

종횡비가 변하는 공동 내 자연대류의 공진주파수

전건호* · 주광섭* · 최영돈**

Resonance Frequency of the Natural Convection in the Closure Cavity for the Variable Aspect Ratio

Kun Ho Chun, Joo Kwang Sup and Young Don Choi

Key Words: Resonance Frequency(공진주파수), Aspect ratio(종횡비), Natural Convection(자연대류), Internal Wave Frequency(내부주파수), Wall Wave Frequency(벽면주파수)

Abstract

This numerical study investigate resonance frequency of natural convection for steady state, periodic flow and chaotic flow in two-dimensional direct numerical simulations, differentially heated, vertical cavities having aspect ratios near unity. The enclosure cavity has isothermal and time dependent temperature side walls and adiabatic top/bottom walls. The aspect ratio is 1/3, 1/2, 1, 2, and 3 for the varying Rayleigh number. Resonance frequency for AR=1 has decrease as the aspect ratio and the Rayleigh number are increasing.

기호설명

A : 주기적 경계조건에 대한 온도의 진폭
 AR : 종횡비 (H/L)
 F : 무차원 공진주파수
 Fa : 무차원 (각)공진주파수 ($2\pi F$)
 g : 중력가속도
 H : 공동의 세로 높이
 L : 공동의 가로 넓이
 $Nu_{x=0}$: 냉벽에서 Nusselt 수
 $Nu_{x=0.5}$: 수평벽의 중앙에서 Nusselt 수
 $Nu_{x=1}$: 온벽에서 Nusselt 수
 Pr : Prandtl 수 (ν/α)
 Ra : Rayleigh 수 ($\beta g(T_H - T_L)L^3/\nu\alpha$)
 T_H : 우측벽면(온벽)의 온도
 T_L : 좌측벽면(냉벽)의 온도
 α : 열확산계수

β : 체적팽창계수
 θ : 무차원 온도
 ν : 동점성계수

1. 서론

자연대류 문제는 오래 전부터 많은 연구가들에 의해서 연구되어져 온 분야이다. 특히 수직벽면의 온도차에 의한 부력의 영향으로 발생하는 자연대류는 정상상태인 경우 더욱 그렇다. 그리고 최근에 공동 내 자연대류의 열전달 향상을 위한 시간 주기적인 온도/열유량 경계조건을 이용하는 유동공진에 관한 연구가 정상상태 유동에서 활발하게 진행되고 있다⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾. 그러나 본 연구에서는 이와 같은 유동공진의 공진주파수에 대한 보다 일반적인 종횡비(aspect ratio, AR), Ra(Rayleigh number) 그리고 공진주파수(resonance frequency, F)에 대한 관계식을 찾아내는데 있다.

유동공진에 관한 연구로는 정상상태의 높은 Ra 수에 관련된 것으로 Lage & Bejan가 전산해석적으로 수직 벽면중 한 벽면에 일정한 온도 그리고

* 고려대학교 기계공학과 대학원

** 고려대학교 기계공학과

다른 한벽면에 시간 주기적인 열유량을 주어 열 전달 향상에 좋은 결과를 도출하여 유동공진의 존재를 확인하였다. 그들은 임의의 주파수에서 공진이 발생한다고 하였으며 공동 내의 중앙선에서 Nu 수의 최대 진폭으로 정의하였다⁽¹⁾. 이에 연속된 연구로써 Antohe & Lage⁽²⁾⁽³⁾는 시간주기적으로 변화는 공진주파수의 진폭과 Pr에 대한 효과를 조사하였다. Kwak et al⁽⁴⁾은 일정한 $Ra=10^7$, $Pr=0.71$ 에 대하여 수직한 두 벽면의 온도차에 의한 문제에서 온벽에 시간 주기적 경계조건을 적용하여 공진주파수, 진폭 그리고 Nu 수의 관계를 자세히 조사하였다. 그리고 Yang 등⁽⁵⁾은 $AR=3$, $Ra=1.6 \times 10^6$ 인 경우에 대하여 주파수와 진폭에 대하여 조사하였다.

현재 유동공진에 의한 열전달촉진에 대해서는 상당한 연구가 수행되어오고 있으면서도 공동내 열·유동적 특성을 결정짓는 중횡비에 따른 공진 주파수에 관한 연구는 아직 명확하게 이뤄지지 않은 상태이다. 본 연구의 목적은 공동내 수직 벽면의 온도차에 의해서 발생하는 자연대류 문제에서 $Pr=0.71$ 인 Bussinesqu 유체에 대하여 중횡비가 1/3, 1/2, 1, 2, 3 일 때 각각의 중횡비에서 Ra수의 변화에 대하여 공진주파수를 찾아내는 것이며 또한 최종적으로 $AR-Ra-F$ 의 상관식을 도출하는 것이 목적이다.

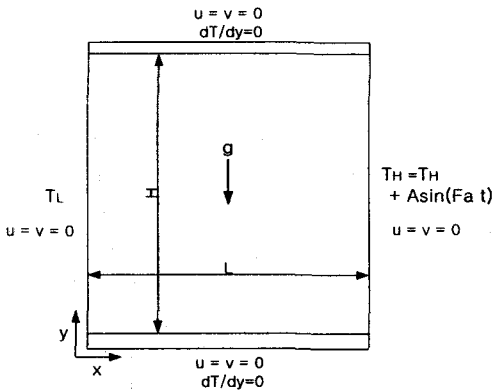


Fig.1 Model of physical system and boundary condition

2. 이론해석

공동내 자연대류를 해석하기 위하여 사용한 방정식은 Boussinesq 근사를 사용한 2차원 직접수

치해석에 적용한 무차원된 에너지방정식, 연속방정식 그리고 운동량방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{PrRa}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2}\right) \quad (4)$$

$$(x, y) = (x^*, y^*)/L, \quad (u, v) = (u^*, v^*)/u_o$$

$$p = p^*/(\rho u_o^2), \quad \theta = (T - T_L)/(T_H - T_L)$$

$$u_o = \sqrt{\beta g (T_H - T_L) L}$$

$$Ra = \beta g (T_H - T_L) L^3 / \nu \alpha, \quad Pr = \nu / \alpha$$

여기서 L, H는 각각은 공동의 가로, 세로길이이며 Pr, Ra 는 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수를 나타낸다. 위에서 사용한 모든 물성치는 $T=20^\circ$ 의 공기에 대한 것이다.

식(1)-(4)의 해를 구하기 위하여 사용한 시간적분 방법은 완전 내재적 분할 단계 기법(fractional step method)을 이용하여 유한체적법을 바탕으로 차분화하였으며 확산항에 대하여 중심차분법을 대류항에 대하여 상류차분법을 적용하였다. 식(2)-(3)의 모든항에 Crank-Nicolson 기법을 사용하여 시간에 대한 2차 정확도를 갖는 완전 내재적 4 단계 분할 단계 기법을 다음과 같이 사용하였다⁽⁶⁾⁻⁽⁷⁾.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i \hat{u}_j + u_i^n u_j^n) = \\ -\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\hat{u}_i + u_i^n}{2}\right) \\ + \frac{(\theta_2 + \theta_2^n)}{2} \delta_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{u_i^* - \hat{u}_i}{\Delta t} = \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \quad (6)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (8)$$

여기서 n , $n+1$, \wedge , $*$ 는 각각 과거 시간 단계, 현재 시간 단계, 중간 속도 그리고 보정 속도를 나타낸다. 식(5)는 Newton 반복법을 사용하여 종속변수를 구하였다. 격자계는 격자 중앙에 스칼라 값을 격자면에 속도벡터를 위치시키는 엇갈림 격자계를 사용하였다.

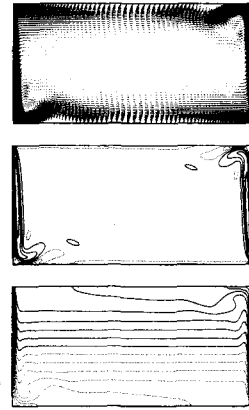
3. 결과 및 고찰

본 연구는 자연대류 문제에 있어서 정상상태, 주기적 유동 그리고 카오스 유동에 걸쳐 종횡비에 따른 공진주파수를 예측하는 것이며 예측 결과를 이용하여 종횡비와 Ra수에 대한 공진주파수의 일반화된 관계식을 산출하는 것이 연구목적이다. 계산영역은 종횡비를 고정시키고 주기적인 유동을 중심으로 정상상태와 카오스 유동으로 Ra수를 확장하면서 진행되었다. 주기적인 상태는 정상상태와 카오스 유동의 천이영역으로 아주 좁은 영역의 Ra수에서 발생한다. 그리고 그와 같은 영역은 단일 주파수 영역으로 그 범위를 찾는 것도 매우 어려워 실험이나 전산해석에서 Ra수를 변화시키며 찾는 것이 일반적이다. 그래서 프로그램의 정확도를 확인하기 위하여 이 범위를 정확히 예측하는 것은 프로그램의 신뢰를 높일 수 있다.

Fig. 2는 정상상태에서 각 종횡비에 대한 속도벡터, 와도 그리고 등온선을 나타낸 것이다. 종횡비가 증가할수록 정상상태에 대한 Ra수는 증가한다. 이와 같은 현상은 수직벽면의 높이가 증가하여 유동의 불안정성의 증가와 두 수직벽면의 열전달이 증가되기 때문이다. 종횡비가 변함에 따라 Ra수가 증가하나 유동의 특성은 유사함을 알 수 있다.

Fig. 3는 $S=1/2$, $Ra=1e8$, $Pr=0.71$ 인 경우 온벽면(hot wall)에 무차원 온도의 진폭이 0.5인 시간 주기적 경계조건에 대하여 가진주파수를 0.40, 0.58, 0.90으로 하였을 경우 냉벽면, 수직벽면의 중앙 그리고 온벽면에서 Nu수를 식(9)-(10)을 사용하여 시간에 대하여 나타낸 것이다. 3개의 가진주파수를 벽면 시간 주기적 경계조건을 적용하였을 경우 기존의 연구들에서의 결과와 같이 공진주파수인 $Fa=0.58$ 에서 Nu수의 시간 진폭 변화가 가장 크게 나타났으며, 주기적 경계조건이 적

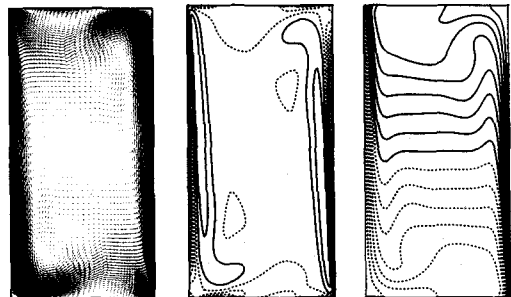
용되는 온벽, 그리고 냉벽순으로 Nu수가 감소하였다. $Fa=0.40$, 0.90 에서는 온벽면에서의 Nu수와 중앙에서의 Nu수가 같은 정도로 나타났으며 초기에 큰 진폭을 보였다 점차 일정한 진폭으로 변화고 있으며, $Fa=0.58$ 에서는 점차 증가하다가 유체의 점성작용으로 감쇠되면서 일정한 Nu수를 유지한다.



(a) $AR=1/2$, $Ra=1.e8$



(b) $AR=1$, $Ra=1.e7$



(c) $AR=2$, $Ra=1.e6$

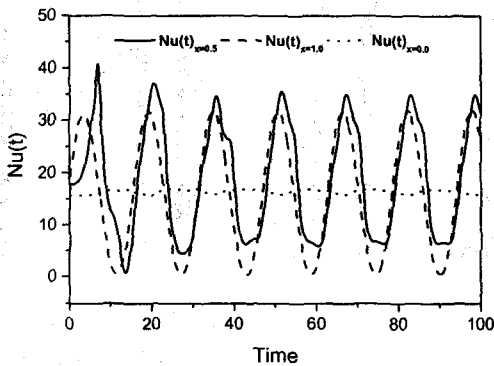
Fig. 2 Comparison of velocity vector(top, left), vorticity (middle) and temperature contours(bottom, right) for the variable aspect ratio.

$$N(t)_x = \int_0^1 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} - u\theta(Ra Pr)^{1/2} \right]_x dy \quad (9)$$

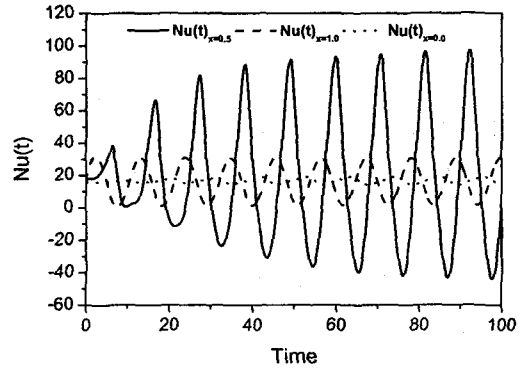
$$N(t)_{wall} = \int_0^1 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{wall} dy \quad (10)$$

$$A(Nu) = \frac{Max[Nu(t)] - Min[Nu(t)]}{Nu_s} \quad (11)$$

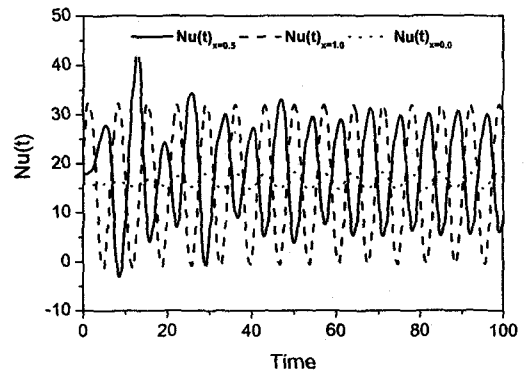
Fig. 3과 같은 방법으로 종횡비가 변하는 경우 공진주파수를 조사하기 위하여 공진주파수가 넓은 영역에서 일정한 값을 유지하는 정상상태에서 유동을 우선적으로 조사하였다. 일반적으로 중앙에서의 Nu수의 시간 주기적 진폭에 대하여 공진주파수를 확인하기 위하여 식(11)과 같이 임의의 주기에 대하여 최대의 Nu수와 최소의 Nu수의 차(진폭)를 벽면에 일정한 온도로 경계조건을 주었을 경우의 Nu_s 로 나누어 Nu수의 진폭을 정의하였다. 종횡비가 변하는 경우 정상상태 유동에 대하여 공진주파수를 조사한 것이 Fig.4이다. 종횡비가 1보다 작을수록 Nu수의 진폭은 높게 나타났으며 공진주파수는 낮게 나타났다. 반면 종횡비가 1보다 클수록 Nu수의 진폭과 공진주파수가 낮게 나타났다. 그리고 Nu수의 진폭이 종횡비가 낮을수록 증가하였다. 정상상태의 공진주파수 조사에서 특이한 것은 낮은 종횡비의 경우 2차 Fa가 뚜렷하게 존재한다는 것이다. AR=1/3인 경우 Fa=0.5이며 2차 Fa는 1.13에서도 나타나고 있음을 알 수 있다. 이것은 AR=1/2에서도 같은 경향을 보였다.



(a) Fa=0.40



(b) Fa=0.58



(c) Fa=0.90

Fig. 3 Comparison of Nusselt number at $x=0.0$, 0.5 , 1.0 point for aspect ratio=1/2.

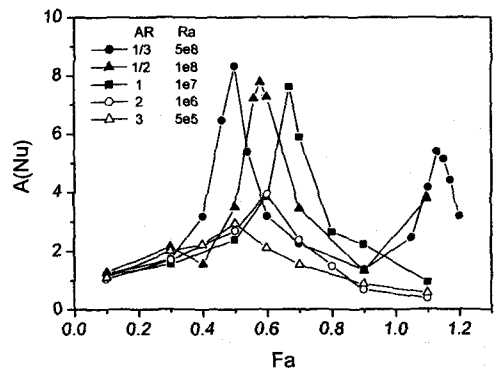
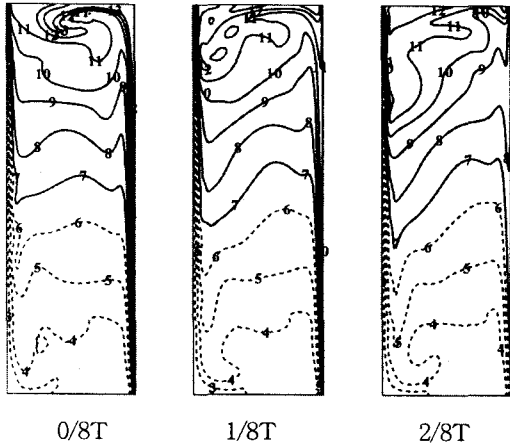


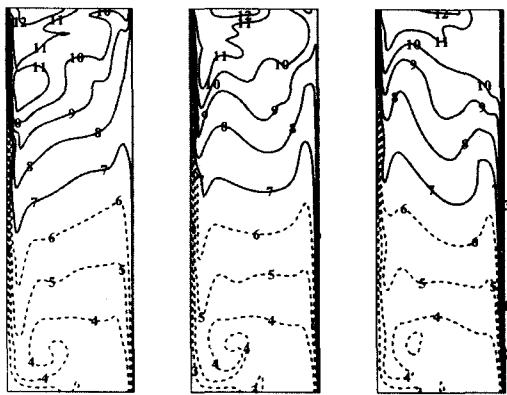
Fig. 4 Comparison of $A(Nu)$ at $x=0.5$ point for the variable aspect ratio.



0/8T

1/8T

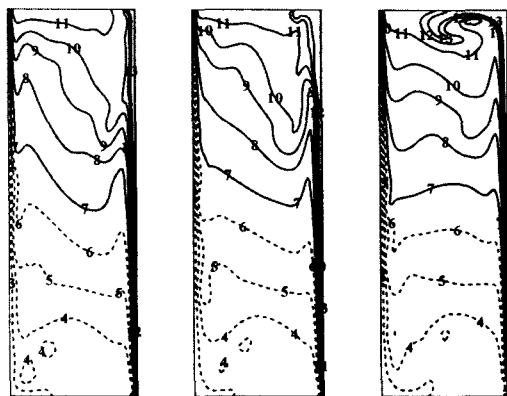
2/8T



3/8T

4/8T

5/8T



6/8T

7/8T

8/8T

Fig. 5 Periodic temperature contour in a cycle for aspect ratio=3, Ra=5e6.

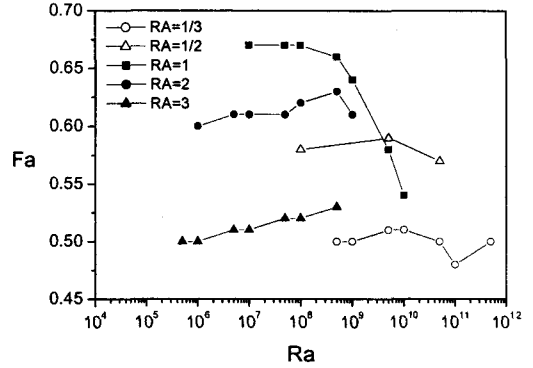


Fig.6 Frequency versus Rayleigh number for each aspect ratios.

Fig. 5의 경우는 $Ra=5e6$, $AR=3$ 인 경우에 대하여 시간 주기적 경계조건을 적용하였을 경우 공진주파수 $Fa=0.51$ 에 대하여 한 주기에서 등온선의 경향을 시간에 대하여 나타내었다. $-0.1 \sim 1.1$ 사이에 13개의 등온선을 나타내었다. 무차원된 냉벽면의 온도는 영이며 온벽면의 평균온도는 1이다. 그러나 0/8T, 8/8T에 나타나는 등온선-13의 경우는 온벽면의 평균온도 보다 높게 나타나고 있다. 이와같은 현상을 KH⁽⁴⁾은 시간 주기적인 경계조건을 적용한 경우의 평균 온도장이 적용하지 않은 경우에 대한 평균 온도장보다 더 많이 벗어나 있음을 의미한다고 하였다. 즉, 공진으로 인한 온도의 증가를 의미하는 것이다. 그리고 한 주기에 대한 온도 주기에서 등온선의 기울기를 살펴보면 기울기가 (0) → (+) → (0) → (-) → (0)로 한 주기를 이루고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 주기는 공동내 내부주파수와 온벽면의 가진주파수가 일치하여 나타나는 유동공진의 전형적인 형태이다. 이와 같은 현상은 종횡비에 관계없이 유사한 현상을 보였다.

Fig.6의 경우는 Ra수 - 공진주파수(Fa)를 선도상에 종횡비의 변화에 대하여 나타낸 것이다. 모든 종횡비에서 Ra수가 정상상태인 경우 공진주파수가 일정치를 유지하고 있다. 종횡비가 2, 3 인 경우 정상상태에서 카오스유동 천이되면서 공진주파수가 증가하고 있으며 공진주파수는 $AR=2$ 인 경우 0.61 ± 0.02 , $AR=3$ 인 경우 0.51 ± 0.03 에 존재하였다. 또한 $AR=1/3$ 인 경우 0.51 ± 0.03 , $AR=1/2$ 인 경우 0.58 ± 0.01 에 공진주파수가 조사되었다. 그러나 $AR=1$ 인 경우는 위의 경우와는 대조적으

로 Ra가 증가함으로 공진주파수가 급하게 감소하고 있음을 알 수 있다. 정상상태에서의 공진주파수는 0.67 ± 0.01 로 나타났으며 카오스 상태에서는 급하게 감소하였다.

4. 결론

공동 내 자연대류의 열전달 향상기법의 하나로 유동공진을 이용한 방법에서 종횡비가 변하는 경우 공진주파수를 조사하였다. 공동 내 자연대류는 Pr이 일정하고 Boussinesq 유체인 유동은 종횡비와 Ra의 함수이다. 본 연구는 종횡비와 Ra가 변화는 경우 공진주파수에 대하여 전산해석적으로 조사하였다. 이에 대한 결론으로 종횡비 AR=1 인 경우 정상상태에서 가장 높은 공진주파수가 나타났으며 Ra가 증가할수록 급격하게 공진주파수가 감소하였다. 그러나 종횡비 AR= 1/3, 1/2, 2, 3 인 경우는 공진주파수의 범위가 ± 0.03 이내에 존재함을 확인하였다.

정상상태에서의 공진주파수의 조사에서 평균진폭이 AR이 1 보다 작은 경우 높게 나타났으며 1 보다 큰 경우는 상대적으로 매우 낮게 나타났다. 또한 AR=1/3, 1/2 인 경우 2차 공진주파수가 조사되었으며 이와 같은 2차 공진주파수는 공진주파수의 2배보다 약간 큰 곳에서 나타났다.

그러나 본 연구의 목적이 Ra-F-AR의 관계식을 유도하는 것이나 해석결과의 미비함과 해석의 부족함으로 관계식 유도는 연구를 계속 수행한 후 발표하고자 한다.

참고문헌

- (1) J. L. Lage and A. Benjan, The resonance of natural convection in an enclosure heated periodically from the side, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol.36(1993), No.8, pp.2027-2038
- (2) B. V. Antohe and J. L. Lage, A Dynamic thermal insulator: inducing resonance within a fluid saturated porous medium enclosure heated periodically from the side, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol.37(1994), pp.771-781
- (3) B. V. Antohe and J. L. Lage, Amplitude effect on convection induced by time-periodic horizontal heating, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol.39(1996), No.6, pp.1121-1133
- (4) H. S. kwak, K. Kuwahara and J. M. Hyun, Resonant enhancement of natural convection heat transfer in a square enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol.41(1998), pp.2837- 2846.
- (5) H.Q. Yang, K.T Yang, Q. Xia, Periodic laminar convection in a tall vertical cavity, *J. Heat Mass Transfer* Vol.32(1989), pp.2199-2207.
- (6) S. Hahn and H. Choi, Unsteady simulation of Jets in a Cross Flow, *J. Computational Physics*, 134(1997), pp.432-356
- (7) J. Kim and P. Moin, Application of a fractional step method to incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol.59(1985), No.2, pp.308-323.
- (8) A. E. Gill and A. Davey, Instability of a buoyancy-driven system., *J. Fluid Mech.*, Vol.35(1969), pp.775-798
- (9) R. F. Bergholz, Instability of steady natural convection in a vertical fluid layer, *J. Fluid Mech.*, Vol.84(1978), pp.743-768.
- (10) G. N. Ivey, Instability in buoyancy-driven boundary-layer flows in stably stratified medium., *Boundary-Layer Met.*, Vol.5(1973), pp53-66
- (11) J. Patterson and J. Imberger, Unsteady natural convection in a rectangular cavity. *J. Fluid Mech*, Vol.100(1980), pp.65-86
- (12) S. Paolucci and D. R. Chenoweth, Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity, *J. Fluid Mech.*(1989), Vol.201. pp.379-410