

**불확실한 TS 퍼지 시스템을 위한 강인한 추종 제어기의 설계**

전 상원 · 이 상준 · 주 영훈 · 박 진배  
 군산대학교 전자정보공학부 , \* 연세대학교 전기전자공학과

**Robust Tracking Controller Design for TS Fuzzy System with Uncertaintie**

Sang-Won Jeon · Sang-Jun Lee · Young-Hoon Lee · Jin-Bae Park  
 School of Electronic & Information. Eng., Kunsan Univ. \* Dept. of Electrical & Electronic Eng.

**Abstract** - This paper propose the design method of robust tracking controller for nonlinear TS fuzzy system with uncertainties. The robust tracking controller design is presented by constraint of robust stability for nonlinear system. A sufficient condition of the robust stability is presented by LMI(Linear Matrix Inequality) soltuion in the sense of Lyapunov for TS fuzzy system with uncertainties. The effectiveness of the proposed robust tracking con design is demonstrated through a numerical simulatio

이에 따른 제어기 규칙은 다음과 같다.

Controller Rule  $i$  :  
 IF  $x_1(t)$  is  $\Gamma_1^i$  and ... and  $x_n(t)$  is  $\Gamma_n^i$ ,  
 THEN  $u(t) = K_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) (3)

제어기 규칙의 비퍼지화 출력은 다음과 같다.

$$u(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(x(t))K_i(t) \quad (4)$$

여기서, 시변 불확실 행렬  $\Delta A_i$ 와  $\Delta B_i$ 를 제거하여 제어 이득 행렬  $K_i$ 를 용이하게 계산하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

**가정 1:** 불확실성을 표현하는 행렬  $\Delta A_i, \Delta B_i$ 는 다음과 같은 형태로 표현 할 수 있다.

$$[\Delta A_i, \Delta B_i] = D_i F_i(t) [E_{1i}, E_{2i}]$$

여기서,  $D_i, E_{1i}, E_{2i}$ 는 알려진 실수 행렬이며,  $F_i(t)$ 는  $F_i(t)^T F_i(t) \leq I$ 의 조건을 만족하는 Lebesgue 측정가능한 행렬함수이다. 또한,  $I$ 는 적절한 차원의 단위 행렬이다.

**2.2 비선형 시스템의 퍼지 모델링**

본 절에서는 비선형 시스템의 퍼지 모델링을 그림 1과 같은 단일 링크 유연 로봇에 적용한다. 단일 링크 유연 로봇의 동역학은 식 (5)와 같이 표현한다.

**1. 서 론**

지금까지 많은 과학자들이 퍼지 제어 시스템의 체계적인 해석과 개발을 위해서 노력해 왔고, 또한 이런 학문적인 발전의 흔적으로 많은 논문들이 발표되어 왔다. 1985년에 Tagaki-Sugeno는 현재의 TSK 퍼지모델 이라고 불리는 새로운 종류의 퍼지 추론 시스템을 제안 하였고, 퍼지 시스템의 모델링과 제어기 설계에 효과적인 방법으로 알려져 오고 있으며, 또한, 일반적 형태로 그 응용범위가 더 넓어지고 있다.

Tanaka는 TS 퍼지 모델로 주어지는 시스템의 안정도 분석과 함께 병렬 분산 보상기(PDC)를 제안하였으나, 추종제어에는 적용하지 못한 단점이 있고, 이를 발전시킨 확장 병렬 분산 보상기(EPDC) 역시, 추종문제에서 기준입력에 대한 일반형을 적용시키지 못하는 단점을 가지고 있다[4]. 따라서 본 논문에서는 추종문제에 대한 해결방법을 위의 방법들과는 다른 방법을 제시한다.

본 논문에서 제시한 추종제어기 설계 방법은 추종에 관한 기준입력을 일종의 왜란의 형태로 해석하고, 시스템의 상태를 오차 방정식의 새로운 상태로 변환시킨 후, 상태 피드백 안정화 제어기를 설계한다. 다음으로 이 제어기를 원래의 시스템에 적용시키는 방법으로 추종 제어기를 설계하는 방법을 제안한다.

본 논문의 구성은 2절에서 불확실 TS 퍼지모델의 소개와 불확실한 비선형 시스템의 TS 퍼지 모델링을 보여주고, 3절에서 불확실 TS 퍼지 모델의 강인 안정화 조건을 기반으로한 강인 추종 제어기의 설계방법을 제시한다. 4절에서는 모의실험 결과를 고찰하고, 5절에서 결론을 맺는다.

**2. 비선형 시스템의 TS 퍼지 모델**

**2.1 TS 퍼지 모델**

일반적인 불확실한 시스템의 TS 퍼지 모델은 다음과 같다.

Plant Rule  $i$  :  
 IF  $x_1(t)$  is  $\Gamma_1^i$  and ... and  $x_n(t)$  is  $\Gamma_n^i$ ,  
 THEN  $\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t)$   
 ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) (1)

비퍼지화 출력은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(x(t))((A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t)) \quad (2)$$

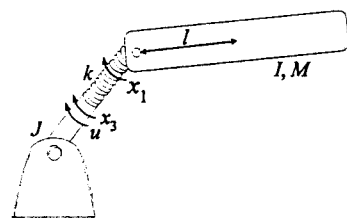


그림 1. 단일 링크 유연 로봇

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{Mgl}{J} \sin x_1 - \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J}u \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $M$ 는 링크의 질량,  $l$ 는 링크의 관성,  $J$ 은 링크의 질이,  $k$ 는 관절과 연결된 스프링의 탄성,  $J$ 는 구동부 축의 관성,  $g$ 는 중력가속도이다. 비선형 시스템 (5)에서는  $\sin x_1$ 꼴의 비선형 요소를 포함하고 있다. 이 비선형 요소를 선형 시스템의 가중치 합으로 표현하기 위해 다음과 같이 정리한다.

정리 1.  $x(t) \in [M_1, M_2]$  이라고 가정하면, 비선형 요소  $f(x(t)) = \sin(x(t))$  에 대하여 다음과 같이 선형 시스템의 가중치 함으로 표현할 수 있다.

$$f(x(t)) = \left( \sum_{i=1}^2 \mu_i g_i(x(t)) \right) x(t)$$

여기서,

$$g_1(x(t)) = 1, \quad g_2(x(t)) = \alpha,$$

$$\mu_1 = \Gamma_1, \quad \mu_2 = \Gamma_2$$

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \frac{\sin(x(t)) - \alpha x(t)}{(1-\alpha)x(t)}, \\ \Gamma_2 = \frac{x(t) - \sin(x(t))}{(1-\alpha)x(t)}, & \text{for } x(t) \neq 0 \\ \Gamma_1 = 1, \quad \Gamma_2 = 0, & \text{for } x(t) = 0 \end{cases}$$

그리고  $\alpha = \sin^{-1}(\max(M_1, M_2))$  이다.

정리 1을 이용하여 불확실 비선형 시스템 (5)를 TS 퍼지 모델링 하면,

Plant Rules:

IF  $x(t)$  is about  $M_1$  THEN  $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$

IF  $x(t)$  is about  $M_2$  THEN  $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$  (6)

여기서,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{Mgl}{I} - \frac{k}{I} & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{J} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha Mgl}{I} - \frac{k}{I} & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{J} \end{bmatrix}$$

참고 1 단일 링크 유연 로봇의 TS 퍼지 모델(6)은 시스템의 비퍼지화된 출력이 실제 비선형 시스템과 일치하므로 모델링 불확실성이 존재하지 않는 한 정확한 TS 퍼지 모델이다.

### 3. 강인 추종 제어기의 설계

본 절은 불확실한 TS 퍼지 모델의 강인 안정화 조건을 이용하여 강인 추종에 대한 충분조건을 제시한다. 제어의 목적은 tracking Error를  $z(t) = x(t) - r(t)$  라 정의하고,  $t \rightarrow \infty$  일 때,  $e(t)$ 가 영으로 수렴하게 하는 것이다.

추종제어 문제를 풀기 위해 기준입력  $r(t)$ 를 다음과 같은 왜관형태로 정의한다.

$$\dot{w}(t) = Fw(t) \quad (7)$$

$$r(t) = Gw(t) \quad (8)$$

오차 방정식을 표현하기 위해 식 (9)와 같은 새로운 형태의 상태를 정의한다.

$$z(t) = x(t) - T_i w(t) \quad (9)$$

여기서  $T_i$ 의 해법은 식 (10)의 Matrix Equation에서 나온다.

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ L_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \quad (10)$$

위 Matrix Eq.에서 정의되는  $T_i, L_i$ 에 의해서  $z(t)$ 에 관한 새로운 상태 방정식이 다음과 같이 정의 된다.

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x(t)) ((A_i + \Delta A_i)z(t) + (B_i + \Delta B_i)v(t)) \quad (11)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x(t))(v(t) + L_i w(t)) \quad (12)$$

제어기 설계에 앞서 다음과 같은 보조정리를 도입한다.

보조 정리 1. 적절한 차원의 대칭 행렬,  $N, O$  와 행렬  $L$  이 주어질 때, 다음과 같은 두 개의 행렬 부등식은 상등이다.

$$(a) \quad O > 0, \quad N + L^T O L < 0,$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} N & L^T \\ L & -O^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \text{또는} \quad \begin{bmatrix} -O^{-1} & L \\ L^T & N \end{bmatrix} < 0.$$

보조 정리 2. 적절한 차원의 행렬  $D$  와  $E$ , 그리고 대칭 행렬  $S$  가 주어졌을 때, 조건  $F^T F \leq R$ 을 만족하는 다음의 행렬 부등식은  $S + DFE + E^T F^T D^T < 0$  과 임의의 상수  $\epsilon > 0$ 이 존재하는 행렬 부등식  $S + [\epsilon^{-1} E^T \quad \epsilon D] \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^{-1} E \\ \epsilon D^T \end{bmatrix} < 0$  은 상등이다.

불확실한 연속 시간 TS 퍼지 모델을 다음과 같이 고려한다.

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x(t)) ((A_i + \Delta A_i)z(t) + (B_i + \Delta B_i)v(t)) \quad (13)$$

시스템 (13)를 안정화시키기 위하여 본 논문에서는 다음과 같은 형태의 TS 퍼지 모델 기반의 상태 제환 제어기를 설계한다.

$$u(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x(t)) K_i z(t) \quad (14)$$

시스템 (13)와 제어기 (14)으로 구성되는 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_i(x(t)) \mu_j(x(t)) (A_i + \Delta A_i + (B_i + \Delta B_i)K_j)z(t) \\ &= \sum_{i=1}^2 (\mu_i(x(t)))^2 (A_i + \Delta A_i + (B_i + \Delta B_i)K_i)z(t) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j}^2 \mu_i(x(t)) \mu_j(x(t)) \\ &\quad \times \left( \frac{A_i + \Delta A_i + (B_i + \Delta B_i)K_j}{2} \right) z(t) \\ &\quad + \left( \frac{A_j + \Delta A_j + (B_j + \Delta B_j)K_i}{2} \right) K_j z(t) \end{aligned} \quad (15)$$

상기 보조정리를 사용하면 불확실한 TS 퍼지 모델의 점근적 안정성 (asymptotical stable)을 보장하는 충분 조건은 다음과 같이 정리할 수 있다.

정리 2. 다음 두 개의 선형 행렬 부등식을 만족하는 양정정 (positive-definite)의 대칭 행렬  $P$  와 행렬  $K_i$ 와 적절한 양의 상수  $\epsilon_{ij}$ , ( $i, j=1, \dots, q$ )가 존재한다면, TS 퍼지 시스템 (13)는 TS 퍼지 모델 기반 상태 제환 제어기 (14)에 의하여 점근적으로 안정 가능하다.

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \Psi_{ii} & * & * \\ E_{1i}Q + E_{2i}M_i & -\epsilon_{ii}I & * \\ D_i^T & 0 & -\epsilon_{ii}^{-1}I \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} Y_{ij} & * & * & * & * \\ E_{1i}Q + E_{2i}M_j & -\epsilon_{ij}I & * & * & * \\ E_{1j}Q + E_{2j}M_i & 0 & -\epsilon_{ij}I & * & * \\ D_i^T & 0 & 0 & -\epsilon_{ij}^{-1}I & * \\ D_j^T & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_{ij}^{-1}I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

여기서,  $\Psi_{ii} = QA_i^T + A_iQ + M_i^T B_i^T + B_i M_i$ ,

$Y_{ij} = QA_i^T + A_iQ + QA_j^T + A_jQ + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i$ ,

$Q = P^{-1}, M_i = K_i P^{-1}$ 이며, \*는 대칭되는 위치의 전치

요소를 나타낸다.

증명: 참고문헌 [2] 참조.

## 5. 결 론

본 논문에서는 추종 제어기 설계 방법으로 추종에 관한 기준입력을 일종의 왜란의 형태로 해석하고, 시스템을 오차 방정식의 새로운 상태로 변환시킨 후, 먼저 상태 피드백 안정화 제어를 설계한다. 이 제어기를 다시 원래의 시스템에 적용시켜 추종 제어를 설계하는 방법을 제안하였다. 본 논문에서 제시한 강인 추종제어기의 설계 방법은 기존의 추종제어기의 설계 방법과 비교 했을때 기준입력에 대한 해석을 왜란의 형태로 해석하여 특히, EPDC의 적용에서 기준입력에 대한 일반형 적용에 대한 난해함을 제거하였다. 마지막으로 본 논문에서 제안한 강인 추종 제어기의 성능은 단일링크 유연 로봇에 응용하여 시스템의 안정도 및 추종 제어 기능을 검증하였다.

참고 4: 정리 2의 두 번째 선형 행렬 부등식들 중에서, 첨자  $(i, j)$ 로 구성되는 선형 행렬 부등식은 모든 시간  $t \geq 0$ 에 대하여  $\mu_i(x(t))\mu_j(x(t))=0$  라면 시스템 (13)의 안정도를 판별할 필요가 없다.

참고 5: 정리 2에서 불확실성을 표현하기 위한 행렬들  $D_i$ ,  $E_{ij}$ 는 임의로 정할 수 있으나, 이러한 요소들은 제어기의 성능에 영향을 미칠 수 있다.

## 4. 모의 실험

본 절은 불확실한 TS 퍼지 시스템을 위한 강인 추종 제어기의 설계의 한 예를 보여준다. 모의실험을 위하여 다음과 같이 파라미터를 참고문헌(3)에서 차용한다.

$$I = 0.03 \text{ kg-m}^2, \quad M = 0.2687 \text{ kg}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2, \\ L = 1 \text{ m}, \quad k = 31 \text{ N/m}, \quad J = 0.004 \text{ kg-m}^2.$$

정리 1의  $x(t) \in [M_1, M_2]$ 라는 가정에서  $M_1, M_2$ 는 각각  $[-2.85, 2.85]$ 로 정하고, 설계파라미터  $\alpha$ 는 0.1로 정한다. 또 시스템 파라미터는 30%의 불확실성을 갖는 것으로 가정한다. 가정 1에 의하여 불확실성을 표현하는 행렬들은 다음과 같이 정한다.

$$D_1 = \frac{10}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{J} & \frac{MgL}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{J} & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad E_{11} = \frac{3}{10} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ D_1 = \frac{10}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{J} & \frac{\alpha MgL}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{J} & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \frac{3}{10} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{21} = E_{22} = \frac{3}{10} [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

TS 퍼지 모델 기반 제어기 규칙은 다음과 같다.

Controller Rules :

IF  $x_1(t)$  is  $M_1$  THEN  $u(t) = K_1 x(t)$ .

IF  $x_2(t)$  is  $M_2$  THEN  $u(t) = K_2 x(t)$ .

정리 2를 이용, 제어기 이득행렬을 구하면 다음과 같다.

$$K_1 = [-4.8256 \quad -10.5644 \quad -123.1353 \quad -0.9452] \\ K_2 = [-4.7085 \quad -10.4402 \quad -121.7476 \quad -0.9342]$$

식(10)의 Matrix Equation에서의  $T_i, L_i$ 를 구하면

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = [0 \quad -0.0015], \quad L_2 = [0 \quad -0.0015].$$

이고, 공통양한정 행렬은 다음과 같다.

$$P = 1.0e+006 \times \begin{bmatrix} 0.0003 & -0.0042 & 0.0003 & 0.0032 \\ -0.0042 & 0.1400 & -0.0093 & -0.3257 \\ 0.0003 & -0.0093 & 0.0011 & -0.0378 \\ 0.0032 & -0.3257 & -0.0378 & 8.7353 \end{bmatrix}$$

식 (9)에서 정의한 새로운 상태에 대한 강인 안정화 조건에 의해서 제어기를 설계 하였고, 이 제어기는 리아프노프 견지에서 안정함을 알수가 있다. 시스템의 상태 변수 초기값이  $x(0) = [0.5 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 일 때, 기준입력이  $r(t) = 0.2\cos(t)$ 일때의 시스템의 응답을 나타내고, Fig 3은 제어 입력 파형이다. 모의 실험 결과 제안된 설계방법으로 설계된 제어기가 추종문제에 대한 성능이 우수함을 입증한다.

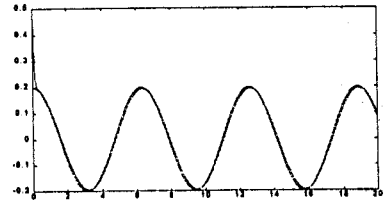


그림 2.  $r(t) = 0.2\cos(t)$ 일 때의 시스템의 응답

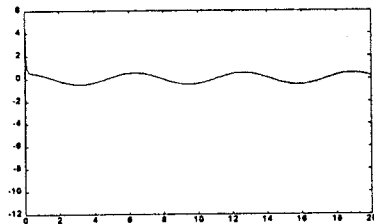


그림 3. 제어 입력

감사의 글 : 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호: 2000-1-30200-002-3)에 의해 지원 받았음.

## (참 고 문 헌)

- [1] Y. H. Joo, L. S. Shieh and G. Chen. "Hybrid state-space fuzzy model-based controller with dual-rate sampling for digital control of chaotic systems," *IEEE trans. on Fuzzy systems*, Vol. 7, No. 4, Aug., 1999.
- [2] Y.H.Joo, S.W. Jeon, O.S. Kwon. "Design of Robust Fuzzy controller for Load-Frequency Control of Power System Using Intelligent Digital Redesign Technique." *Journal of Fuzzy Logic and Intelligent System*, Vol. 10, No. 4, Aug. 2000.
- [3] H.A.Maiki, D.Misir, D.Feigenspan and G.Chen. "Fuzzy PID control of a flexible-joint robot arm with uncertainties from time-varying loads," *IEEE Trans. on Control Syst. Techn.*, Vol. 5, No. 3, May, 1997.
- [4] Y.H.Joo, N.S. Lee, K.B. Kim. "Fuzzy Controller for Nonlinear System Using Optimal Pole Placement" *Journal of Fuzzy Logic and Intelligent System*, Vol. 10, No. 2, Aug. 2000.
- [5] H.O.Wang, K.Tanaka, and M.F.Griffin. "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol.4, pp.14-23, 1996