대한기계학회 2000년도 추계학술대회논문집 B pp. 597~602 KSME 00F213

Slip flow 영역에서 Navier Stokes 방정식의 해석 연구

박원희* · 김태국**

Solutions of the Navier-Stokes equation in slip flow region

W.H. Park, T.K. Kim

Keywords : MEMS, Microflow, Rarefied gas, Slip flow region, Navier-Stokes equations, Maxwell/Smoluchowsk boundary condition

Abstract

In a MEMS(micro-electro mechanical system), the fluid may slip near the surface of a solid and have a discontinuous temperature profile. A numerical prediction in this slip flow region can provide a reasonable guide for the design and fabrication of micro devices. The compressible Navier-Stokes equation with Maxwell/Smoluchowski boundary condition is solved for two simple systems; couette flow and pressure driven flow in a long channel. We found that the couette flow could be regarded as an incompressible system in low speed regions. For the pressure driven flow system, we observed nonlinear distribution of pressure in the long channel and numerical results showed a good agreement with the experimental results.

1. 서 론

마이크로시스템(MEMS)은 장치의 특성 길이가 1mm보다 작거나 1㎛ 정도의 크기를 가지며, 기계적이고 전기적인 장치를 포함하는 시스템을 말한다. 마이크로시스템의 제작공정에서는 빠른 발전을 하고 있지만 물리적 현상에 대한 이해는 아직 미흡한 상태이다[1]. 이러한 현상의 이해는 더욱 발전된 마이크로시스템의 설계, 최적화, 제작 및 운전에 꼭 필요하다.

시스템이 작아질수록 표면에 대한 분자의 운동거리가 매우 커지게 되며, 거시적인 장치와 달리 표면에 작용하는 힘이 체력보다 더 큰 영향을 미치게 되는 등 마이크로 상태에서의 흐름은 우리가 흔히 접하는 거시적 유체와는 다른 양상을 가진다. 마이크로시스템의 덕트, 노즐, 밸브, 베어링, 모터 등의 해석은 벌크 상태에서의 해석에 성공적으로 적용된 no slip 조건을 고려하여 Navier Stokes 방정식을 적용할 수는 없다[2].

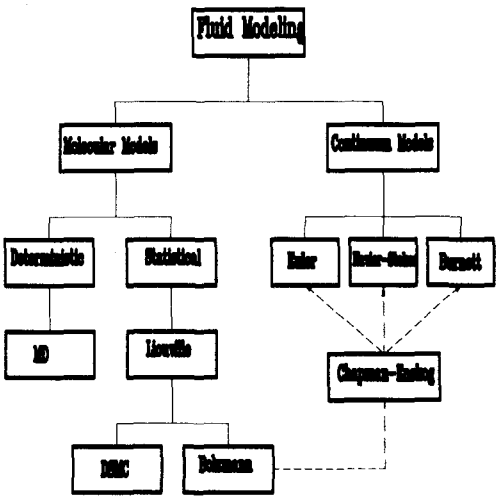

Fig. 1 Molecular and continuum flow models[3].

본 논문에서는 고체-기체 경계면에서의 slip조건을 적용한 Navier-Stokes 방정식을 해석하여 희박기체영역에 속하는 유동장을 해석하였으며 적용된 slip조건은 Maxwell/Smoluchowski 경계조건이다.

* 중앙대학교 대학원
** 중앙대학교

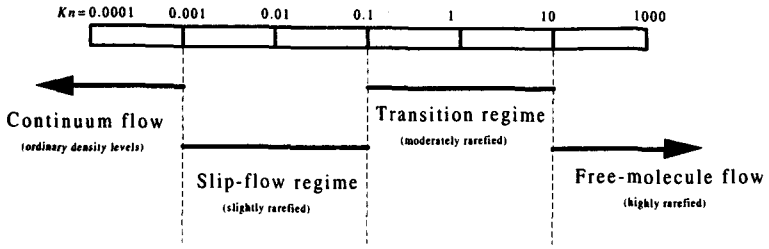

Fig. 2 Knudsen number regimes.

2. 이 론

2.1 유체 해석 모델의 종류

유동장을 해석하는 방법에는 Fig. 1과 같이 크게 거시적인 해석(macroscopic level approach)과 미시적 해석(microscopic level approach)으로 나뉘어 진다. 거시적인 해석방법은 유체를 연속체라 가정하고, 우리가 쉽게 정의할 수 있는 온도와 속도 압력을 종속 변수로 하여 해석하는 방법으로 대표적인 예가 Navier-stokes 방정식이다.

분자모델(Molecular model)은 통계적인 방법과 결정론적인 방법으로 나뉘는데 결정론적인 방법 중 하나인 MD (Deterministic molecular dynamics simulation)는 전체 시스템과 분자간에 작용하는 힘을 고려한 뉴톤의 운동방정식을 풀어서 해석하는 것이다. 확률적으로 계산하는 방법 중 직접모사법(DSMC)은 분자간 힘과 경계조건을 통계적으로 처리하여 전체 유동장의 거시적 특성을 분석하는 방법으로 천이영역의 계산에 널리 이용된다[4]. 또 여기서 Bolztmann방정식은 Chapman-Enskog의 가정을 통해 Euler, Navier- Stokes, Burnnet 방정식으로 변형 될 수 있다[3].

가스의 희박도는 누센수(Knudsen number, Kn)로 표현될 수 있으며, 누센수는 평균자유궤적(λ)과 특성길이로 다음과 같이 정의된다.

$$Kn = \lambda / L \tag{1}$$

분자의 평균자유궤적은 다음과 같은 식으로 나타내어진다.

$$\lambda = \nu \sqrt{\frac{\pi}{2RT}} = \mu \frac{\sqrt{RT\pi/2}}{p} \tag{2}$$

가스의 희박도를 나타내는 누센수에 따라 Fig. 2에서와 같이 크게 4개의 영역으로 구분지을 수 있다.

여기서, 전형적인 Navier-Stokes 방정식은 누센수가 0.1보다 작을 때 적용할 수 있다. 누센수가 작아짐에 따라 확산항들이 없어지며, 누센수가 영일 때 완전한 연속체의 거동을 나타내는 Euler 방정식이 된다. 이 경우 연속체의 관점으로부터 등엔트로피 성질을 가지며, 분자관점에서는 속도분포함수가 모든 영역에서 지역적인 평형을 가지는 Maxwell 분포를 가지는 것이다. 반대로 누센수가 무한대로 커질 경우 경우는 충돌이 없거나(collisionless), 자유분자(free-molecule) 유동 영역으로 나타난다[5].

누센수의 각 영역 별로 지배하는 방정식의 형태 및 그 영역을 해석할 수 있는 수학적 모델은 Fig. 2와 같이 표현될 수 있다.

다음 장에서는 압축성 유체의 Navier-Stokes 방정식과 slip 조건에 대하여 알아보기로 한다.

2.2 지배방정식과 slip 조건

미끄러짐 영역($0.001 < Kn < 0.1$)에서는 연속체로 가정할 수 있으며, 여전히 Navier-stokes 방정식을 적용할 수가 있다. $Kn < 0.2$까지 경우도 연속체로 가정할 수 있다[7]. 희박화의 영향은 벽에서의 부분적인 미끄러짐을 나타내는 Maxwell의 미끄러짐과 von Smoluchowski의 온도 도약 조건으로 나타내진다[6].

<u>지배방정식</u>

압축성 Navier-Stokes 방정식을 고려하여보자. 이차원 x-y 좌표계에서의 연속방정식, 운동량 방정식, 에너지방정식은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

◈ 연속방정식

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

◈ 운동량 방정식

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \quad (4)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \quad (5)$$

◈ 에너지 방정식

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\mu\Phi \quad (6)$$

여기서 기계적 점성에 의한 확산을 나타내는 항 Φ는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \quad (7)$$

미끄러짐 영역에서는 속도의 미끄러짐과 온도의 도약 경계조건은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$u_s-u_w=\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\frac{1}{\rho(2RT_w/\pi)^{1/2}}\tau_s+\frac{3}{4}\frac{\Pr(\gamma-1)}{\gamma\rho RT_w}(-q_s) \quad (8)$$

$$T_s-T_w=\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\frac{1}{R\rho(2RT_w/\pi)^{1/2}}(-q_n) \quad (9)$$

여기서, τ_s는 점성 응력이고, γ는 비열비, q_n 및 q_s는 벽에서의 수직 및 수평방향의 열유속 성분을 나타낸다. u_w, T_w는 벽에서의 속도와 온도를 나타내고, Pr은 플란트 수이다. 식(8)은 Maxwell에 의하여 제안되었으며, 두 번째 항은 thermal creep 현상과 관계된 항으로써 접선 방향의 온도 구배가 존재하는 면을 따라서 압력 변화가 일어날 때 중요한 역할을 한다. 식(9)은 Smoluchowski[6]가 제안하였다. σ_v 및 σ_T는 접선방향의 운동량과 에너지의 조정계수(accommodation coefficient)로써, 벽에 충돌하는 분자의 운동량과 에너지의 교환을 나타내는 상수이다. Beskok[7]은 식(8), (9)를 고차의 함수로 전개하여 계산하기도 하였다.

수평방향의 온도구배 q_s를 무시하면 식(8)은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$u_s-u_w=\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda\frac{\partial u}{\partial y} \quad (10)$$

여기서, Δy에 대하여 테일러 전개를 이용하여 전개하고 고차항을 무시하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_s-u_w=\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\lambda\frac{\Delta u}{\Delta y} \quad (11)$$

λ만큼 떨어진 거리의 속도를 u_λ라고 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_s-u_w=\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}(u_\lambda-u_s) \quad (12)$$

온도의 경우 마찬가지로 λ로 테일러 전개를 하면 다음과 같이 나타내어진다.

$$T_s-T_w=\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T}\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\lambda}{\Pr}\frac{T_\lambda-T_s}{\lambda} \quad (13)$$

T_s로 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_s=\frac{\frac{2-\sigma_T}{\Pr}\frac{2\gamma}{\gamma+1}T_\lambda+\sigma_T T_w}{\sigma_T+\frac{2-\sigma_T}{\Pr}\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \quad (14)$$

3. 수치해석 결과 및 토의

3.1 전단응력에 의해 발생되는 유동(Couette Flow)

마이크로시스템에서 흔히 접하게되는 현상 중 전단응력에 의해 발생되는 유동을 해석하여 보자. Fig. 3은 정정기 모터(electrostatic motor)의 개략도[10]이며 이 시스템에서 전단력에 의해 유동이 발생된다.

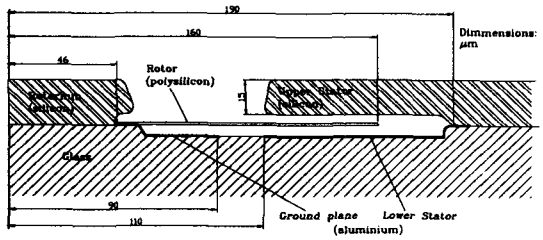

Fig. 3 Geometry of electrostatic motor.

Fig. 3과 같은 시스템은 평판과 일정한 속도 U_∞로 움직이는 무한한 평판으로 인해 발생되는 couette유동으로 가정할 수 있다. Couette 유동으로 가정하였으므로 v와 $\partial/\partial x$항은 영이 되고, $\partial/\partial y$의 항만 존재하게되므로 식 (4)와 식 (6)은 각각 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0 \tag{16}$$

식 (16)을 스케일링 해석을 하면 다음과 같다.

$$\Delta T\sim\frac{k}{\mu}U^2 \tag{17}$$

공기의 경우 상온에서 $k/\mu\approx 7\times10^{-4}$이므로 평판의 속도가 크지 않는 한(10의 차수 이하) 온도의 변화는 무시 가능하다. 식 (15)와 식 (16)은 압축성, 비압축성 모두에서 만족하는 식으로 식 (17)에서 유도하였듯이 온도 변화가 없으면 밀도는 상수이므로 couette 유동에서는 비압축성으로 고려하여 문제를 풀어도 무방함을 알 수 있다.

Table 1 Conditions for calculation

h (μm)	U_∞ (m/s)	Re	Ma_∞	Kn_∞
5	0.6	0.1913	0.0017	0.0134
2	1.5	0.1913	0.0043	0.0335
1	3	0.1913	0.0086	0.0670
0.6	5	0.1913	0.0144	0.1116

Table 1과 같이 평판의 속도, 채널의 높이를 변화해가며 계산해 보기로 한다. 고정 벽은 단열되어있다고 가정한다. 300K의 공기를 고려하며 가스의 희박도를 나타내는 누센수는 다음과 같이 계산되어질 수 있다.

$$Kn_\infty=\frac{\sqrt{\pi\gamma/2}\,Ma_\infty}{Re} \tag{18}$$

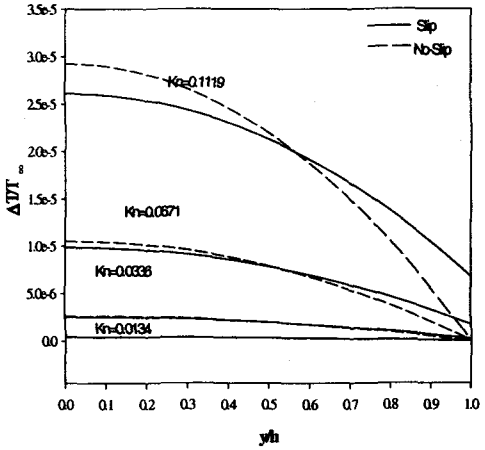

Fig. 5 Temperature profiles along the y-axis at $Re=0.1905$ and $T=300K$.

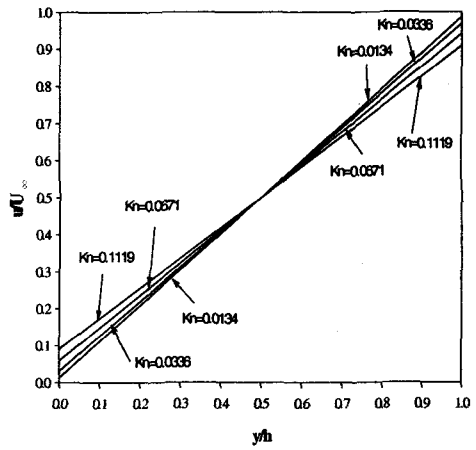

Fig. 6 Velocity profiles along the y-axis at $Re=0.1905$ and $T=300K$.

Fig. 5은 no slip조건과 slip조건을 적용하였을 때의 y축에 따른 온도의 변화를 나타낸다. 온도는 기계적 점성으로 인해 증가하며, 누센수가 작을 no slip과 slip일 때 차이는 별로 없으나, 누센수가 커질수록 고정벽($y/h=0$)에서는 slip조건의 경우에 온도가 높고 $y/h=1$의 경우에는 오히려 온도가 더 높게 계산되어짐을 알 수 있

다. 또 그래프의 기울기로 표현되는 열전달은 no slip 조건을 적용하였을 경우가 더 큼을 알 수 있다.

Fig. 6은 누센수 변화에 따른 속도의 변화를 나타낸다. 누센수가 커질수록 무차원 속도의 기울기가 작아진다.

3.1 압력 차이에 의해 발생되는 유동 (Pressure Driven Flow)

Chih-Ming Ho[11]등이 측정한 일정한 크기의 마이크로채널에서 측정한 압력값과 계산값을 비교하기로 한다. 넓이 40㎛, 높이 1.2㎛, 길이 3000㎛ 채널에서 압력을 측정하였다. 넓이 대 길이의 비가 약 33이므로 특성길이를 1.2㎛로 택하고 1.2㎛×3000㎛의 영역을 이차원으로 계산하기로 한다.

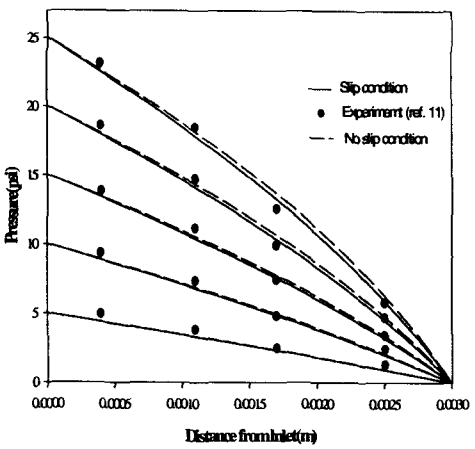

Fig. 7 Pressure distributions for different inlet pressures.

Fig. 7은 입구 압력에 따른 압력의 분포를 나타내고 있다. 실선은 slip 조건으로 계산한 값이고, 점선은 no slip 조건으로, 점은 실험에서 측정한 값이다. 작동 유체는 질소를 고려하였다. 실험값보다 대부분의 압력이 조금 낮게 예측되었다. 입구 압력이 낮을 때는 두 그래프가 일치하나 압력이 높아질수록 그래프의 차이가 나타남을 알 수 있다. slip 조건을 적용하였을 경우 압력의 비선형적 구배가 더욱 선형화되는 것을 알 수 있다.

등온 채널 내에서 완전히 발달되었다고 가정하면 압력 사이의 단순한 평형으로 귀착될 수 있으며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{18}$$

식(18)를 y에 대하여 적분하고, 밀도를 곱하여 질량유속을 구하면 다음과 같이 표현할 수 있다[7].

$$\dot{m} = \frac{h^3 w}{24RTL\mu} P_0^2 \left[(\Pi_i^2 - 1) + 12 \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} Kn_o (\Pi_i - 1) \right] \tag{19}$$

여기서 Π_i는 입구 압력과 출구압력의 비이며, L은 채널의 길이, w는 채널의 넓이를 나타낸다.

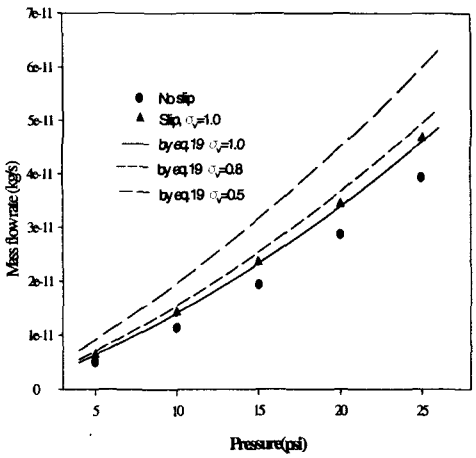

Fig. 8 Mass flow rates for different inlet pressures.

Fig. 8에서는 각각 slip 조건과 no slip 조건을 이용하여 식(3)~(6)을 이용하여 수치적으로 계산하였을 때와 식(19)에서 계산된 질량유속을 비교하였다. 고체-기체 경계면에서의 slip조건의 경우 더 많은 양이 펌핑됨을 알 수 있다. 그리고 압력이 커질수록 그 차이가 더 커짐을 확인할 수 있다. 그리고 입구 압력이 커질수록 식(20)에서 구한 결과와 완전한 이차원 Navier- Stokes방정식을 해석한 결과의 차이가 생기기 시작함을 알 수 있다. 식(19)를 유도하기 위해 Navier-Stokes의 많은 항을 무시하였기 때문으로 판단된다.

Fig. 9는 질소와 헬륨의 경우의 압력 분포를 나타낸 것이며, Fig. 10은 질소일 경우 축방향 평균 속도를 나타낸 것이다. 헬륨의 분자량이 질소보다 작으므로 같은 시스템이라도 헬륨의 누센수가 더 크다. 이것은 희박화의 영향을 더 뚜렷하게 나타내며, Fig. 9에서 압력구배가 질소보다 더 선형적으로 나타난다. 이것은 Fig. 7에서 slip 조건, 즉 희박화의 영향을 고려한 계산 결과가

no slip 조건으로 구한 결과보다 더 선형적으로 나타나는 것과 같은 의미라 할 수 있다.

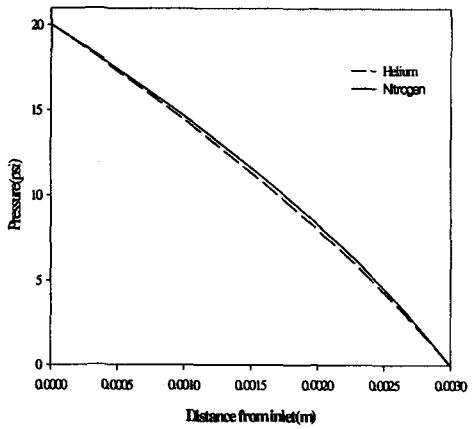

Fig. 9 Pressure of helium and nitrogen at 20psi.

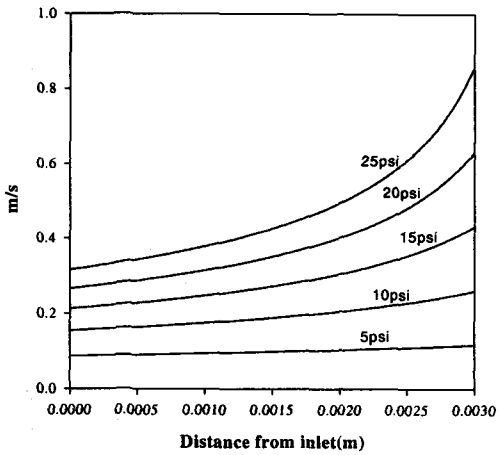

Fig. 10 Axial profiles of mean velocity for different inlet pressures.

4. 결론

본 연구에서는 마이크로 유동을 해석하기 위해 기존의 2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식에 Maxwell/Smoluchowski 경계조건을 적용하여 해석하였으며, 마이크로시스템에서 발생될 수 있는 흐름 중 대표적인 두가지 경우 즉, 전단응력에 의해서 발생되는 흐름(Couette Flow)과 압력차에 의해서 발생되는 흐름(Pressure Driven Flow)에 대하여 각각 수치적으로 계산하고 실험 결과와 비교하였다. 누센수에 따른 속도, 온도 등의 변화를 확인하였으며, 압력의 비선형화를 확인할 수 있었다. 또한 경계면에서의 미끄러짐은 no-slip조건으로 계산할 때보다 더 많은 유량을 예측하게된다는 것을 확인하였다.

압력 차에 의하여 유동이 발생할 경우 분자량이 질소보다 가벼운 헬륨의 경우 압력 분포가 더 선형적이였으며, 더 적은 질량유속을 갖는 실험 결과와 일치하는 계산결과를 나타내었다.

참고문헌

(1) Gad-el-Hak, "The Fluid Mechanics of Microdevices", International Symposium on Micro/Nano Scale Mechanical Engineering in Seoul, pp 267-300, 1999

(2) Chih-Ming Ho, Yu-Chong Tai, ,"Micro-Electro-Mechanical-System(MEMS) and Fluid Flows", Annu. Rev. Fluid. Mech, 30, pp579-612, 1998

(3) Mohamed Gad-el-Hak, "The fluid Mechanics of Microdevices-The Freeman Scholar Lecture", Journal of Fluid Engineering ASME vol 121, pp5-33, 1999

(4) V. P. Carey, "Modeling of microscale transport multiphase system", Heat Transfer proceedings of 11th IHTC, vol. 1, 1998

(5) G. A. Bird, "Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows ", Oxford, 1994

(6) Kennard, "Kinetic theory of gases", McGraw-Hill, 1938

(7) Ali Beskok, "Simulations Models for Gas Flows in Microgeometries", doctor thesis, 1996

(8) Bruce R. Munson, "Fundamental of fluid mechanics", Wiley, 1994

(9) Ali Beskok, George Karniadakis, William Trimmer, "Rarefaction and Compressibility Effect in Gas Microflows", Transactions of ASME, pp 448-456, 1996

(10) K. Hameyer, R. Belmans, "Design of Very Small Electromagnetic and Electrostatic Micro Motors", IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, December 1999

(11) Kin-Choek Pong, Chih-Ming Ho, "Non-linear pressure distribution in uniform microchannels", FED-Vol. 197, Application of Microfabrication to Fluid Mechanics ASME, pp51-56, 1994