2001년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2001.7.18-20

선형 시간지연 시스템의 관측기 기반 H_∞ 제어기 설계

이희송*, 마삼선**, 김진훈*
충북대학교 전기전자공학부*, 한국전력연구원**

Observer-based H_∞ Controller Design for Linear Time-delay Systems

Hee-Song Lee*, Sam-Sun Ma**, Jin-Hoon Kim*
Chungbuk National Univ.*, KEPRI**

Abstract - This paper deals with the design of observer-based H_∞ controller for linear time-delay systems. By adapting the model transformation and Lyapunov theorem, we presents a sufficient condition which meets the prescribed H_∞ norm upper bound from the exogenous disturbances to the measured outputs. The conditions are expressed in terms of coupled two matrix inequalities, and the H_∞ controller and the observer are obtained by checking the feasibility of two matrix inequalities. Finally, we shows the usefulness of our result by an example.

1. 서 론

현대제어에서 시스템의 설계방법으로 상태궤환 제어가 많이 이용되고 있다. 이 상태궤환 제어를 적용함에 있어 필요한 조건으로 시스템의 모든 상태변수값이 요구된다. 하지만 실제 상황에서는 이런 요구조건을 만족시키기는 어려움이 많다. 벡터로 표시되는 상태변수값을 아무 때나 쉽게 얻을 수 있는 경우가 일반적으로 흔치 않다. 이런 경우 입력과 출력변수 값으로부터 상태변수값을 추정하기 위해 관측기(observer)를 설계한다[1].

시스템의 성능저하뿐만 아니라 불안정성의 원인 중에 하나인 시간지연에 관해 많은 연구들이 진행중이다. 시간지연의 연구는 크게 두 가지로 구분된다. 시간지연의 정보를 포함하지 않는 지연독립 판별법[2]과 시간지연의 정보를 포함하는 지연종속 판별법이다[3]. 최근에는 지연의 정보를 포함하는, 즉 시스템의 안정성이나 설계문제에서 지연의 크기가 종속하는 지연종속 판별법이 주로 연구되고 있다. 특히 시간지연 시스템을 다양한 모델변환(model transformation) 방법을 이용하여 시스템의 안정성과 설계를 하는 연구가 진행중이다[4],[5].

또한 시스템의 외부입력으로부터 출력까지의 노옴값을 정해진 바운드까지 보장하게 하는 H_∞제어 이론이 강인제어 분야에서 효과적인 설계 기술로 간주되고 있다. 특히 최근에 강력한 툴로 각광받고 있는 선형행렬부등식(LMI)과 더불어 다양한 분야에 응용되고 있다[9].

시간지연을 갖는 시스템의 관측기 기반 H_∞ 제어기 설계에 관한 연구로 Choi[6]와 Xinping[7]은 두 개의 대수 Riccati 방정식을 통해 해를 구하였고, 최근에는 Wang[8]이 불확정성과 시간지연을 갖는 시스템의 강인 H_∞ 관측기를 Riccati 방정식을 이용해 설계하였다. 이와같이 기존의 대부분 결과들이 많은 장점을 갖고 있는 LMI를 이용하지 못했을 뿐만 아니라 시간지연의 정보를 포함하지 않는 지연독립에 관한 연구가 주로 되어왔다.

본 논문에서는 시간지연을 포함하는 시스템의 관측기 기반 H_∞ 제어기 설계를 다룬다. 지수함수를 이용한 모델변환과 Lyapunov 이론을 바탕으로 시스템의 외부입력으로부터 출력까지의 L_2이득이 주어진 값 이하를 만족시키는 충분조건을 제시한다. 얻어진 조건은 시간지연의 크기와 변화율에 종속되는 지연종속 조건이며 쉽게 제어기의 이득을 구할 수 있는 행렬부등식 형태로 제시한다. 수치예제에서는 얻어진 결과의 유용성을 보인다.

이 논문에서는, $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고 대칭(symmetric)행렬 X에 대하여 $X>0, X\geq 0$는 각각 행렬 X가 양확정(positive definite), 준양확정(semi positive definite)행렬임을 나타낸다. 그리고 $\|\cdot\|_2$는 L_2노옴으로 $\|w(t)\|_2^2=\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt$이다. 끝으로, I_n은 $n\times n$ 항등(identity)행렬이다.

2. 본 론

2.1 문제기술

다음에 오는 시간지연을 갖는 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)+A_dx(t-d(t))+Dw(t)\\ y(t)&=Cx(t)\\ z(t)&=Ex(t)\end{aligned}\tag{1}$$

여기서 $x(t)\in R^n$은 상태를 나타내며, $u(t)\in R^m$는 제어입력을 나타낸다. 또한 $y(t)\in R^p$, $z(t)\in R^q$, $w(t)\in R^r$는 각각 측정된 출력과 제어된 출력, 외부입력을 나타낸다. A, A_d, B, C, D, E는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이다. 그리고 시변 시간지연은 다음 식을 만족한다.

$$0\leq d(t)\leq d\leq\infty,\quad \dot{d}(t)\leq h\leq 1\tag{2}$$

이 때 시스템의 상태를 직접 측정하기 힘들다고 가정하면 시스템의 상태를 추정할 수 있는 시스템의 관측기를 설계해서 추정된 상태를 가지고 제어한다.

본 논문은 추정된 상태로 궤환 입력을 받아서 시간지연 시스템의 $\frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}\leq\gamma$가 되도록 하는 제어기와 관측기를 설계하는 것이 주요목적이다.

2.2 예비결과

다음에 오는 식(3)과 같은 시스템(1)의 관측기를 고려하자.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t)&=A^*\hat{x}(t)+Bu(t)+A_d\hat{x}(t-d(t))+L(y(t)-C\hat{x}(t))\\ u(t)&=-K\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{3}$$

여기서 $\hat{x}(t)\in R^n$은 관측기의 추정된 상태이고 행렬 K는 제어기 이득이고, L은 관측기 이득이다. 이 때 A^*는 다음과 같이 정의하자.

$$A^{*}=A+\Gamma \tag{4}$$

여기서 Γ는 적절한 차원을 갖는 임의의 행렬이다.
그리고 추정된 상태와 실제 상태와의 오차인 관측기 에러 $e(t)=x(t)-\hat{x}(t)$로 놓고 전개하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{e}(t)&=(A-LC)e(t)+A_{d}e(t-d(t))+Dw(t)+\Gamma\hat{x}(t)\\&=(A-LC)e(t)+A_{d}e(t-d(t))+Dw(t)+(A-A^{*})(x(t)-e(t))\\&=(A^{*}-LC)e(t)+(A-A^{*})x(t)+A_{d}e(t-d(t))+Dw(t)\end{aligned}$$

따라서 새로운 상태 $\bar{x}(t), \bar{x}(t-d(t))$를 다음과 같이 정의하고

$$\bar{x}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\e(t)\end{bmatrix},\quad \bar{x}(t-d(t))=\begin{bmatrix}x(t-d(t))\\e(t-d(t))\end{bmatrix}$$

시스템에 적용시키면 다음과 같이 표현되는 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t)&=\bar{A}\bar{x}(t)+\bar{A}_{d}\bar{x}(t-d(t))+\bar{D}w(t)\\z(t)&=\bar{E}\bar{x}(t)\end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $\bar{A}$, $\bar{A}_d$, $\bar{D}$, $\bar{E}$는 다음과 같다.

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}A-BK & BK\\A-A^{*} & A^{*}-LC\end{bmatrix},\quad \bar{A}_{d}=\begin{bmatrix}A_{d} & 0\\0 & A_{d}\end{bmatrix},$$
$$\bar{D}=\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix},\quad \bar{E}=[\ E\ \ 0\ ]$$

또한 주어진 시스템(5)으로부터 시간지연 시스템의 효과적인 해석을 위해 모델변환을 한다. 여기서는 지수함수를 이용함으로 지연종속 지수안정조건을 얻어낼 수 있다. 모델변환을 위해 시스템(5)의 상태, 외부입력, 제어된 출력을 다음과 같이 놓는다.

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t)&=e^{\alpha t}\bar{x}(t)\\\tilde{w}(t)&=e^{\alpha t}w(t)\\\tilde{z}(t)&=e^{\alpha t}z(t)\end{aligned}$$

여기서 α는 양의 상수이다. 얻어진 새로운 상태 $\tilde{x}(t)$를 미분하여 정리하면 다음과 같은 새로운 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t)&=\alpha e^{\alpha t}\bar{x}(t)+e^{\alpha t}\dot{\bar{x}}(t)\\&=\alpha e^{\alpha t}\bar{x}(t)+e^{\alpha t}[\bar{A}\bar{x}(t)+\bar{A}_{d}\bar{x}(t-d(t))+\bar{D}w(t)]\\&=(\bar{A}+\alpha I_{n})\tilde{x}(t)+e^{\alpha d(t)}\bar{A}_{d}\tilde{x}(t-d(t))+\bar{D}\widetilde{w(t)}\\\tilde{z}(t)&=\bar{E}\tilde{x}(t)\end{aligned} \tag{6}$$

위에서 얻어진 새로운 시스템(6)은 기존의 시스템(5)과 동치(equivalent)이고 모델변환계수 α에 따라서 시스템의 안정도와 시간지연의 크기를 조절할 수 있다. 따라서 지금부터는 시간지연 시스템(6)을 가지고 관측기 기반 H_∞ 제어기를 설계한다.

2.3 주요결과

다음의 정리1은 시변 시간지연을 포함하는 시스템이 주어진 성능지수 γ를 갖도록하는 관측기 기반 H_∞ 제어기 설계에 관한 조건이다.

정리1 : 시간지연 시스템(1)을 고려하자. 만약 다음에 오는 두 개의 결합된(coupled) 행렬부등식 (7),(8)을 만족하는 양확정 대칭 행렬 X_c, X_o, Q_c, Q_o와 행렬 Y_c, Y_o가 존재한다면

$$\begin{bmatrix}\Pi & X_c & X_cE^T\\X_c & -Q_c & 0\\EX_c & 0 & -I_n\end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix}\Lambda & e^{\alpha d}X_oA_d & X_oD\\e^{\alpha d}A_d^TX_o & -(1-h)Q_o & 0\\D^TX_o & 0 & -\gamma^2I_n\end{bmatrix}<0 \tag{8}$$

시간지연 시스템(1)은 제어기 입력(3)에 의해서 L_2이득이 γ보다 작게됨을 보장한다. 여기서,

$$\begin{aligned}\Pi&=X_cA^T+AX_c-Y_c^TB^T-BY_c+2\alpha X_c\\&\quad+\frac{e^{2\alpha d}}{(1-h)}A_dQ_cA_d^T+\gamma^{-2}DD^T\\\Lambda&=X_o(A+\gamma^{-2}D^TDX_c^{-1})+(A+\gamma^{-2}D^TDX_c^{-1})^TX_o\\&\quad+K^TB^TX_c^{-1}+X_c^{-1}BK-Y_oC-C^TY_o^T+2\alpha X_o+Q_o\end{aligned}$$

이 때 H_∞ 제어기 이득은 $K=Y_cX_c^{-1}$로부터 얻어지고 관측기 이득은 행렬 $L=X_o^{-1}Y_o$로부터 얻어진다.

증명 : 시스템(1)의 Lyapunov 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V(\tilde{x}(t))=\tilde{x}^T(t)P\tilde{x}(t)+\int_{-d}^{0}\tilde{x}^T(t+\theta)Q\tilde{x}(t+\theta)d\theta$$

여기서, $P=\begin{bmatrix}P_c & 0\\0 & P_o\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}Q_c^{-1} & 0\\0 & Q_o\end{bmatrix}$.

이를 시간에 따라 미분하고 식(5)를 대입해 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{x}(t))&=\tilde{x}^T(t)(\bar{A}+\alpha I_n)^TP\tilde{x}(t)+\tilde{x}^T(t)P(\bar{A}+\alpha I_n)\tilde{x}(t)\\&\quad+\tilde{x}^T(t-d(t))\bar{A}_d^Te^{\alpha d(t)}P\tilde{x}(t)\\&\quad+\tilde{x}^T(t)Pe^{\alpha d(t)}\bar{A}_d\tilde{x}(t-d(t))\\&\quad+\tilde{w}^T(t)\bar{D}^TP\tilde{x}(t)+\tilde{x}^T(t)P\bar{D}\tilde{w}(t)\\&\quad+\tilde{x}(t)Q\tilde{x}(t)-(1-\dot{d}(t))\tilde{x}^T(t-d(t))Q\tilde{x}(t-d(t))\end{aligned} \tag{9}$$

시스템의 안정성을 보장할 뿐만 아니라 L_2이득이 γ보다 작도록 보장하는 조건은 다음과 같다.

$$\dot{V}(\tilde{x}(t))+\tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t)-\gamma^2\tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t)<0$$

이로부터 식(6)과(9)을 대입하여 정리하여 행렬부등식 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$[\ \tilde{x}(t)^T\ \vdots\ \tilde{x}^T(t-d(t))\ \vdots\ \tilde{w}(t)^T\ ]\cdot W\cdot\begin{bmatrix}\tilde{x}(t)\\\tilde{x}(t-d(t))\\\tilde{w}(t)\end{bmatrix}<0$$

여기서 W는 다음과 같고,

$$W=\begin{bmatrix}\bar{A}^TP+P\bar{A}+2\alpha P+Q+\bar{E}^T\bar{E} & Pe^{\alpha d}\bar{A}_d & P\bar{D}\\\bar{A}_d^Te^{\alpha d}P & -(1-h)Q & 0\\\bar{D}^TP & 0 & -\gamma^2I_n\end{bmatrix}<0$$

Schur complements[9]를 이용하여 부등식으로 표현하면

$$\begin{aligned}W&=\bar{A}^TP+P\bar{A}+2\alpha P+Q+\bar{E}^T\bar{E}\\&\quad+\frac{1}{(1-h)}Pe^{\alpha d}\bar{A}_dQ^{-1}\bar{A}_d^Te^{\alpha d}P+\gamma^{-2}P\bar{D}\bar{D}^TP<0\end{aligned}$$

가 되며, 여기서 행렬 $W\in R^{2n*2n}$이므로 W는 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$W=\begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^T & W_3 \end{bmatrix}<0 \tag{10}$$

여기서,

$$W_1=A^TP_c+P_cA-K^TB^TP_c-P_cBK+2\alpha P_c+Q_c^{-1}+E^TE$$
$$+\frac{e^{2\alpha d}}{(1-h)}P_cA_dQ_cA_d^TP_c+\gamma^{-2}P_cDD^TP_c$$
$$W_2=(A-A^*)^TP_o+P_cBK+\gamma^{-2}P_cDD^TP_o$$
$$W_3=P_o(A^*-LC)+(A^*-LC)^TP_o+2\alpha P_o+Q_o$$
$$+\frac{e^{2\alpha d}}{(1-h)}P_oA_dQ_o^{-1}A_d^TP_o+\gamma^{-2}P_oDD^TP_o$$

이 때 W_2는 식(4)에서 정의된 A^*를 다음과 같이 Γ에 대입하여

$$\Gamma=\gamma^{-2}D^TDP_c+P_o^{-1}K^TB^TP_c$$

정리하면 W_2가 0이 된다는 사실을 쉽게 알 수 있다. 따라서 식(10)을 만족시키기 위해서는 $W_1<0$, $W_3<0$ 만을 만족시키면 된다.

W_1의 양변에 P_c^{-1}을 곱하고 $P_c^{-1}=X_c$, $KX_c=Y_c$, $P_o=X_o$, $X_oL=Y_o$로 치환하면 W_1, W_3는 다음에 오는 식을 얻을 수 있다.

$$W_1=X_cA^T+AX_c-Y_c^TB^T-BY_c+2\alpha X_c+X_cQ_c^{-1}X_c$$
$$+X_cE^TEX_c+\frac{e^{2\alpha d}}{(1-h)}A_dQ_cA_d^T+\gamma^{-2}DD^T$$
$$W_3=X_o(A+\gamma^{-2}D^TDX_c^{-1})+(A+\gamma^{-2}D^TDX_c^{-1})^TX_o$$
$$+K^TB^TX_c^{-1}+X_c^{-1}BK-Y_oC-C^TY_o^T+2\alpha X_o$$
$$+Q_o+\frac{e^{2\alpha d}}{(1-h)}X_oA_dQ_o^{-1}A_d^TX_o+\gamma^{-2}X_oDD^TX_o$$

위의 두 부등식은 Schur complements을 이용하면 정리1의 두 개의 행렬부등식과 동치라는 것을 쉽게 알 수 있다.

Remark1 : 위에서 얻어진 조건은 모델변환계수 α에 종속되어 있다. 즉 α를 적절하게 조절하면서 시간지연의 상한을 조절할 수 있지만 시간지연의 상한이 커질수록 α는 conservative해진다.

Remark2 : 정리1의 조건에서 두 개의 행렬부등식은 결합되어 있는 형태이다. 따라서 양확정 행렬 X_c, X_o, Q_c, Q_o와 행렬 Y_c, Y_o을 결정하기 위해서는 먼저 식(8)의 $\gamma_{\min}$를 만족하는 X_c, Q_c, Y_c를 구한 후, 그 때 얻어진 $X_c, Y_c, \gamma_{\min}$를 식(9)에 대입해서 풀면 X_o, Q_o, Y_o를 얻을 수 있다.

2.4 수치예제

위에서 얻어진 결과의 유용성을 보이기 위하여 수치예제를 보인다. 시간지연을 갖는 선형 시스템(1)을 고려한다. 여기서,

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix}1 & 0.5\\ 0.1 & 0.5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},$$
$$C=[\,0.5\ \ 0.5\,],\ D=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix},\ E=[\,0.3\ \ 0.3\,]$$
$$d=0.3,\ h=0,\ \alpha=1$$

이 때 시간지연 시스템의 $\gamma_{\min}$를 만족하는 H_∞ 제어기와 관측기를 구해보자. Matlab의 LMI Toolbox를 이용하여 얻어진 정리1의 조건을 만족시키는 양확정 대칭행렬 X_c, X_o, Q_c, Q_o와 행렬 Y_c, Y_o를 구해보면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$X_c=\begin{bmatrix}0.4335 & -0.0515\\ -0.0515 & 0.3119\end{bmatrix},\ Q_c=\begin{bmatrix}0.9295 & -0.0139\\ -0.0139 & 0.9789\end{bmatrix},$$
$$X_o=\begin{bmatrix}63.5066 & -46.5114\\ -46.5114 & 126.9117\end{bmatrix},\ Q_o=\begin{bmatrix}180.8632 & 8.6944\\ 8.6944 & 180.8632\end{bmatrix},$$
$$Y_c=[\,0.5979\ \ 0.6172\,],\ Y_o=\begin{bmatrix}-76.4353\\ 799.7463\end{bmatrix},\ \gamma_{\min}=4.2041$$

여기서 $K=Y_cX_c^{-1}$와 $L=X_o^{-1}Y_o$로부터 H_∞ 제어기와 관측기 이득으로 다음과 같은 값을 얻었다.

$$K=[\,1.6466\ \ 2.2508\,],\ L=\begin{bmatrix}4.6633\\ 8.0106\end{bmatrix}$$

얻어진 제어기와 관측기는 시간지연을 갖는 시스템의 안정성뿐만 아니라 외부입력으로부터 출력까지의 주어진 성능을 보장한다.

3. 결 론

이 논문에서는 시스템의 불안정성이나 성능저하의 원인이 되는 시간지연을 포함하는 시스템의 관측기 기반 H_∞ 제어기 설계를 다루었다. 모델변환 방법과 Lyapunov 이론을 바탕으로 시스템의 외부입력으로부터 출력까지의 L_2이득이 주어진 값 이하를 만족시키는 충분조건을 제시하였다. 얻어진 조건은 시간지연의 크기와 변화율에 종속되는 지연종속 조건이며 쉽게 제어기와 관측기의 이득을 구할 수 있는 두 개의 결합된 행렬부등식 형태로 제시하였다. 수치예제에서는 얻어진 결과의 유용성을 보였다.

[참 고 문 헌]

[1] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford, 1999.

[2] J. H. Kim, "Robust Stability of Linear Systems with Delayed Perturbations", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol.41, no.12, pp.1820-1822, 1996.

[3] Y. Cao, Y. Sun and C. Cheng, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.43, no.11, pp.1608-1612, 1998.

[4] S. I. Niculescu, "A Model Transformation Class for Delay-dependent Stability Analysis", *Proc. of the ACC*, San Diego, California, pp.314-318, 1999.

[5] J. H. Kim, "Delay and Its Time-Derivative Dependent Robust Stability of Time-delayed Linear Systems with Uncertainty", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol.46, no.5, pp.789-792, 2001.

[6] H.H. Choi and M. J. Chung, "Observer-based H_∞ Controller Design for State Delayed Linear Systems", *Automatica*, vol.32, no.7, pp.1073-1075, 1996.

[7] G. Xinping, L. Yichang and D. Guangren, "Observer-based Robust H_∞ Control for Uncertain Time Delay Systems", *Proc. of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation*, pp.3333-3337, 2000.

[8] Z. Wang, B. Huang and H. Unbehauen, "Robust H_∞ observer design of linear time-delay systems with parametric uncertainty", *Systems & Control Letters*, vol.42, pp.303-312, 2001

[9] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.