 표현되며, 식 (9)에서  $\hat{K}$ 는 제어시스템의 특성방정식을 0으로 되게 하는 이득행렬이다.

$$[K_o \ ; \ K_i] = [\hat{K} + Q] \begin{bmatrix} G - I_n & H \\ \vdots & \vdots \\ CG & CH \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\hat{K} = Q[\hat{H} \ \hat{G}\hat{H} \ \hat{G}^2\hat{H} \ \hat{G}^3\hat{H}]^{-1}\hat{G}^4$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G & H \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = [0001], \quad I_n : \text{단위행렬}$$

제안된 제어기에서 사용된 전차수 상태관측기의 상태관측 이득행렬  $K_e$ 는 Ackermann의 공식에 의해서 다음과 같이 주어진다.

$$K_e = \varphi(G) \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서  $\varphi(G) = G^3 + a_1 G^2 + a_2 G + a_3 I$  이고, 설계된 오차 다이내믹(error dynamics)의 특성다항식을 나타내며, 데드비트제어를 위해서 본 논문에는  $\varphi(G) = G^3$  으로 선정하였다. 식 (9)와 (10)은 자기부상 시스템의 경우에 적용되며, 진자와 밴더폴 발진기시스템의 경우에는 상태가 2차행렬로 구성되므로  $\hat{K}, \hat{H}, Q, K_e, \varphi(G)$ 는 다음식을 적용한다.

$$\hat{K} = Q[\hat{H} \ \hat{G}\hat{H} \ \hat{G}^2\hat{H}]^{-1}\hat{G}^3$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G & H \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \varphi(G) \begin{bmatrix} C \\ CG \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = [001], \quad \varphi(G) = G^3, \quad \varphi(G) = G^2$$

## 4. 컴퓨터 시뮬레이션

앞장에서 설명한 비선형시스템과 선형화된 시스템에 대해서 데드비트제어 시스템을 그림 3과 같이 구성하여 컴퓨터에서 시뮬레이션을 실행하였다. 실험에 사용된 데이터는 다음과 같다.

$$N : 2000 [\text{turns}], \quad S : 0.0064 [m^2]$$

$$x_1 : x_{10} = 0.1 [m], \quad R : 10 [\Omega]$$

$$M : 1 [kg], \quad g : 9.8 [m/s^2]$$

$$d : 1 [m/s^2], \quad l : 4 [m]$$

$$b : 1 [Nm/rad/s], \quad m : 1 [kg]$$

$$z_1 : z_{10} = 0.5$$

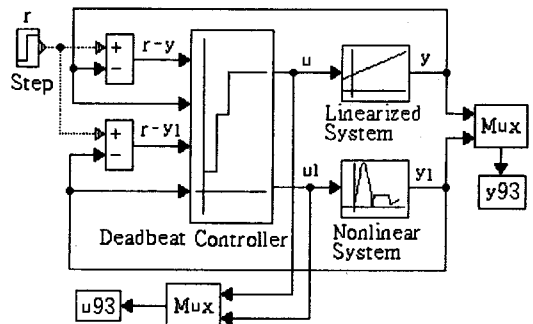


그림 3 제어시스템 구성

시뮬레이션 결과는 그림 4와 5에 자기부상, 그림 6에 진자, 그림 7에 밴더폴발진기의 경우를 나타내었다. 여기서 데드비트제어의 샘플링주기는 0.3 [s]로 하였는데 이것은 임의로 정한 것이며, 샘플링주기에 따라 출력 변화가 있으므로 이것은 차후에 검토할 것이다. 자기부상시스템은 그림 4~5에서 비선형모델의 경우, 발산하는 것을 보이지만, 선형화된 모델에서의 데드비트응답은 외란  $d$ 가 입력될 때는 불안하지만 빠르게 안정화되는 것을 볼 수 있다. 진자시스템은 그림 6에서 보는 바와 같

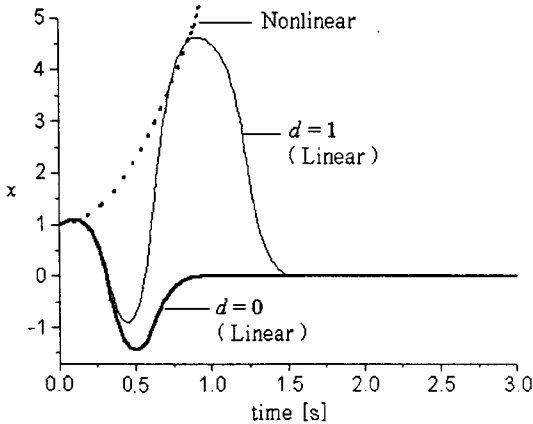


그림 4 자기부상시스템의 초기값에 의한 공극변화

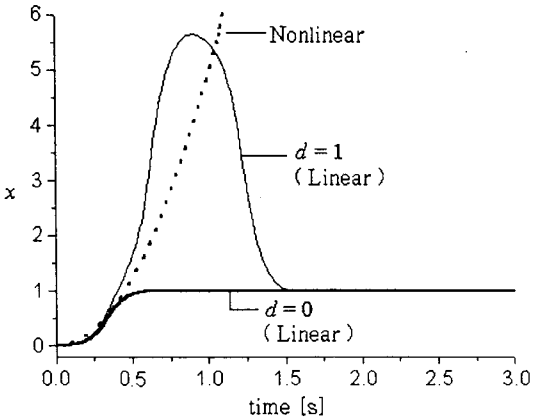


그림 5 자기부상시스템의 단위계단입력에 의한 공극변화

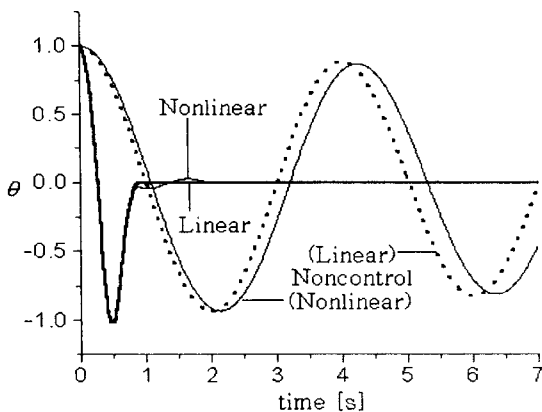


그림 6 진자시스템의 초기값에 의한  $\theta$ 의 변화

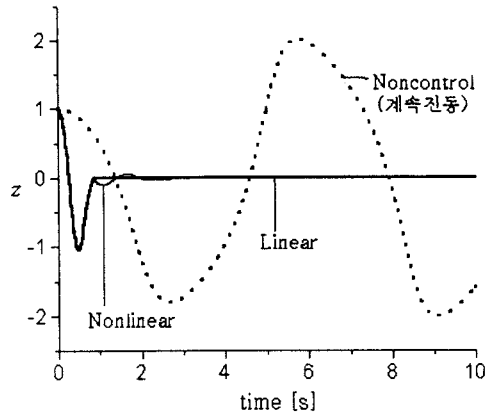


그림 7 밴더폴 발진기시스템의 초기값에 의한 진동변화

이 비선형모델과 선형화된 모델 모두 데드비트제어에 의해서 1초이내에 정정되고 있음을 보이고 있으며, 비제어 상태에서는 정정시간이 매우 길게 감쇠진동을 하고있다. 그리고 밴더폴발진기의 경우는 그림 7에서 비제어상태에서는 계속진동을 하지만 데드비트제어의 경우, 비선형모델과 선형모델 모두에서 약 1초이내에 정정되는 것을 볼 수 있다. 이상의 몇가지 비선형시스템에서 데드비트 응답은 시스템특성에 따라 다른 속성을 갖고 있으나 그 응답을 구할 수 있는 가능성을 보여 주었다.

### 3. 결 론

본 연구에서는 비선형시스템에 대하여 테일러의 급수 전개에 의한 선형화 방법을 통하여 선형시스템으로 변환하고 변환전 비선형시스템과 변환후 선형화된 시스템의 데드비트응답을 컴퓨터 시뮬레이션에 의해서 비교 검토하고, 데드비트제어의 폭넓은 적용을 고려하였다. 자기부상시스템의 경우는 다른 방법으로 많은 연구가 진행되고 있으나 본 문건을 비롯해서 앞으로 많은 문제들이 있는데, 이것은 완전한 선형화로서 해결될 것으로 보인다. 자기부상, 진자, 그리고 밴더폴 발진기시스템 모두 1초 내에 출력응답이 정상상태에 이르는 것을 보이고 있으므로 이러한 데드비트제어방법은 앞으로 더욱 빠른 안정화장치분야에 적용할 수 있을 것으로 생각한다.

### (참 고 문 헌)

- [1] Jean-Jacques Slotine, Weiping Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall, Inc., pp. 29-51, 1991.
- [2] Ken Duton, Steve Thompson, Bill Barraclough, "The Art of Control Engineering", Addison-Wesley, pp. 645-721, 1997.
- [3] Katsuhiko Ogata, "Discrete-Time Control System : 2nd Edition", Prentice-Hall International, Inc., pp. 297-629, 1995.
- [4] Bernard Friedland, "Advanced Control System Design", Prentice-Hall International, Inc., pp. 103-119, 1996.
- [5] Benjamin C. kuo, "Automatic Control Systems : 7th Edition", Prentice Hall, Inc., pp. 189-303, 1995.
- [6] Norman S. Nise, "Control Systems Engineering : 3rd edition", John Wiley & Sons, Inc., pp. 347-365, 2000.
- [7] 변지준, 주성준, 서진현, "레일이 유연한 자기부상 시스템의 비선형 귀환 선형화 제어기 개발", 대한전기학회 논문지, 44권, 1호, 1995.
- [8] 주성준, 서진현, "미지의 파라미터변화를 고려한 자기부상 열차의 강인한 비선형 귀환 선형화 제어기 개발", 대한전기학회 논문지, 44권, 10호, 1995.